4a) POSLOUPNOSTI (obecné vlastnosti)

I. Posloupnost rostoucí a klesající

Definice (Ta vysvětlí, kterou posloupnost nazveme rostoucí a kterou klesající)

Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ se nazývá **rostoucí**, právě když pro všechna $r, s \in N$ platí: Je-li $r < s$, pak $a_r < a_s$.

Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ se nazývá **klesající**, právě když pro všechna $r, s \in N$ platí: Je-li $r < s$, pak $a_r > a_s$.

Na základě této definice se vysloví následující věty:

Věta 1: Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí, právě když pro všechna $n \in N$ je $a_n < a_{n+1}$

Věta 2: Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je klesající, právě když pro všechna $n \in N$ je $a_n > a_{n+1}$

Příklad 1: Rozhodněte, které z následujících posloupností jsou rostoucí a které klesající.

a) $\left(1-\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ b) $\left(\frac{2}{n+3}\right)_{n=1}^{\infty}$ c) $\left(1-n^2\right)_{n=1}^{\infty}$

d) $\left(n^2-10n+1\right)_{n=1}^{\infty}$ e) $\left(\frac{2n}{n+1}\right)_{n=1}^{\infty}$ f) $\left(\sin n\pi\right)_{n=1}^{\infty}$

g) $\left(\log_2 n\right)_{n=1}^{\infty}$ h) $\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{2n}\right)_{n=1}^{\infty}$

Řešení a): $a_n = 1-\frac{1}{n}$, $a_{n+1} = 1-\frac{1}{n+1} = \frac{n+1-1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$

$$a_{n+1}-a_n = \frac{n}{n+1}-\left(1-\frac{1}{n}\right) = \frac{n}{n+1}-\frac{n-1}{n} =$$

$$= \frac{n^2-(n-1)\cdot(n+1)}{n(n+1)} = \frac{n^2-(n^2-1)}{n(n+1)} = \frac{n^2-n^2+1}{n^2+n} = \boxed{\frac{1}{n^2+n}}$$ v tomto

výraz je $n \in N$, proto $n^2+n>0$ a lomený výraz $\frac{1}{n^2+n}>0$.
Platí proto $a_{n+1}-a_n>0$, čili $a_{n+1}>a_n$ nebo
$a_n<a_{n+1}$ a podle věty 1 je daná posloupnost rostoucí.

Řešení b): $a_n=\frac{2}{n+3}$, $a_{n+1}=\frac{2}{n+1+3}=\frac{2}{n+4}$

$$a_{n+1}-a_n=\frac{2}{n+4}-\frac{2}{n+3}=\frac{2(n+3)-2(n+4)}{(n+4)\cdot(n+3)}=\frac{\cancel{2n}+6-\cancel{2n}-8}{(n+4)\cdot(n+3)}=$$
$$=\frac{-2}{(n+4)\cdot(n+3)}$$; Výraz $\frac{-2}{(n+4)\cdot(n+3)}<0$, neboť jmenovatel je kladné číslo, neboť $n \in N$

$a_{n+1}-a_n<0 \Rightarrow a_n>a_{n+1}$ a podle věty 2 je daná posloupnost klesající.

Řešení c): $a_n=1-n^2$, $a_{n+1}=1-(n+1)^2=1-(n^2+2n+1)=$
$=\cancel{1}-n^2-2n-\cancel{1}=-(n^2+2n)=-n^2-2n$

$a_{n+1}-a_n=-n^2-2n-(1-n^2)=-\cancel{n^2}-2n-1+\cancel{n^2}=-(2n+1)$

Protože $n \in N$, tak výraz $-(2n+1)$ je záporný, čili
$a_{n+1}-a_n<0 \Rightarrow a_n>a_{n+1}$. Posloupnost je klesající.

