5a) $\boxed{\text{PRŮBĚH FUNKCE}}$

V tomto článku budeme zkoumat, kdy je funkce rostoucí, klesající, monotónní, ve kterých bodech dosahuje lokálního maxima, minima a další.

Rolleova věta:

Jestliže má funkce f tyto vlastnosti:

a) je spojitá v uzavřeném intervalu $\langle a; b\rangle$,

b) v každém bodě otevřeného intervalu $(a; b)$ má derivaci,

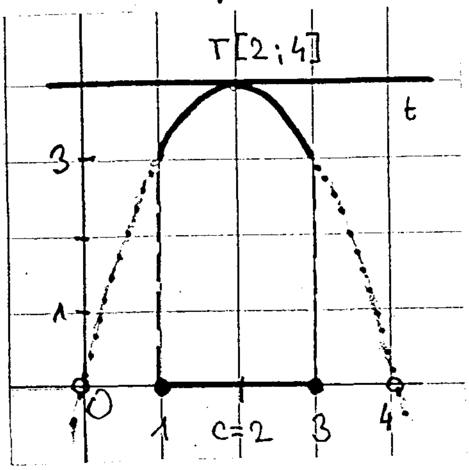
c) $f(a) = f(b)$, $a \neq b$,

pak existuje v $(a; b)$ aspoň 1 bod c, v němž $f'(c) = 0$.

Příklad 1. Sledujme funkci $f: y = -x^2 + 4x$ v int. $x \in \langle 1; 3\rangle$.

1) Určeme průsečíky funkce f s osou x: $-x^2 + 4x = 0$

$x(4-x) = 0 \quad x_1 = 0, \; x_2 = 4$



2) Zjistíme, že v $\langle 1; 3\rangle$ je spojitá

3) $\left.\begin{aligned} f(1) &= -1^2 + 4\cdot 1 = -1 + 4 = 3 \\ f(3) &= -3^2 + 4\cdot 3 = -9 + 12 = 3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow f(1) = f(3)$

4) V každém bodě $x \in (1; 3)$ má derivaci $y' = -2x + 4$.

5) $\Rightarrow$ existuje c, ve kterém $f'(c) = 0$.

6) Zjistíme bod c: $-2c + 4 = 0$

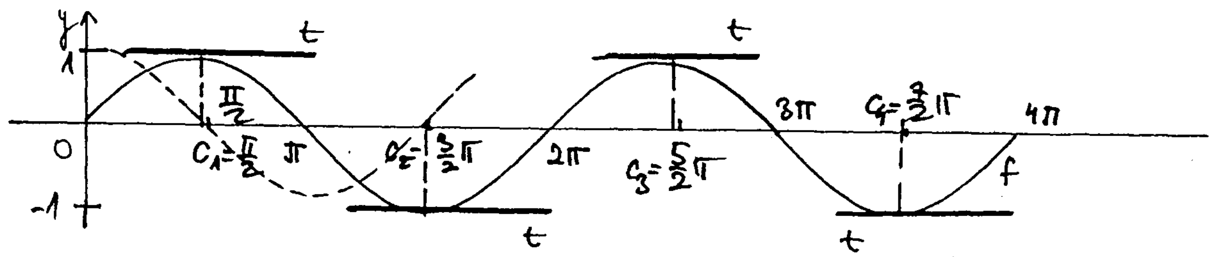
$-2c = -4$

$\boxed{c = 2}$, $f(2) = -2^2 + 4\cdot 2 = -4 + 8 = 4$

V bodě T[2;4] dosahuje funkce f $\boxed{\text{ostrý lokální}}$ extrém (maximum). V bodě T[2;4] je $f' = 0$, čili směrnice tečny v bodě T je rovna 0; f v $\langle 1; 3\rangle$ vyhovuje R. větě.

Příklad 2: Sledujme funkci $f: y = \sin x$ pro $x \in \langle 0; 4\pi\rangle$.

$\left.\begin{aligned} &1) \text{ je v intervalu } \langle 0; 4\pi\rangle \text{ spojitá.} \\ &2) \text{ má pro } \forall x \in (0; 4\pi) \text{ derivaci } f'(x) = \cos x \\ &3) \; f(0) = f(4\pi) = 0 \end{aligned}\right\}$ viz obrázek



Existuje aspoň jedno $c \in (0;4\pi)$, v němž $f'(c)=\cos c=0$.
V této úloze existují taková c čtyři: $c_1=\frac{1}{2}\pi$, $c_2=\frac{3}{2}\pi$, $c_3=\frac{5}{2}\pi$, $c_4=\frac{7}{2}\pi$. Směrnice tečny v každém tomto bodě je rovna 0, což je v tomto bodě zároveň hodnota cos ($\cos\frac{1}{2}\pi=0$, $\cos\frac{3}{2}\pi=0$ atd.)

