

# Mechanika tuhého tělesa



# 1. Tuhé těleso

## TUHÉ TĚLESO A JEHO POHYB

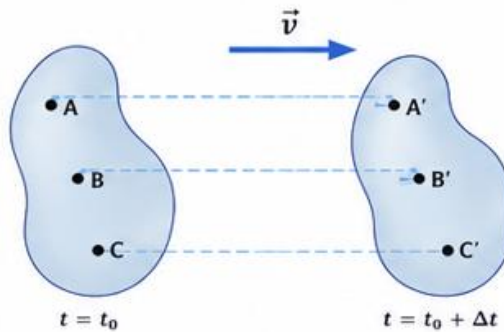
### DEFINICE TUHÉHO TĚLESA (TT)

Tuhé těleso je soustava hmotných bodů, ve které se vzdálenosti mezi libovolnými dvěma body nemění, ať na těleso působí jakékoli síly. Tvar a rozměry tělesa jsou tedy stále.

- Tuhé těleso se může pohybovat posunutím, rotací kolem osy, nebo jejich kombinací.
- Při posunutí se všechny body tělesa pohybují stejným směrem stejnou rychlostí.
- Při rotaci se body pohybují po kružnicích kolem osy otáčení – obvodové rychlosti se liší, ale úhlová rychlost je pro všechny body stejná.

### 1) POSUNUTÍ TUHÉHO TĚLESA

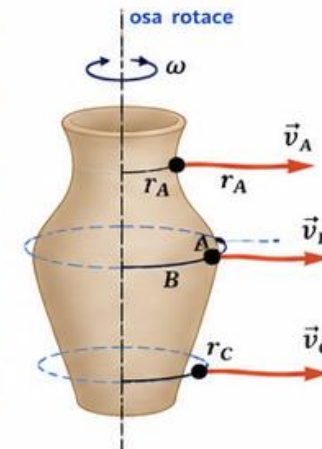
Při posunutí se všechny body tuhého tělesa pohybují stejným směrem a o stejnou vzdálenost. Rychlost všech bodů je stejná ( $\vec{v}_1 = \vec{v}_2 = \vec{v}_3 = \dots$ ).



- Vektory rychlosti všech bodů jsou stejné:  $\vec{v}_A = \vec{v}_B = \vec{v}_C = \vec{v}$
- Trajektorie bodů jsou rovnoběžné přímky.
- Vzdálenosti mezi body i rovnoběžnost přímek (např.  $\overline{AB} \parallel \overline{A'B'}$ ,  $\overline{BC} \parallel \overline{B'C'}$ ) zůstávají zachovány.
- Posunutí je popsáno vektorem posunutí  $\vec{s} = \vec{v} \Delta t$ .

### 2) ROTACE TUHÉHO TĚLESA KOLEM PEVNÉ OSY

Při rotaci se těleso otáčí kolem pevné osy procházející těžištěm (středem) tělesa. Všechny body opisují kružnice se středy na ose. Obvodové rychlosti bodů jsou různé, úhlová rychlost je pro všechny body stejná.



#### VZTAHY PRO ROTACI

Obvodová (lineární) rychlost bodu:

$$v = \omega r$$

kde

$v$  ... obvodová rychlost [ $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ ]

$\omega$  ... úhlová rychlost [ $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$ ]

$r$  ... kolmá vzdálenost bodu od osy [m]

Úhlová rychlost je pro všechny body stejná:

$$\omega_A = \omega_B = \omega_C = \dots = \text{konst.}$$

Obvodové rychlosti se liší podle vzdálenosti  $r$  od osy:

$$v_A = \omega r_A > v_B = \omega r_B > v_C = \omega r_C$$

- Body ležící na ose rotace mají  $r = 0$  a tedy  $v = 0$ .
- Čím je bod dál od osy, tím je jeho obvodová rychlost větší.
- Všechny body vykonají za stejnou dobu stejné úhlové natočení  $\Delta\varphi = \omega \Delta t$ .

### PŘÍKLADY V PRAXI

#### POSUNUTÍ – POJÍZDNÝ CHODNÍK NA LETIŠTI



Pojízdná plocha se posouvá vodorovně vpřed. Všechny body mají stejnou rychlost a směr.