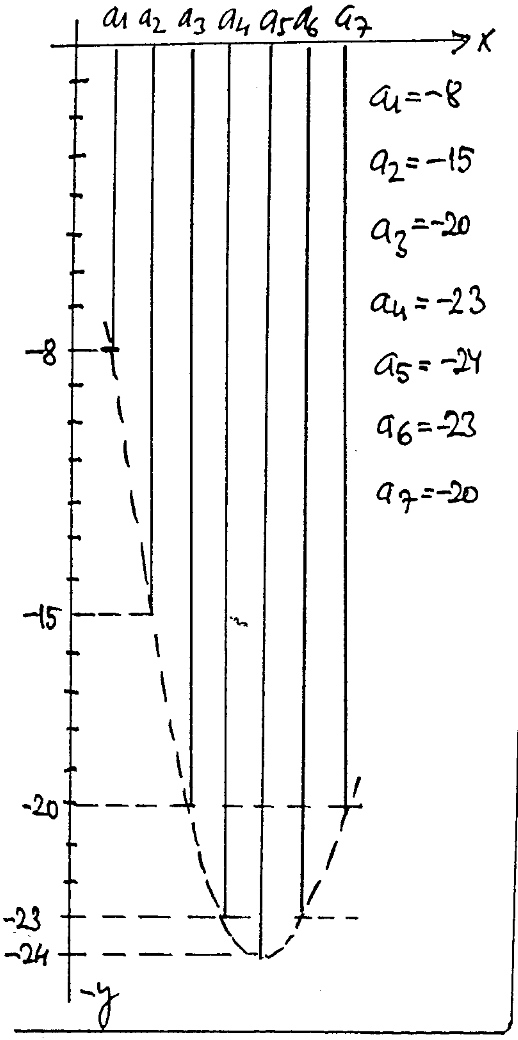
Řešení d):

$a_n=n^2-10n+1$, $a_{n+1}=(n+1)^2-10(n+1)+1=n^2+2n+1-10n-10+1=$
$=n^2-8n-8$

$a_{n+1}-a_n=n^2-8n-8-(n^2-10n+1)=\cancel{n^2}-8n-8-\cancel{n^2}+10n-1=2n-9$

Pro $n \in N \wedge n \leqq 4$ je $\boxed{2n-9<0}$ a pro $n \in N \wedge n \geqq 5$ je $\boxed{2n-9>0}$

Posloupnost není ani rostoucí ani klesající (viz obr.)



Čárkovaně naznačená křivka (parabola) je grafem funkce

$y = x^2 - 10x + 1$

Řešení e):

$a_n = n^2 + 3n$

$a_{n+1} = (n+1)^2 + 3(n+1) = n^2 + 2n + 1 + 3n + 3 =$

$= n^2 + 5n + 4$

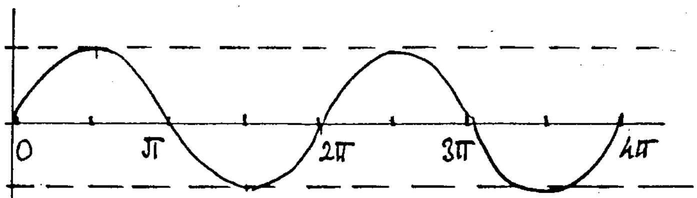
$a_{n+1} - a_n = n^2 + 5n + 4 - (n^2 + 3n) =$

$= \cancel{n^2} + 5n + 4 - \cancel{n^2} - 3n = 2n + 4$

Pro každé $n \in N$ je $2n + 4 > 0$.

Posloupnost je rostoucí.

Řešení f:



Posloupnost není ani rostoucí ani klesající. (Řekneme též, že je KONSTANTNÍ.)