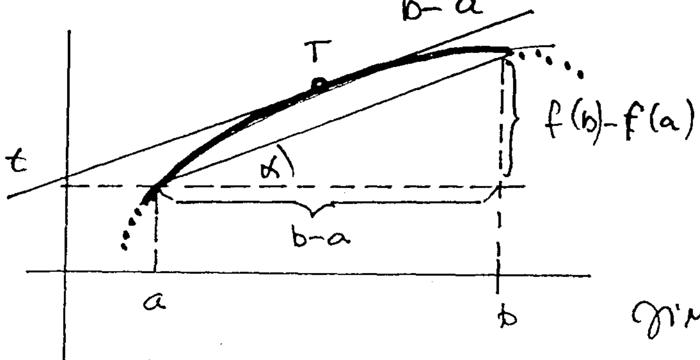
Lagrangeova věta: Jestliže funkce f

a) je spojitá v $\langle a;b\rangle$,

b) v každém bodě intervalu (a,b) má derivaci,

potom v $(a;b)$ existuje aspoň jeden bod c, pro který platí:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

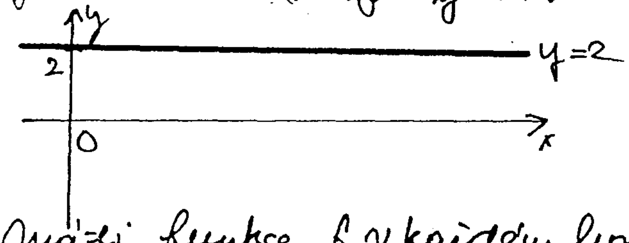


$$f'(c)=\underbrace{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}$$

směrnice sečny AB a zároveň směrnice tečny t v bodě T

jinak: $\operatorname{tg}\alpha=k=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$

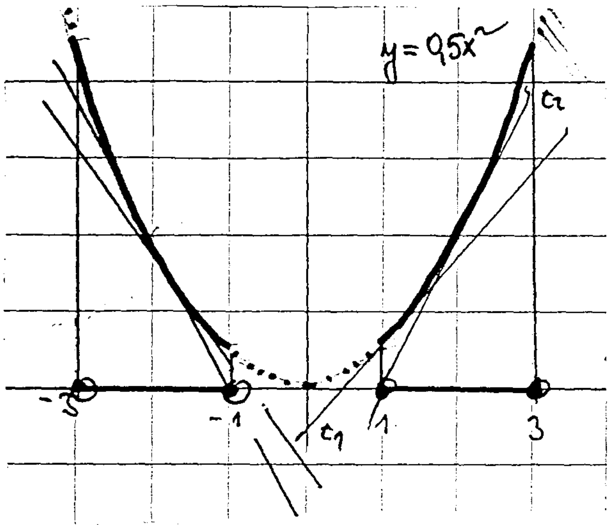
Věta 1: Jestliže $f'(x)=0$ pro každé $x\in(a,b)$, pak funkce f je konstantní (např. $y=2$).



Věta 2: Má-li funkce f v každém bodě intervalu $(a;b)$

a) kladnou derivaci, je v tomto intervalu rostoucí,

b) zápornou " " " klesající.



Na obr. je funkce $y=0{,}5x^2$

v $(-3;-1)$ je $f'<0$, funkce je klesající.

v $(1;3)$ je $f'>0$, funkce je rostoucí.

Intervaly, ve kterých je funkce rostoucí, nebo klesající se nazývají <u>intervaly monotónnosti</u>.

<u>Příklad 3</u>: Určete intervaly monotónnosti funkce $f: y = x^3-3x$

Při řešení využijeme větu 2. Budeme tedy vyšetřovat, ve kterých intervalech je derivace této funkce kladná a ve kterých záporná.

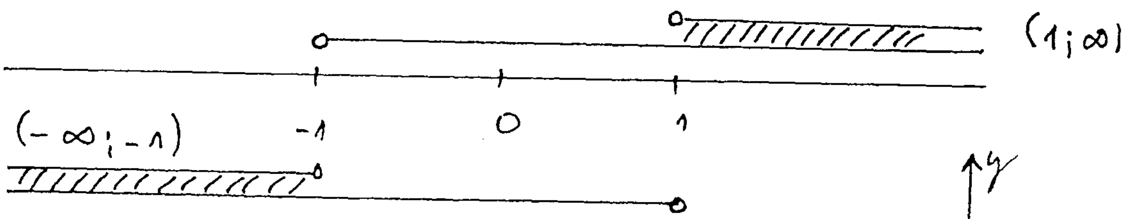
$y' = 3x^2-3$

a) Kdy je $3x^2-3>0$ ... $3x^2-3 = 3\underbrace{(x^2-1)}_{\text{podmínka } x^2-1>0} = 3(x+1).(x-1)$

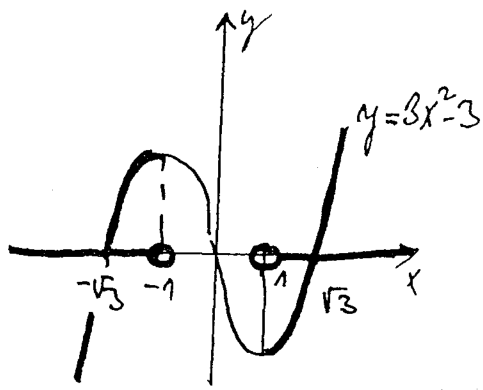
$x^2-1>0$, jestliže platí:

I) $(x+1).(x-1)>0 \iff (x+1>0 \wedge x-1>0) \vee (x+1<0 \wedge x-1<0)$

$(x>-1 \wedge x>1) \vee (x<-1 \wedge x<1)$



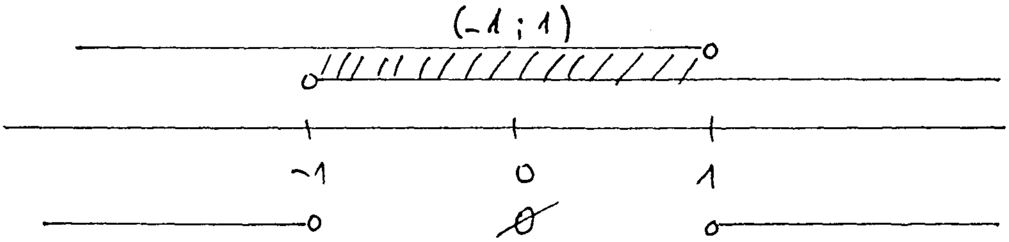
Funkce f je proto rostoucí v intervalech $(-\infty;-1)$ a $(1;\infty)$, nikoli v jejich sjednocení.



II) $(x+1).(x-1)<0 \iff$

$\hookrightarrow (x+1>0 \wedge x-1<0) \vee (x+1<0 \wedge x-1>0)$

$(x>-1 \wedge x<1) \vee (x<-1 \wedge x>1)$



Funkce f je proto klesající v intervalu $(-1;1)$.

Intervaly monotónnosti jsou: $(-\infty;-1\rangle$, $\langle 1;+\infty)$, $\langle -1;1\rangle$.
Uzavřené závorky jsme mohli použít s ohledem ke skutečnosti, že funkce je spojitá v $D_f = R$.

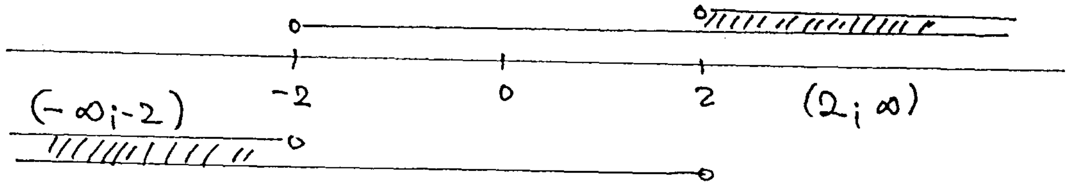
Příklad 4: Určete intervaly monotónnosti funkcí:

a) $y = x^3 - 12x$

$y' = 3x^2 - 12 = 3(x^2-4) = 3\,(x+2)\cdot(x-2)$

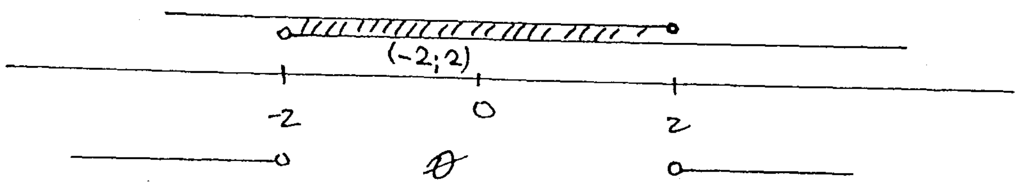
I.) $(x+2)\cdot(x-2) > 0 \Leftrightarrow (x+2>0 \wedge x-2>0) \vee (x+2<0 \wedge x-2<0)$

$(x>-2 \wedge x>2) \vee (x<-2 \wedge x<2)$



Rostoucí je v intervalech $(-\infty;-2)$ a $(2;\infty)$. S ohledem na to, že funkce je spojitá v $D_f = R$, tak je rostoucí v $(-\infty;-2\rangle$, $\langle 2;\infty)$

II.) $(x+2)\cdot(x-2) < 0 \Leftrightarrow (x+2>0 \wedge x-2<0) \vee (x+2<0 \wedge x-2>0)$



Klesající je v intervalu $(-2;2)$ či $\langle -2;2\rangle$ ze stejných již uvedených důvodů

DŮLEŽITÁ POZNÁMKA: Intervaly monotónnosti jsme mohli vyřešit kratším postupem pomocí nulových bodů. Viz dále.

$y' = 3x^2 - 12 = 3(x^2-4) = 3(x+2)\cdot(x-2)$, nulové body $-2; 2)$

$(-\infty;-2)$ $\quad$ $(-2;2)$ $\quad$ $(2;+\infty)$

$-3 \quad -2 \quad 1 \quad 2 \quad 4$

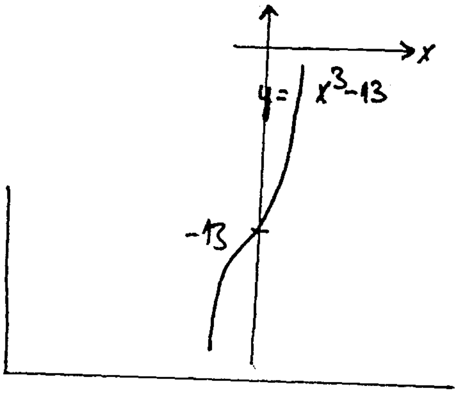
	$(-\infty;-2)$	$(-2;2)$	$(2;+\infty)$
3	lze vynechat		
$x+2$	$-$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$+$
	$+$	$-$	$+$

Funkce f je rostoucí v intervalech $(-\infty;-2)$, $(2;+\infty)$ a klesající v intervalu $(-2;2)$.