#### POSUNUTÍ – VLAK NA ROVNÉ TRATI



Vagon se pohybuje téměř posunutím. Všechny body vagonu mají stejnou rychlost a směr.

#### POSUNUTÍ – VÝTAH



Kabina výtahu se pohybuje svisle posunutím. Všechny body kabiny mají stejnou rychlost a směr.

#### ROTACE – HRNČÍŘSKÝ KRUH



Všechny body kruhu se otáčejí kolem osy uprostřed. Body dál od středu mají větší obvodovou rychlost.

#### ROTACE – MLÝNSKÉ KOLO



Všechny body kola se otáčejí kolem osy v jeho středu. Okraj kola má mnohem větší obvodovou rychlost než střed.

#### ROTACE – SETRVAČNÍK STROJE



Setrvačník se rychle otáčí kolem pevné osy. Obvodová rychlost roste se vzdáleností od osy.

#### ROTACE – VENTILÁTOR



Lopatky ventilátoru se otáčejí kolem osy motoru. Konce lopatek mají největší obvodovou rychlost.

# 2. Moment síly vzhledem k ose otáčení.

## MOMENT SÍLY VZHLEDEM K OSE OTÁČENÍ

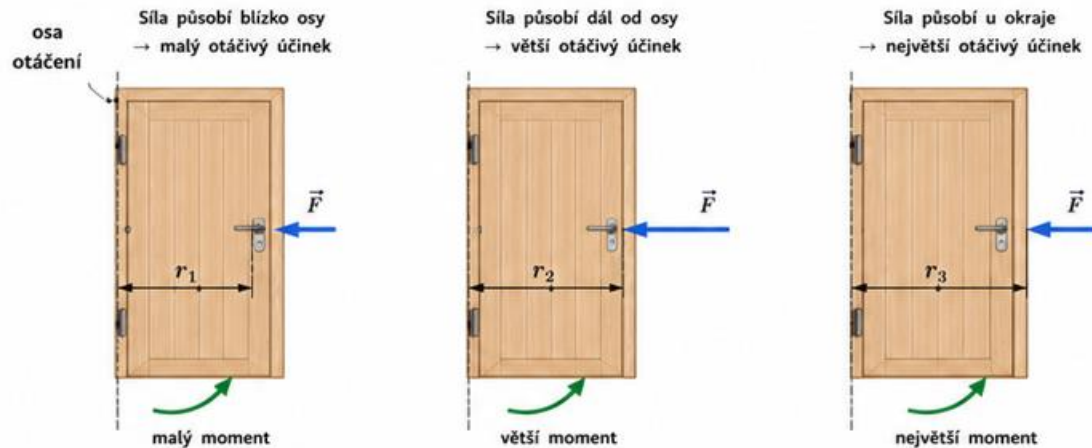
### OTÁČIVÝ ÚČINEK SÍLY ZÁVISÍ NA:

- vzdálenosti místa působení síly od osy otáčení (rameno síly)
- velikosti síly
- směru síly (otáčí ve směru nebo proti směru hodinových ručiček)

Čím větší rameno síly a velikost síly, tím větší otáčivý účinek.

Síla působící v opačném směru způsobí otáčení na druhou stranu.

### 1) VLIV VZDÁLENOSTI OD OSY OTÁČENÍ

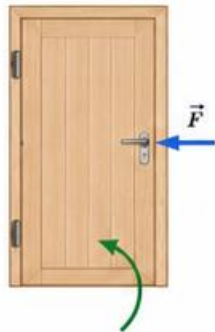


$$r_1 < r_2 < r_3 \Rightarrow M_1 < M_2 < M_3$$

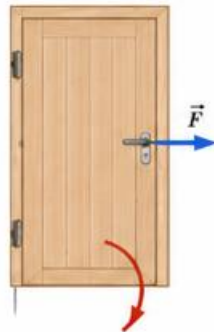
### 2) VLIV SMĚRU SÍLY

Síla působí tak, že otáčí proti směru hodinových ručiček.