Řešení g: Pomocí vzorce $\log_r t = \frac{\log t}{\log r}$ .. $\log_2 3 = \frac{\log 3}{\log 2} = 1{,}584\ldots$

Pro $n = 1$ .. $\log_2 1 = 0$ ... $2^0 = 1$

$n = 2$ .. $\log_2 2 = 1$ ... $2^1 = 2$

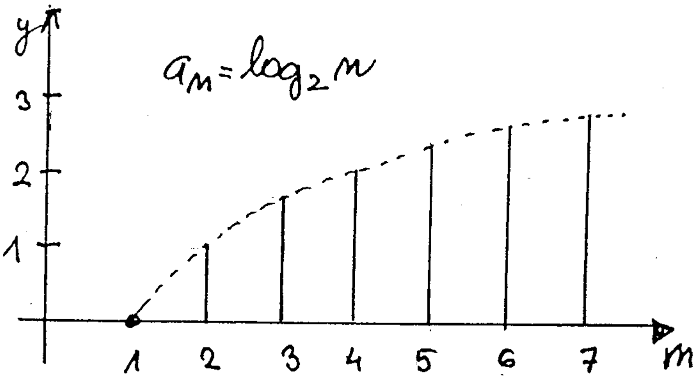
$n = 3$ ... $\log_2 3 \doteq 1{,}58$ ... $2^{1{,}58} = 3$

$n = 4$ ... $\log_2 4 = 2$

$n = 5$ .. $\log_2 5 \doteq 2{,}32\ldots$

$n = 6$ ... $\log_2 6 \doteq 2{,}58$

$n = 7$ ... $\log_2 7 \doteq 2{,}8$



Roste-li n, roste i velikost logaritmu se základem 2. Platí proto $a_n < a_{n+1}$

Daná posloupnost je rostoucí.

Řešení h) : $a_n = \operatorname{tg} \frac{\pi}{2n}$

Pro $n=1$ ... $a_1 = \operatorname{tg} \frac{\pi}{2\cdot 1}$ ... není definováno

Pro $n=2$ ... $a_2 = \operatorname{tg} \frac{\pi}{2\cdot 2} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = \operatorname{tg} 45^\circ = 1$

Pro $n=3$ ... $a_3 = \operatorname{tg} \frac{\pi}{2\cdot 3} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = \operatorname{tg} 30^\circ \doteq 0{,}577..$

Pro $n=4$ ... $a_4 = \operatorname{tg} \frac{\pi}{2\cdot 4} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{8} = \operatorname{tg} 22{,}5^\circ \doteq 0{,}414$

atd. Je zřejmé, že

$a_n > a_{n+1}$ a posloupnost $\left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{2n}\right)_{n=1}^{\infty}$ je klesající

II. Posloupnost neklesající a nerostoucí.

Definice: Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ se nazývá neklesající, právě když pro všechna $r, s \in N$ platí: Je-li $r < s$, pak $a_r \leqq a_s$.

Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ se nazývá nerostoucí, právě když pro všechna $r, s \in N$ platí: Je-li $r < s$, pak $a_r \geqq a_s$.

Věta 3: Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je neklesající, právě když pro všechna $n \in N$ je $a_n \leqq a_{n+1}$.

Věta 4: Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je nerostoucí, právě když pro všechna $n \in N$ je $a_n \geqq a_{n+1}$.

Příklad 2: Jak je možné nazvat posloupnost $(\log_n n)_{n=1}^{\infty}$?

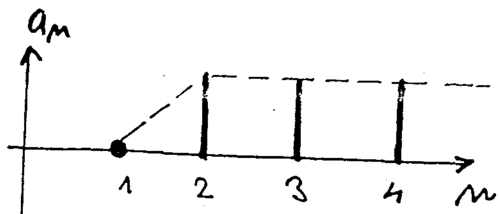
Řešení: $a_n = \log_n n$

Pro $n=1$ ... $\log_1 1 = 0$, neboť $1^0 = 1$

Pro $n=2$ ... $\log_2 2 = 1$, neboť $2^1 = 2$

$n=3$ ... $\log_3 3 = 1$, neboť $3^1 = 3$

$n=4$ ... $\log_4 4 = 1$, neboť $4^1 = 4$



Posloupnost je neklesající.

Příklad 33: Každé přirozené číslo n je možné vyjádřit ve tvaru $5k+l$, kde $k \in N \cup \{0\}$ a l je nejmenší nezáporný zbytek vzniklý při dělení čísla n číslem 5; tedy $l = \{0,1,2,3,4\}$.