Opět platí zde|o přiložených zákonitostí z příkladu 3.

b) $y = x^3 - 13$ $\quad$ $3x^2 > 0$ pro každé $x \in R$

$y' = 3x^2$ $\quad$ Funkce je rostoucí v R.



c) $y = 3x^4 - 8x^3 - 48x^2$

$y' = 12x^3 - 24x^2 - 96x \quad | :12$

$y' = x^3 - 2x^2 - 8x$

$y' = x(x^2 - 2x - 8)$

$x^2 - 2x - 8 = 0$

$x_{1,2} = \dfrac{2 \pm \sqrt{36}}{2}$

$x_{1,2} = \dfrac{2 \pm 6}{2} = \begin{cases} 4 \\ -2 \end{cases}$

$y' = x(x-4)\cdot(x+2)$; zjistíme, kdy $x(x-4)(x+2) > 0$ derivace je $+$

$x(x-4)(x+2) < 0$ " " $-$

nulové body: $-2; 0; 4$

$(-\infty;-2)$, $(-2;0)$, $(0;4)$, $(4;+\infty)$

$-3 \quad -2 \quad -1 \quad 2 \quad 5$

	$(-\infty;-2)$	$(-2;0)$	$(0;4)$	$(4;+\infty)$
x	$-$	$-$	$+$	$+$
$x-4$	$-$	$-$	$-$	$+$
$x+2$	$-$	$+$	$+$	$+$
	$-$ klesá	$+$ roste	$-$ klesá	$+$ roste

Daná funkce je rostoucí v intervalech $(-2;0)$ a $(4;+\infty)$

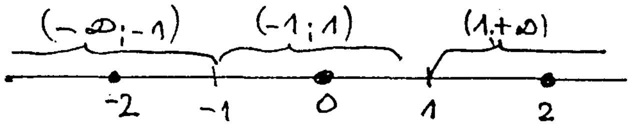
" " " klesající " $\underbrace{(-\infty;-2) \text{ a } (0;4)}_{\text{intervaly monotónnosti}}$

d) $y = \dfrac{2x}{x^2+1}$

$$y' = \frac{(2x)'\cdot(x^2+1) - 2x\cdot(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \frac{2(x^2+1)-2x\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^2+2-4x^2}{(x^2+1)^2} =$$

$$= \frac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2} = \frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2} = \frac{2(1+x)\cdot(1-x)}{(x^2+1)^2}$$; nulové body: -1; 1

-1 nutně být, neboť $(-1)^2=1$



	$(-\infty;-1)$	$(-1;1)$	$(1;+\infty)$
2	+	+	+
$1+x$	−	+	+
$1-x$	+	+	−
$(x^2+1)^2$	+	+	+
	−	+	−

Rostoucí je v intervalu $(-1;1)$, klesající v intervalech $(-\infty;-1)$, $(1;+\infty)$.

Věta 3: Jestliže funkce f má v bodě x_0 lokální extrém a existuje-li v tomto bodě derivace $f'(x_0)$, pak platí:

$$f'(x_0)=0$$

Věta 4: Jestliže $f'(x_0)=0$ a existuje-li v bodě x_0 druhá derivace, pak platí:

a) Je-li $f''(x_0)<0$, má funkce f v bodě x_0 ostré lokální maximum.

b) Je-li $f''(x_0)>0$, má funkce f v bodě x_0 ostré lokální minimum. [Je-li $f''(x_0)=0$, lok. extrém neexistuje.]

Příklad 5: Vyšetřete lokální extrémy funkce:

a) $f: y = x^3-3x^2$

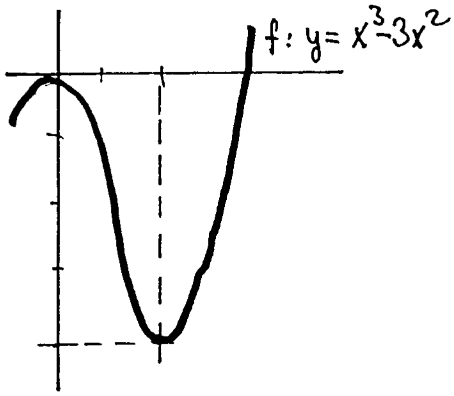
$y' = 3x^2-6x = 3x(x-2)$ → $3x(x-2)=0 \Leftrightarrow 3x=0 \lor x-2=0$

$\boxed{x_1=0} \lor \boxed{x_2=2}$

$y'' = 6x-6$

Pro $x_1=0$ je $y'' = 6\cdot 0-6 = -6$ … $-6<0$ … v bodě $x_1=0$ má funkce f lokální maximum.

Pro $x_2 = 2$ je $y'' = 6.2 - 6 = 6 \dots 6 > 0 \dots$
$\dots$ v bodě $x_2 = 2$ má funkce f lokální minimum (viz priesvitný graf funkce f).