Síla působí tak, že otáčí ve směru hodinových ručiček.



kladný moment  
(+)



záporný moment  
(-)

### 3) VLIV VELIKOSTI SÍLY

Menší síla  
→ menší moment

Větší síla  
→ větší moment



menší moment



větší moment

$$F_1 < F_2 \Rightarrow M_1 < M_2$$

### 4) SÍLA PROCHÁZEJÍCÍ OSOU OTÁČENÍ



Síla procházející osou otáčení nemá žádný otáčivý účinek.

$$M = 0$$

$$\text{rameno síly } r = 0 \Rightarrow M = 0$$

### VZOREC PRO MOMENT SÍLY

$$M = F \cdot r_{\perp}$$

Moment síly vzhledem k ose otáčení.

Kladný směr momentu je proti směru hodinových ručiček.

Záporný směr momentu je ve směru hodinových ručiček.

### VYSVĚTLIVKY

$M$  ... moment síly vzhledem k ose otáčení [N·m] (newtonmetr)

$F$  ... velikost působící síly [N] (newton)

$r_{\perp}$  ... rameno síly – kolmá vzdálenost od osy otáčení k přímce působení síly [m] (metr)

Rameno síly je vždy kolmá vzdálenost od osy otáčení k přímce působení síly, nikoli vzdálenost k místu působení síly!

### OBEČNĚJŠÍ TVAR VZORCE

$$M = r F \sin \varphi$$

$r$  ... vzdálenost bodu působení síly od osy otáčení [m]

$F$  ... velikost síly [N]

$\varphi$  ... úhel mezi směrem síly a ramenem  $r$  [rad]

Pokud je síla kolmá na rameno ( $\varphi = 90^\circ$ ), pak  $\sin \varphi = 1$  a vzorec přechází na  $M = F \cdot r_{\perp}$ .

# 2. Moment síly kolem nás.

## MOMENT SÍLY V PRAXI

Čím delší rameno síly, tím menší síla je potřeba

### 1. OTVÍRÁK LAHVÍ



Dlouhá rukojeť zvětšuje rameno síly ( $r$ ), a proto lze víčko otevřít malou silou.

### 2. KOMBINOVANÉ KLEŠTĚ



Síla působící na dlouhé rukojeti ( $r_{vst}$ ) se převádí na mnohem větší sílu v čelistech ( $r_{vyst}$ ).  
Typický zesilovací efekt:  $5\times$  až  $20\times$ .

### 3. MOMENTOVÝ KLÍČ NA UTAHOVÁNÍ KOL

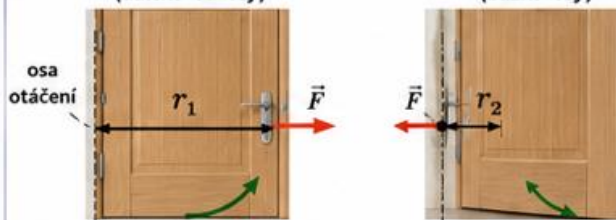


Utahovací moment musí mít přesně stanovenou hodnotu, aby se šrouby nepovolily ani nepřetrhly.  
Příklad:  $M = 120 \text{ N}\cdot\text{m}$

### 4. DVEŘE

Tlačíme u kliky  
(daleko od osy)

Tlačíme u pantů  
(blízko osy)



$$r_1 \gg r_2 \Rightarrow M_1 \gg M_2$$

Stejná síla ( $F$ ) vyvolá mnohem větší moment ( $M$ ), působí-li dále od osy otáčení.

### 5. PRODLUŽOVACÍ TRUBKA NA KLÍČI

Bez prodloužení

S prodloužením



Zdvojnásobení délky ramene ( $2r$ ) znamená zdvojnásobení momentu ( $2M$ ).  
Používá se při povolování zarezlých šroubů.

### 6. ŠLAPÁNÍ NA PEDÁLY JÍZDNÍHO KOLA



Kilka kola funguje jako páka.  
Čím delší kilka ( $r$ ), tím větší moment síly může cyklista vyvinout, a tím snáze překonává odpor (stoupání, setrvačnost apod.).

### NEJVĚTŠÍ MOMENTY SIL V TECHNICE

#### VĚŽOVÝ JEŘÁB



Při zvedání břemen vznikají momenty sil v řádu milionů  $\text{N}\cdot\text{m}$ .

#### LODNÍ ŠROUBY



Obrovské krouticí momenty motorů pohánějí těžké lodě.