Je dána posloupnost, která každému $n \in N$ přiřazuje číslo k.

1) Vypište prvních 10 členů této posloupnosti.
2) Znázorněte vypsané členy v pravoúhlé soustavě souřadnic.
3) Určete název této posloupnosti.

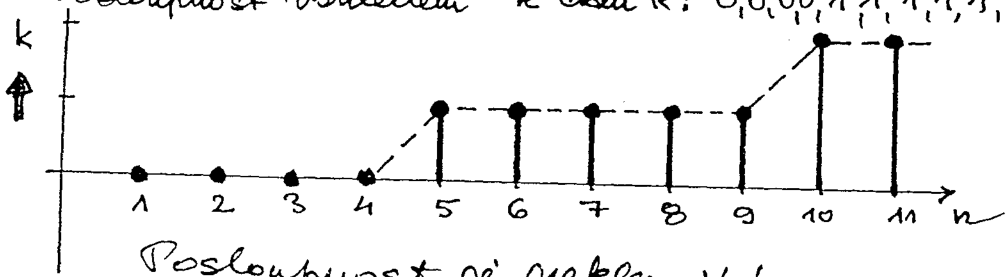
Řešení: $a_n = 5k+l$

$n=1 \dots a_1 = 5.\mathbf{0}+1$
$n=2 \dots a_2 = 5.\mathbf{0}+2$
$n=3 \dots a_3 = 5.\mathbf{0}+3$
$n=4 \dots a_4 = 5.\mathbf{0}+4$

$n=5 \dots a_5 = 5.\mathbf{1}+0$
$n=6 \dots a_6 = 5.\mathbf{1}+1$
$n=7 \dots a_7 = 5.\mathbf{1}+2$
$n=8 \dots a_8 = 5.\mathbf{1}+3$
$n=9 \dots a_9 = 5.\mathbf{1}+4$
$n=10 \dots a_{10} = 5.\mathbf{2}+0$

k

Posloupnost vzhledem k číslu k: 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, ...



Posloupnost je neklesající.

Příklad 34: Jak lze nazvat posloupnost $[2n+(-1)^n]_{n=1}^{\infty}$?

Řešení: $a_1 = [2.1+(-1)^1] = 2-1 = 1$

$a_2 = [2.2+(-1)^2] = 4+1 = 5$

$a_3 = [2.3+(-1)^3] = 6-1 = 5$

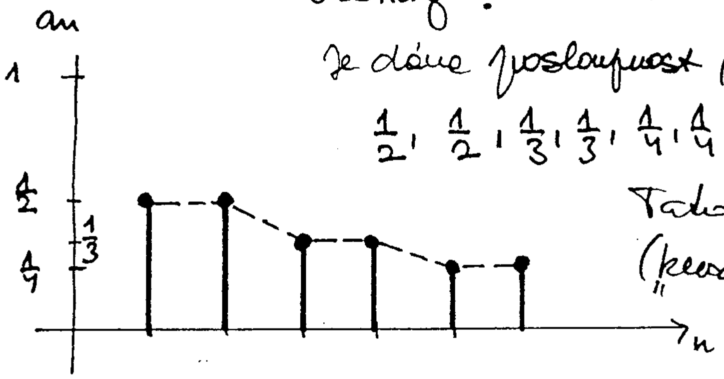
$a_4 = 9$, $a_5 = 9$, $a_6 = 13$

$a_7 = 13$, $a_8 = 17$

1, 5, 5, 9, 9, 13, 13, 17...

Tato posloupnost je opět neklesající.