---

b) $f: y = x^3 - x^2$

$y' = 3x^2 - 2x$ → $3x^2 - 2x = 0$, $x(3x-2) = 0$ → $\boxed{x_1 = 0}$; $3x_2 - 2 = 0$, $3x_2 = 2$, $\boxed{x_2 = \frac{2}{3}}$

$y'' = 6x - 2$

V bodě $x_1 = 0 \dots y'' = 6.0 - 2 = -2 \dots -2 < 0$; v bodě $x_1 = 0$ má funkce f lokální maximum. Jeho hodnota je 0.
$(y = 0^3 - 0^2 = 0)$

V bodě $x_2 = \frac{2}{3} \dots y'' = 6 \cdot \frac{2}{3} - 2 = 4 - 2 = 2 \dots 2 > 0$; v bodě $x_2 = \frac{2}{3}$ má funkce f lokální minimum. Jeho hodnota je $-\frac{4}{27}$.
$\left(y = \left(\frac{2}{3}\right)^3 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = -\frac{4}{27}\right)$

---

c) $y = 3x^5 - 5x^3$

$y' = 15x^4 - 15x^2$ → $15x^4 - 15x^2 = 0$, $15x^2(x^2 + 1) = 0$

nulové body: $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$

$y'' = 60x^3 - 30x$

V bodě $x_1 = -1 \dots y'' = 60.(-1)^3 - 30.(-1) = -30$; $-30 < 0 \dots$ maximum.
V bodě $x_2 = 0 \dots y'' = 60.0^3 - 30.0 = 0 \dots$ lok. extrém neexistuje.
V bodě $x_3 = 1 \dots y'' = 60.1^3 - 30.1 = 30 \dots 30 > 0 \dots$ minimum.

$x_1 = -1$, $y_1 = 3.(-1)^5 - 5.(-1) = -3 + 5 = 2 \dots A[-1; 2]$

x_2 nemí treba vypočítavať.

$x_3 = 1$; $y_3 = 3.1^5 - 5.1 = 3 - 5 = -2 \dots B[1; -2]$

V bodě $x_1 = 1$ je lokální maximum $y_1 = 2$.
V bodě $x_3 = 1$ " " minimum $y_2 = -2$.

Příklad 6: Vypočtěte průběh funkce f, tj. zjistěte, kdy je tato funkce rostoucí, klesající a ve kterých bodech má extrémy.

a) $y = x^3 - 3x^2 + 9x$ → kdy $y' = 0$

$y' = 3x^2 - 6x + 9$

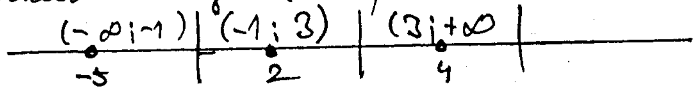
$3x^2 - 6x + 9 = 0 \quad |:3$

$x^2 - 2x + 3 = 0$

$x_{1,2} = \dfrac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = \dfrac{2 \pm 4}{2} = \begin{cases} x_2 = 3 \\ x_1 = -1 \end{cases}$

$\underline{y' = 3(x-3)\cdot(x+1)}$

nulové body $x_1 = -1$, $x_2 = 3$



$y'' = 6x - 6$

	$(-\infty;-1)$	$(-1;3)$	$(3;+\infty)$
$x-3$	$-$	$-$	$+$
$x+1$	$-$	$+$	$+$
	$+$	$-$	$+$

Funkce f je rostoucí v intervalech $(-\infty;-1)$, $(3;+\infty)$.
" " " klesající " $(-1;3)$.

v bodě $x_1 = -1$ je $y''_1 = 6\cdot(-1) - 6 = -12$; $-12 < 0$

$y_1 = x^3 - 3x^2 - 9x$

$y_1 = (-1)^3 - 3\cdot(-1)^2 - 9\cdot(-1) = -1 - 3 + 9 = 5$

v bodě $x_1 = -1$ má lokální maximum $y_1 = 5$.

v bodě $x_2 = 3$ ... je $y'' = 6\cdot 3 - 6 = 12$; $12 > 0$

$y_2 = 3^3 - 3\cdot 3^2 - 9\cdot 3 = -27$

v bodě $x_2 = 3$ má lokální minimum $y_2 = -27$.

---

b) $y = x^3 - 9x^2 + 24x$

$y' = 3x^2 - 18x + 24$

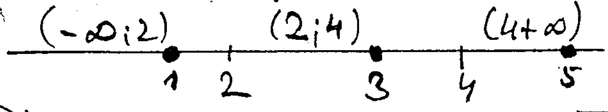
$y'' = 6x - 18$

$3x^2 - 18x + 24 = 0 \quad |:3$

$x^2 - 6x + 8 = 0$

$x_{1,2} = \dfrac{6 \pm \sqrt{4}}{2} = \dfrac{6 \pm 2}{2} = \begin{cases} x_2 = 4 \\ x_1 = 2 \end{cases}$

nulové body $x_1 = 2$, $x_2 = 4$



$y' = 3(x-4)\cdot(x-2)$

$y' = 0 \Rightarrow (x-4)\cdot(x-2) = 0$

	$(-\infty;2)$	$(2;4)$	$(4;+\infty)$
$x-4$	$-$	$-$	$+$
$x-2$	$-$	$+$	$+$
	$+$	$-$	$+$