#### VĚTRNÉ ELEKTRÁRNY



Rotor o průměru přes 200 m vyvíjí obrovský moment pro výrobu energie.

#### RAKETY

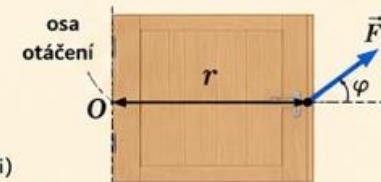


Vychylování trysek vytváří momenty, které řídí orientaci rakety.

Moment síly je otáčivý účinek síly vzhledem k ose.

Závisí na:

- velikosti síly  $F$
- rameni síly  $r$  (kolmé vzdálenosti)
- směru působení síly
- směru otáčení



$$M = r F \sin \varphi$$

**MOMENT SÍLY NENÍ JEN VELIKOST SÍLY. STEJNĚ DŮLEŽITÉ JE, JAK DALEKO OD OSY OTÁČENÍ SÍLA PŮSOBÍ.**

# 3. Těžiště tělesa.

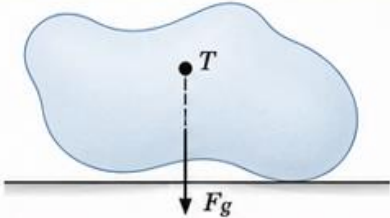
## TĚŽIŠTĚ TĚLESA

### DEFINICE TĚŽIŠTĚ

Těžiště tělesa ( $T$ ) je bod, kterým můžeme nahradit působení tíhových sil na všechny části tělesa. V tomto bodě lze uvažovat, že je soustředěna celá tíha tělesa.

#### ZÁKLADNÍ VLASTNOSTI

- Tíhová síla tělesa působí v těžišti svisle dolů.
- Pokud svislice vedená těžištěm protíná podstavu tělesa, těleso je v rovnováze.
- Čím níže je těžiště, tím je těleso stabilnější.



### VÝPOČET TĚŽIŠTĚ

Pro soustavu hmotných bodů s hmotnostmi  $m_i$  v polohách  $\vec{r}_i$  je poloha těžiště  $\vec{r}_T$  dána vztahem

$$\vec{r}_T = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i$$

kde  $M = \sum_{i=1}^n m_i$  je celková hmotnost tělesa.

V kartézských souřadnicích:

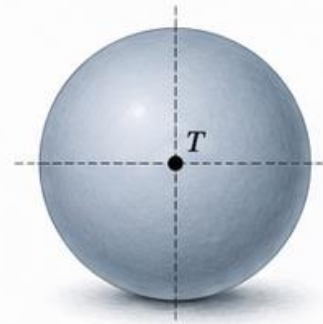
$$x_T = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i x_i \quad y_T = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i y_i$$

$$z_T = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i z_i$$

Pro spojitá tělesa nahradíme sumy integrály.

### TĚŽIŠTĚ SYMETRICKÝCH TĚLES

#### KOULE



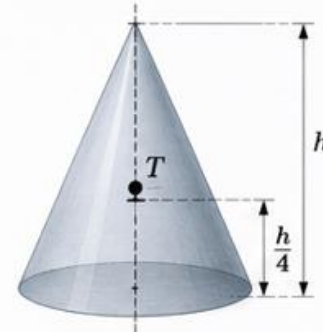
V geometrickém středu.

#### VÁLEC (plný)



Na ose, uprostřed výšky.

#### KUŽEL (plný)



Na ose, ve vzdálenosti  $\frac{h}{4}$  od podstavy.

### TĚŽIŠTĚ V PRAXI – ZAJÍMAVOSTI A UKÁZKY

#### ROCK BALANCING



Umění vyvažování kamenů spočívá v tom, že svislice vedená těžištěm soustavy kámen-kámen-... protíná podstavu (malou kontaktní plochu). Těžiště musí být co nejnižší nad místem opory.

#### ŠIKMÁ VĚŽ V PISE



I přes výrazné naklonění je věž stále v rovnováze, protože svislice vedená těžištěm prochází uvnitř základny věže.

#### CAPITAL GATE, ABÚ DHABÍ



Tento mrakodrap je nakloněn o 18°. Těžké protizávaží na opačné straně udržují těžiště uvnitř půdorysu budovy a zajišťují stabilitu.