Poznámka: K posloupnosti nerostoucí není v žádné publikaci příklad. Pokusme se proto teoreticky:

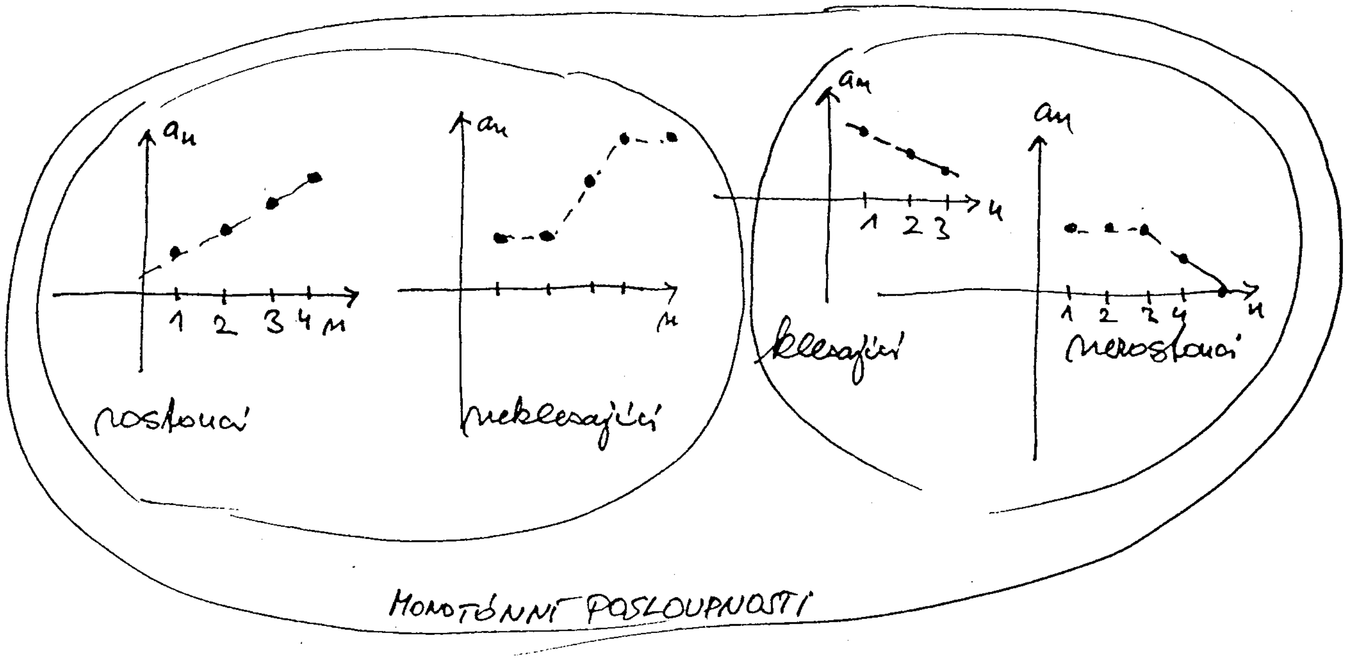


Je dána posloupnost zadaná výčtem členů

$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5} \dots$

Taková posloupnost je nerostoucí. („klesá, nebo je stejná").

Definice: Posloupnosti rostoucí, klesající, nerostoucí a neklesající označujeme společným názvem __posloupnosti monotónní.__



III. Posloupnost zdola a shora omezená

Definice: Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ se nazývá __shora omezená__, právě když existuje číslo $h \in R$ takové, že pro všechna $n \in N$ je $a_n \leq h$.

Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ se nazývá __zdola omezená__, právě když existuje číslo $d \in R$ takové, že pro všechna $n \in N$ je $a_n \geq d$

Posloupnost se nazývá <u>omezená</u>, právě když je <u>omezená shora i zdola</u>.

(a jen zdola, shora)

Příklad 35: Dokažte, že posloupnosti jsou omezené, jsou-li vyjádřeny v následujících tvarech:

a) $\left(\dfrac{1}{2+3n}\right)_{n=1}^{\infty}$ b) $\left(\dfrac{(-1)^n}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ c) $\left(\dfrac{5n-1}{n+2}\right)_{n=1}^{\infty}$

d) $(2n)_{n=1}^{\infty}$ e) $(4n)_{n=1}^{5}$ f) $\left(\dfrac{n^2-1}{n^2}\right)_{n=1}^{\infty}$ g) $\left(\dfrac{2n^2+5}{n^3}\right)_{n=1}^{\infty}$

Řešení a) Musíme dokázat, že jsou omezené zdola i shora.