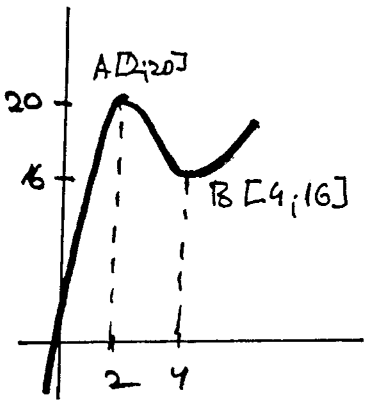
Roste v $(-\infty;2)$, $(4;+\infty)$, klesá v $(2;4)$.

V bodě $x_1 = 2$ je $y_1 = 2^3 - 9\cdot 2^2 + 24\cdot 2 = 20$

V bodě $x_2 = 4$ je $y_2 = 4^3 - 9\cdot 4^2 + 24\cdot 4 = 16$

V bodě $x_1 = 2$ má lok. maximum $y_1 = 20$.

" $x_2 = 4$ " " minimum $y_2 = 16$.



Příklad 7. Je dána funkce $y = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 4$. Určete

a) průsečíky grafu funkce s osami x, y,

b) intervaly monotónnosti,

c) lokální extrém a jeho hodnotu.

a) $\frac{1}{2}x^2 - 3x + 4 = 0 \quad | \cdot 2$

$x^2 - 6x + 8 = 0$

$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{6 \pm 2}{2} = \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 4 \end{cases}$

Pro $x = 0 \ldots y = \frac{1}{2}\cdot 0^2 - 3\cdot 0 + 4$

$y = 4$

Graf protíná osu x v bodech $[2;0]$, $[4;0]$ a osu y v bodě $[0;4]$

$y' = x - 3 \quad \ldots \quad x - 3 = 0$

$x = 3$

$y = \frac{1}{2}\cdot 3^2 - 3\cdot 3 + 4 = -0{,}5$

$y'' = 1 > 0$ funkce má lokální minimum

I.) $x - 3 > 0$

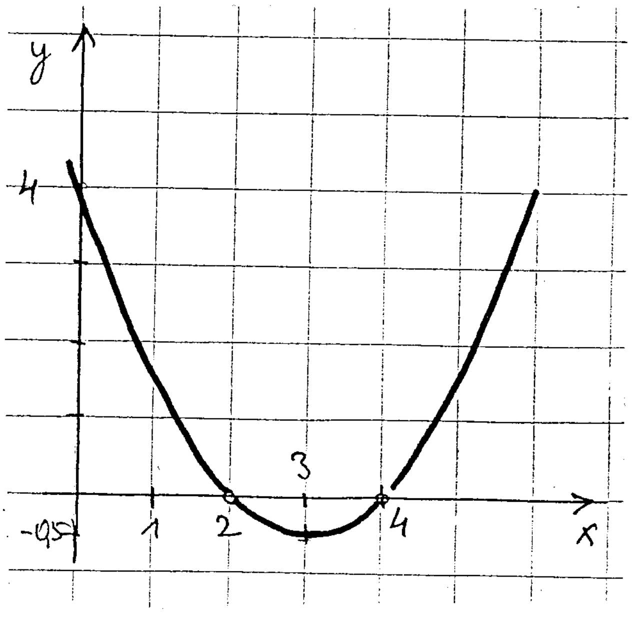
$x > 3$

II.) $x - 3 < 0$

$x < 3$

Funkce je klesající v intervalu $(-\infty; 3)$ a rostoucí v intervalu $(3; +\infty)$.

V bodě $x = 3$ má lokální minimum $y = -0{,}5$



Příklad 8: Určete intervaly monotónnosti a lokální extrémy funkcí:

a) $f: y = (2x+3).(x^2+x+1)$, po úpravě dostaneme:

$y = 2x^3+5x^2+5x+3$

$y' = 6x^2+10x+5$

$y'' = 12x+10$

$6x^2+10x+5=0$

$x_{1,2} = \dfrac{-10 \pm \sqrt{100-120}}{12}$ $\Rightarrow$ derivace $f'(x)$ se nemůže rovnat 0, proto neexistují extrémy.