#### PROVAZOCHODCI NAD PROPASTÍ



Pro zachování rovnováhy se snaží udržovat těžiště co nejnižší a přímo nad lanem. Pomocí dlouhé tyče mohou rychle měnit polohu těžiště.

#### JÍZDA AUTEM PO DVOU KOLECH



Auto zůstane na dvou kolech, pokud svislice vedená těžištěm prochází plochou podepřenou těmito koly. Při větší rychlosti se zmenšuje potřebný úhel náklonu.

#### LEVITUJÍCÍ MNICHOVÉ – JAK TRIK FUNGUJE?



1 Mnich drží tyč, která je pevně spojena s konstrukcí skrytou v jeho oděvu.



2 Konstrukce je připevněna k sedátku, které je ukryto v látce.



3 Celá soustava je podepřena pevným základem (deskou) pokrytým kobercem nebo látkou. Těžiště celé soustavy se nachází nad základnou, proto působí, jako by mnich

Trik funguje díky chytrému ukrytí opěrné konstrukce. Svislice vedená těžištěm celé soustavy (mnich + konstrukce) prochází základnou, proto je soustava v rovnováze.

# 4. Rovnovážná poloha TT. Stabilita.

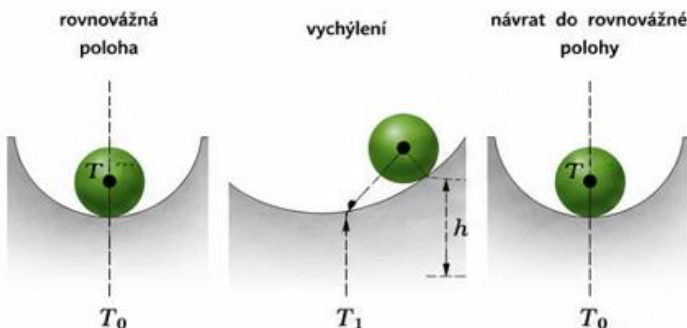
## ROVNOVÁŽNÉ POLOHY TUHÉHO TĚLESA

Tuhé těleso se nachází v rovnováze, pokud výslednice všech sil působících na těleso je nulová a výsledný moment sil vzhledem k libovolné ose je nulový.

### 1) STABILNÍ ROVNOVÁŽNÁ POLOHA

Po vychýlení z polohy se těleso vrací zpět do původní polohy.

Těžiště se zvedne (zvýší svou polohovou energii).



Po vychýlení se těleso vrací do původní polohy, protože tíhová síla směřuje tak, aby těleso vrátila zpět. Potenciální energie je v rovnovážné poloze minimální.



koule v misce



kyvadlo v dolní poloze

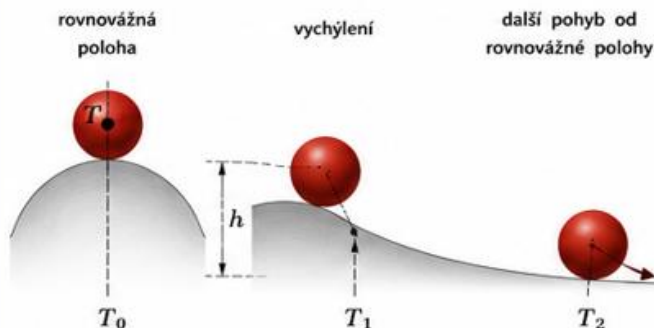


míč v prohlubni

### 2) LABILNÍ ROVNOVÁŽNÁ POLOHA

Po vychýlení z polohy se těleso od původní polohy vzdaluje.

Těžiště se sníží (sníží svou polohovou energii).