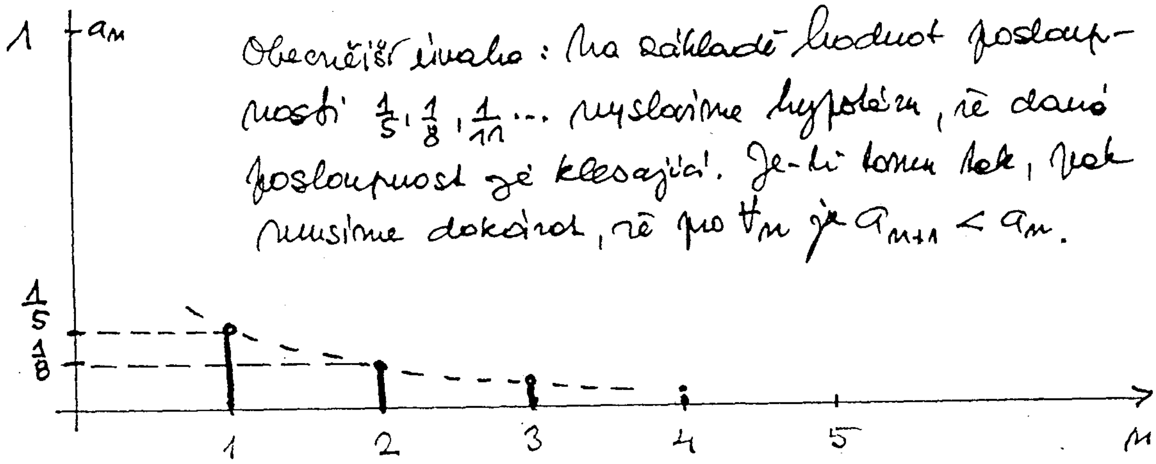
$$a_n = \frac{1}{2+3n}$$

$$a_1 = \frac{1}{2+3\cdot 1} \qquad a_2 = \frac{1}{2+3\cdot 2}$$

$$a_1 = \frac{1}{5} \qquad a_2 = \frac{1}{8} \qquad a_3 = \frac{1}{11} \dots \quad a_{1000} = \frac{1}{1000} = 0{,}001$$

$\frac{1}{5}, \frac{1}{8}, \frac{1}{11}, \dots \frac{1}{1000} \dots$ hodnota posloupnosti s postupným n se blíží k nule. Vyslovíme hypotézu, že daná posloupnost je omezená zdola, neboť pro každé $n \in N$ je $a_n > 0$. Je též omezená shora, a to číslem $\frac{1}{5}$.

Obecnější úvaha: Na základě hodnot posloupnosti $\frac{1}{5}, \frac{1}{8}, \frac{1}{11} \dots$ vyslovíme hypotézu, že daná posloupnost je klesající. Je-li tomu tak, pak musíme dokázat, že pro $\forall n$ je $a_{n+1} < a_n$.



Důkaz: $a_n = \dfrac{1}{2+3n}$, $a_{n+1} = \dfrac{1}{2+3(n+1)} = \dfrac{1}{2+3n+3} = \dfrac{1}{5+3n}$

uděláme rozdíl

$$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{5+3n}-\frac{1}{2+3n}=\frac{2+3n-(5+3n)}{(5+3n)\cdot(2+3n)}=\frac{2+\cancel{3n}-5-\cancel{3n}}{(5+3n)\cdot(2+3n)}=$$