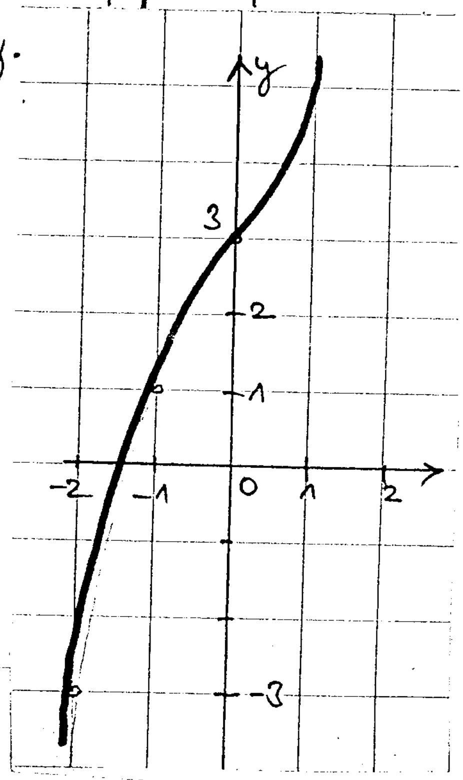
x	-3	-2	-1	-0,5	1
y	-87	-3	1	1,5	15

$y'' = 12x+10$

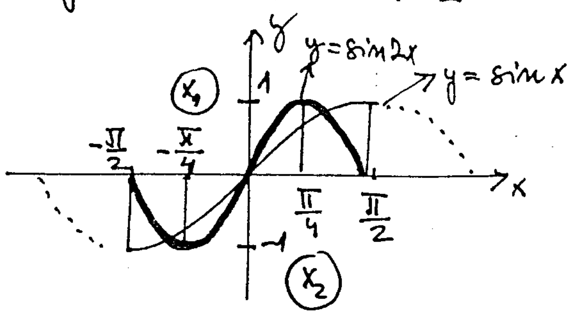
$12x+10 > 0$
$12x > -10$
$x > -\frac{5}{6}$ rostoucí f.

$12x+10 < 0$
$x < -\frac{5}{6}$ rostoucí f.

Daná funkce je rostoucí v R a nemá extrémy.



b) $y = \sin 2x$; $x \in (-\frac{1}{2}\pi ; \frac{1}{2}\pi)$



Z grafu je zřejmé, že funkce $y=\sin 2x$ je rostoucí v intervalu $(-\frac{\pi}{4} ; \frac{\pi}{4})$ a klesající v intervalech $(-\frac{\pi}{2} ; -\frac{\pi}{4})$ a $(\frac{\pi}{4} ; \frac{\pi}{2})$

V bodě $x_1 = -\frac{\pi}{4}$ je lokální minimum $y_1 = -1$.

" $x_2 = \frac{\pi}{4}$ " " maximum $y_2 = 1$.

K tomu naznačíme alespoň zčásti výpočet:

$y = \sin 2x$, subst. $2x = u$

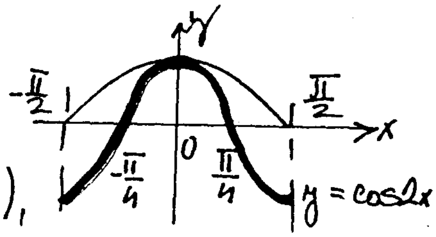
$y = \sin u$

$y' = (\sin u)' = \cos u \cdot u' = \cos 2x \cdot (2x)' = \cos 2x \cdot 2 = 2\cdot\cos 2x$

Ptáme se, kdy $y' > 0$ a $y' < 0$, čili

a) $2\cdot\cos 2x > 0 \quad |:2$

$\cos 2x > 0$



$\cos 2x > 0$ v intervalu $(-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4})$,

v tomto intervalu je derivace $2\cos 2x > 0$, proto v tomto intervalu je daná funkce $y = \sin 2x$ rostoucí (ob. 10).

$\cos 2x < 0$ v intervalech $(-\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{4}), (\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2})$ ... derivace je < 0, proto v těchto intervalech je daná funkce $y = \sin 2x$ klesající.