Po vychýlení se těleso od původní polohy vzdaluje, protože tíhová síla směřuje tak, aby těleso posunula dál. Potenciální energie je v rovnovážné poloze maximální.



tužka na špičce



míč na vrcholu kopce

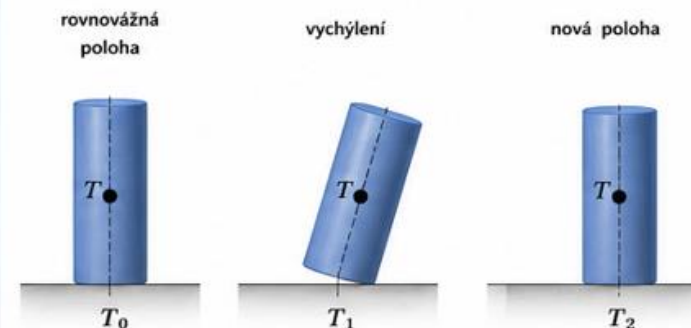


váza na vypouklém povrchu

### 3) INDIFERENTNÍ ROVNOVÁŽNÁ POLOHA

Po vychýlení z polohy zůstává těleso v nové poloze v rovnováze.

Těžiště zůstává v původní výšce (polohová energie se nemění).



Po vychýlení zůstává těleso v nové poloze, protože výška těžiště se nezmění. Potenciální energie je ve všech polohách stejná.



válec na vodorovné ploše



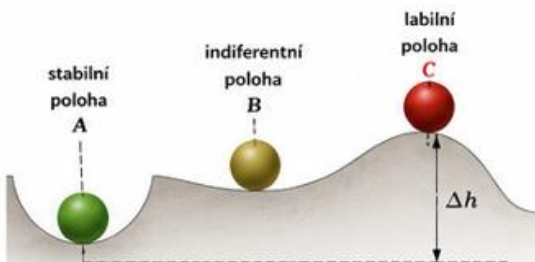
kniha posunutá po stole



mince na stole

### STABILITA TĚLESA

Stabilita tělesa je dána prací potřebnou k vychýlení tělesa ze stabilní rovnovážné polohy přes polohu indiferentní do polohy labilní.



$$W = \Delta E_p = mg\Delta h$$

|            |                                                                     |                                  |
|------------|---------------------------------------------------------------------|----------------------------------|
| kde        |                                                                     |                                  |
| $W$        | ... práce potřebná k vychýlení tělesa                               | [J] (joule)                      |
| $m$        | ... hmotnost tělesa                                                 | [kg]                             |
| $g$        | ... tíhové zrychlení ( $\approx 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ ) | [ $\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$ ] |
| $\Delta h$ | ... zvýšení výšky těžiště mezi polohami A a C                       | [m]                              |

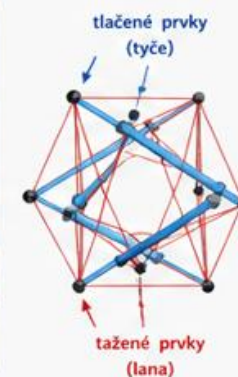
Čím větší je  $W$  (nebo  $\Delta h$ ), tím je těleso stabilnější, tím menší je pravděpodobnost jeho překlopení.