$$=\frac{-2}{\underbrace{(5+3n)\cdot(2+3n)}_{\text{je kladné číslo}}}<0$$

Hodnota lomeného výrazu a_n

$a_n=\dfrac{1}{2+3n}$ se s rostoucím n zmenšuje, blíží se k 0. Platí

$$0\leqq a_n\leqq\frac{1}{5}$$

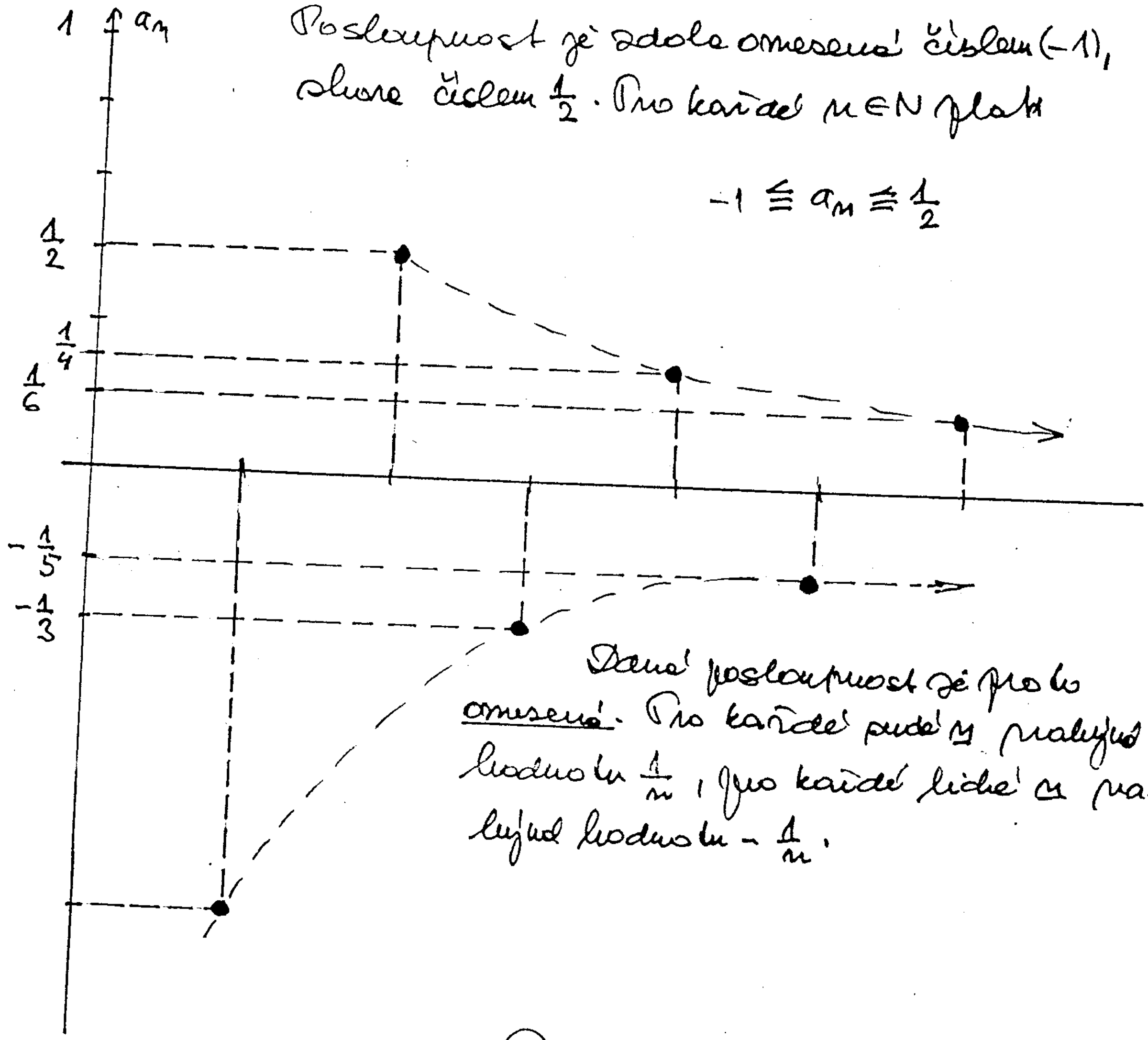
Daná posloupnost je omezená zdola číslem 0, shora číslem $\frac{1}{5}$, platí tedy, že je omezená.

Řešení b)

$a_n=\dfrac{(-1)^n}{n}\rightarrow a_1=-1,\ a_2=\frac{1}{2},\ a_3=-\frac{1}{3},\ a_4=\frac{1}{4},\ a_5=-\frac{1}{5},\ a_6=\frac{1}{6}\ldots$

Posloupnost je zdola omezená číslem (−1), shora číslem $\frac{1}{2}$. Pro každé $n\in N$ platí

$$-1\leqq a_n\leqq\frac{1}{2}$$



Daná posloupnost je tedy omezená. Pro každé sudé n nabývá hodnotu $\frac{1}{n}$, pro každé liché n nabývá hodnotu $-\frac{1}{n}$.

Řeš. c) $a_n = \frac{5n-1}{n+2}$

$a_1 = \frac{5.1-1}{1+2}$

$a_1 = 1\frac{1}{3}$ $a_2 = 2\frac{1}{4}$ $a_3 = 2\frac{4}{5}$ $a_4 = 3\frac{1}{6}$ $a_5 = 3\frac{3}{7}$ $a_6 = 3\frac{5}{8}$

.... $a_{100} = 4\frac{91}{102}$ ... Vyslovíme předpoklad, že jde o posloupnost rostoucí, což se pokusíme dokázat

$a_{n+1} = \frac{5(n+1)-1}{n+1+2} = \frac{5n+5-1}{n+3} = \frac{5n+4}{n+3}$

$a_{n+1} - a_n = \frac{5n+4}{n+3} - \frac{5n-1}{n+2}$ po úpravě $= \frac{23}{\underbrace{(n+3)\cdot(n+2)}_{\text{je kladné číslo}}}$

Vzniklý rozdíl je kladný $\Rightarrow a_{n+1} - a_n > 0$

$a_{n+1} > a_n \Rightarrow$ posloupnost je rostoucí

Posloupnost, která je rostoucí, není omezená shora. Naše posloupnost je omezená pouze zdola, a to číslem $1\frac{1}{3} (\frac{4}{3})$. Jako celek daná posloupnost není omezená.

Řešení d):

$a_n = 2n$. Pro každé $n \in N$ je $2n \geq 2$ a samozřejmě $2n > 0$

2, 4, 6, 8, 10... Posloupnost je zdola omezená číslem 2.

$a_{n+1} - a_n = 2(n+1) - 2n = 2n + 2 - 2n = 2$

$a_{n+1} - a_n > 0 \Rightarrow a_n < a_{n+1}$ ... je rostoucí. A protože je rostoucí, tak není omezená shora. Celkově není tato posloupnost omezená.

---

e) $a_n = 4n$ pro $n \in \{1,2,3,4,5\}$ neboli $(4n)_{n=1}^{5}$ ⇦

4, 8, 12, 16, 20 ... číslo 4 ji omezuje zdola, číslo 20 shora. Není však omezená, neboť to neplatí pro $\forall n \in N$.

f) $a_n = \frac{n^2-1}{n^2}$

$a_1 = 0 < a_2 = \frac{3}{4} < a_3 = \frac{8}{9} < a_4 = \frac{15}{16} \dots$ blíží se ke číslu 1

$0 \leqq \frac{n^2-1}{n} \leqq 1$ Pro $\forall n \in N$ je <u>posloupnost omezená</u> (zdola i shora)

<u>Řešení</u> g) $a_n = \frac{2n^2+5}{n^3}$

$\underbrace{a_1 = 7}_{7} \quad \underbrace{a_2 = 1\frac{5}{8}}_{1,625} \quad \underbrace{a_3 = \frac{23}{27}}_{0,851\dots} \quad \underbrace{a_4 = \frac{37}{64}}_{0,578\dots} \quad \dots a_{100} = \underbrace{0,020005}_{0,020005}$

hodnoty se blíží k 0

Platí $7 \leqq a_n \leqq 0$ <u>Posloupnost je omezená</u>.