### ZAJÍMAVOST: TENSEGRITY (TENSION + INTEGRITY)

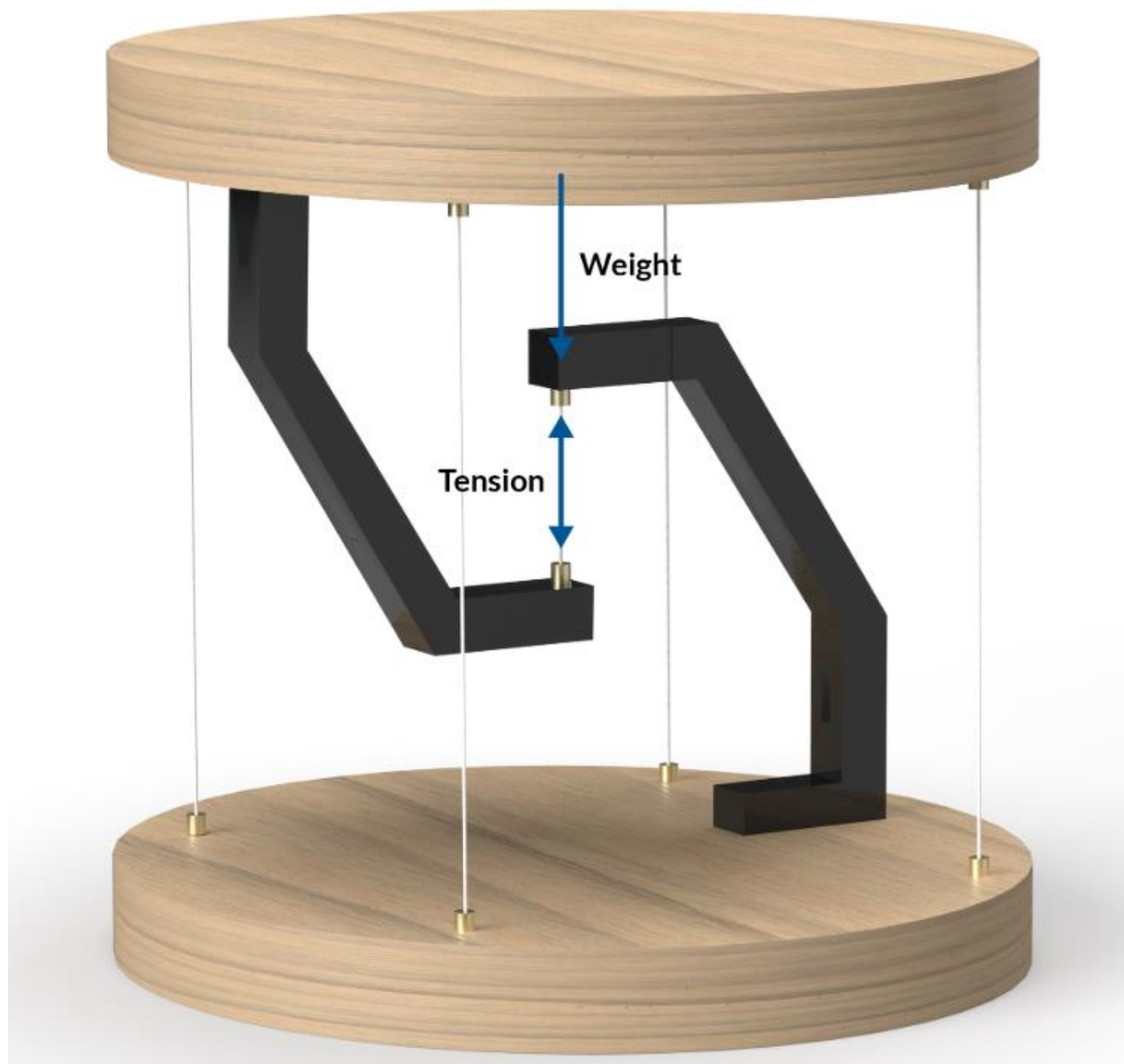
Tensegrity konstrukce jsou sestavy prvků pracujících v tlaku (tyče) a v tahu (lana nebo kabely).

Tlačené a tažené prvky se vzájemně vyvažují, takže celek je stabilní bez dotyku mezi netvořícími se prvky.

Těžiště může být „zavěšeno“ uvnitř konstrukce, která tak působí lehce a zároveň velmi pevně.



## 4. Tensegrity.



<https://www.youtube.com/watch?v=ROnxjj5jPDs>

# 5. Kinetická energie TT.

## KINETICKÁ ENERGIE TUHÉHO TĚLESA

### 1) POSUVNÝ POHYB (translace)

Všechny body tuhého tělesa se pohybují stejným směrem a mají **stejnou rychlost  $v$** .

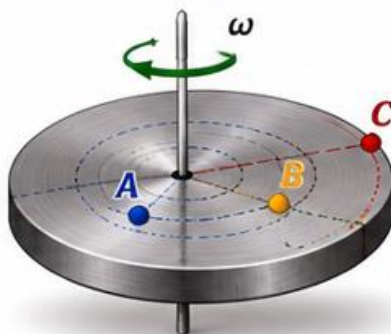
$$E_k = \frac{1}{2} m v^2$$

kde

$m$  ... hmotnost tělesa [kg]

$v$  ... rychlost tělesa [ $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ ]

### 2) OTÁČIVÝ POHYB (rotace kolem pevné osy)



Body jsou v různých vzdálenostech od osy → mají různé obvodové rychlosti

$$\left. \begin{aligned} v_A &= \omega r_A \\ v_B &= \omega r_B \\ v_C &= \omega r_C \end{aligned} \right\} v_A < v_B < v_C$$

Úhlová rychlost je pro všechny body stejná:

$$\omega_A = \omega_B = \omega_C = \omega$$

$$E_k = \frac{1}{2} I \omega^2$$

kde

$I$  ... moment setrvačnosti [ $\text{kg} \cdot \text{m}^2$ ]

$\omega$  ... úhlová rychlost [ $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$ ]

### MOMENT SETRVAČNOSTI $I$

Závisí na rozložení hmoty tělesa vzhledem k ose otáčení.

**Čím dále je hmota od osy, tím větší je  $I$ .**

Stejná hmotnost  $m$ ,  
stejný poloměr  $R$

Plný kotouč  
(nejmenší  $I$ )

Dutý prstenc  
(největší  $I$ )

$$I = \frac{1}{2} m R^2$$

$$I = m R^2$$



Moment setrvačnosti je  
"rotační obdoba hmotnosti".

|                      | Posuvný pohyb<br>(translace) | Otáčivý pohyb<br>(rotace)      |
|----------------------|------------------------------|--------------------------------|
| "setrvačná míra"     | hmotnost $m$                 | moment setrvačnosti $I$        |
| kinematická veličina | rychlost $v$                 | úhlová rychlost $\omega$       |
| síla                 | síla $F$                     | moment síly $M$                |
| kinetická energie    | $E_k = \frac{1}{2} m v^2$    | $E_k = \frac{1}{2} I \omega^2$ |

Jak se počítá moment setrvačnosti?

$$I = \sum_i m_i r_i^2 \quad [\text{kg} \cdot \text{m}^2]$$

$m_i$  ... hmotnost  $i$ -tého elementu tělesa

$r_i$  ... vzdálenost elementu od osy otáčení

Příklady  $I$  pro některá tělesa (osa uprostřed)

tenká tyč (délka  $l$ ):  $I = \frac{1}{12} m l^2$

plný váleček / kotouček:  $I = \frac{1}{2} m R^2$

dutý váleček (prstenc):  $I = m R^2$

tenká kružnice:  $I = m R^2$

koule (plná):  $I = \frac{2}{5} m R^2$

sférická skořepina:  $I = \frac{2}{3} m R^2$

### SETRVAČNÍKY – PŘÍKLADY Z PRAXE

#### 1) MLÝNSKÉ KOLO



Velký moment setrvačnosti ukládá (akumuluje) energii vody a vyhlazuje její nepravidelné přítoky.

#### 2) UMĚLÝ HORIZONT (gyroskop)



Rychle rotující rotor si udržuje směr své osy. Díky setrvačnosti ukazují pilotovi „vodorovno“.

#### 3) HRAČKA KÁČA



Rotující káča je stabilní. Když se zpomalí, ztratí stabilitu a začne se kácet.

#### 4) ZEMĚ – největší setrvačnick



Země se otáčí 23 h 56 min. Její obrovský moment setrvačnosti stabilizuje směr osy a délku dne.

#### 5) PARNÍ STROJ



Setrvačnick vyrovnává chod pístu – během jedné otáčky ulehčí práci stroje a překoná „mrtvá místa“.

#### 6) MODERNÍ SETRVAČNÍKY (vakuové)



Ukládají energii v rotaci (železnice, datacentra, elektrická síť). Velké otáčky → velká energie.

#### 7) DALŠÍ PŘÍKLADY



#### Zajímavost:

Rotace může uchovávat obrovské množství energie.

Rotační energie Země:  $\sim 2,6 \times 10^{29} \text{ J}$

(miliardkrát více, než kolik lidstvo spotřebuje za rok)

#### Shrnutí:

- ✓ Posuvný pohyb:  $E_k = \frac{1}{2} m v^2$
- ✓ Otáčivý pohyb:  $E_k = \frac{1}{2} I \omega^2$
- ✓  $I$  závisí na rozložení hmoty vůči ose otáčení
- ✓ Těleso může mít kinetickou energii z obou druhů pohybu zároveň.



#### Důsledek setrvačnosti:

Těleso odolává změně svého rotačního stavu. Čím je  $I$  větší, tím více energie nebo momentu je třeba k jeho roztočení nebo zastavení.