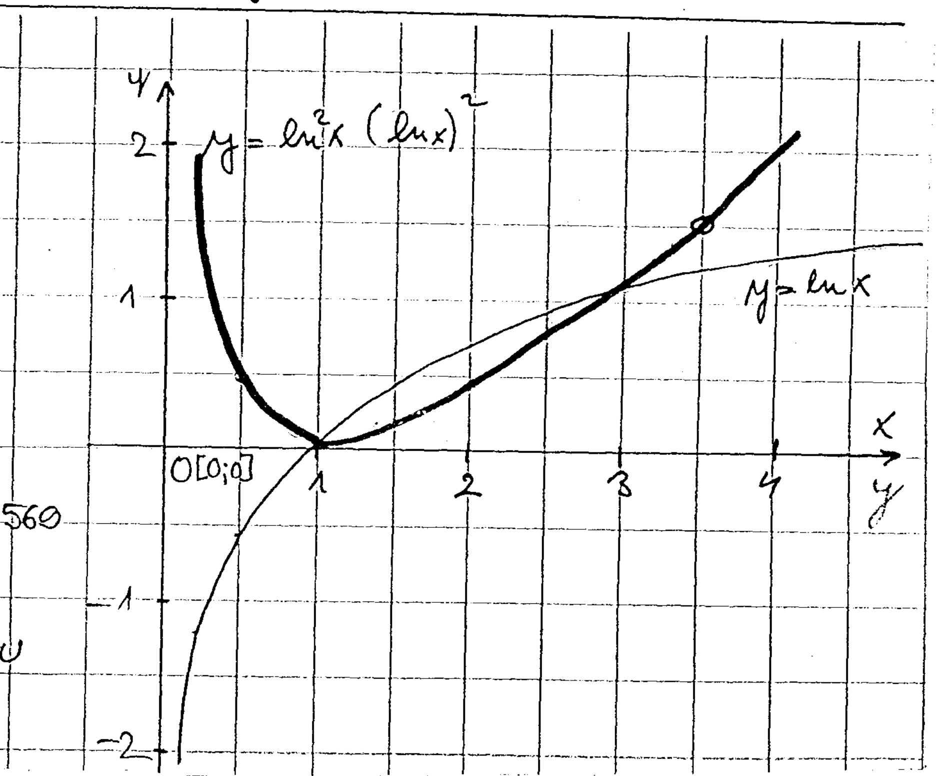
---

c) $y = \ln^2 x$

$(y = (\ln x)^2$

graf jsem provedl pomocí kalkulačky. např. pro $x = 3{,}5$

$\boxed{\ln}$ 3,5 $\boxed{=}$ $\boxed{x^2}$ $\boxed{=}$ 1,560



$y = (\underbrace{\ln x}_{u})^2$, subst. $\ln x = u$

$y' = u^2$

$y' = 2u \cdot u' = 2\ln x \cdot \frac{1}{x} = \frac{2}{x}\ln x$ $\qquad \boxed{y' = \frac{2}{x}\cdot\ln x}$

	$(0;1)$	$(1;+\infty)$
$\frac{2}{x}$	+	+
$\ln x$	−	+
	−	+

$y = \ln^2 x$ je klesající v intervalu $(0;1)$ a rostoucí v intervalu $(1;+\infty)$.

---

d) $y = \sqrt{x} - x \quad \ldots y = x^{\frac{1}{2}} - x$

$y' = (x^{\frac{1}{2}})' - (x)' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - 1$

$$y'' = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}-1} = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{4x^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{4\sqrt{x^3}}$$

$y'' = -\frac{1}{4\sqrt{x^3}} < 0 \Rightarrow$ v bodě x_0, který určíme, dosahuje funkce $y=\sqrt{x}-x$ lokální maximum.

$y' = 0$

$\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - 1 = 0 \quad |\cdot 2$

$x^{-\frac{1}{2}} = 2$

$\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = 2$

$x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$

$(x^{\frac{1}{2}})^2 = (\frac{1}{2})^2$

$x_0 = \frac{1}{4}$, $y_0 = \sqrt{\frac{1}{4}} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

V bodě $x_0 = \frac{1}{4}$ má funkce lokální maximum $y_0 = \frac{1}{4}$.

Pokračování:

Rostoucí pro $y' > 0$

$\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - 1 > 0$

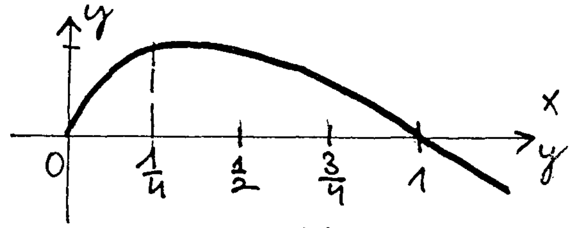
⋮

$x^{\frac{1}{2}} > \frac{1}{2}$

$(x^{\frac{1}{2}})^2 > (\frac{1}{2})^2$

$x > \frac{1}{4}$ ⊘ ... $\frac{1}{4} > 0$ ... klad

$x < \frac{1}{2}$, oblast $D_f \geqq 0$ vzhledem $\sqrt{x}$



Funkce je rostoucí v intervalu $(0;\frac{1}{4})$ a klesající v intervalu $(\frac{1}{4};\infty)$.

Příklad 9: Vyšetřete funkci (její průběh) a načrtněte její graf, je-li

a) $y = \frac{x}{1+x^2}$

$$y' = \frac{(x)'\cdot(1+x^2) - x(1+x^2)'}{(1+x^2)^2} = \frac{1+x^2-x\cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{(1+x)\cdot(1-x)}{(1+x^2)^2}$$

Řešením nerovnice $y' > 0$ zjistíme intervaly, v nichž je funkce rostoucí. Jmenovatel $(1+x^2)^2 > 0$, proto

$$(1+x)(1-x) > 0 \Leftrightarrow (1+x>0 \wedge 1-x>0) \vee (1+x<0 \wedge 1-x<0)$$
$$(x>-1 \wedge -x>-1) \vee (x<-1 \wedge -x<-1)$$
$$(\underbrace{x>-1 \wedge x<1}) \vee (\underbrace{x<-1 \wedge x>1}_{\emptyset})$$

Funkce je rostoucí v int. $(-1;1)$.

Klesající, je-li $(1+x)\cdot(1-x)<0$

$(1+x)\cdot(1-x)<0 \Leftrightarrow (1+x>0 \wedge 1-x<0) \vee (1+x<0 \wedge 1-x>0)$

$(x>-1 \wedge -x<-1) \vee (x<-1 \wedge -x>-1)$

$\underbrace{(x>-1 \wedge x>1)}_{(1;\infty)} \vee \underbrace{(x<-1 \wedge x<1)}_{(-\infty;-1)}$

Funkce je klesající v intervalech $(-\infty;-1)$ a $(1;+\infty)$.

Řešením rovnice $y'=0$ určíme tzv. stacionární body, tj. body, v nichž má funkce lokální extrémy.

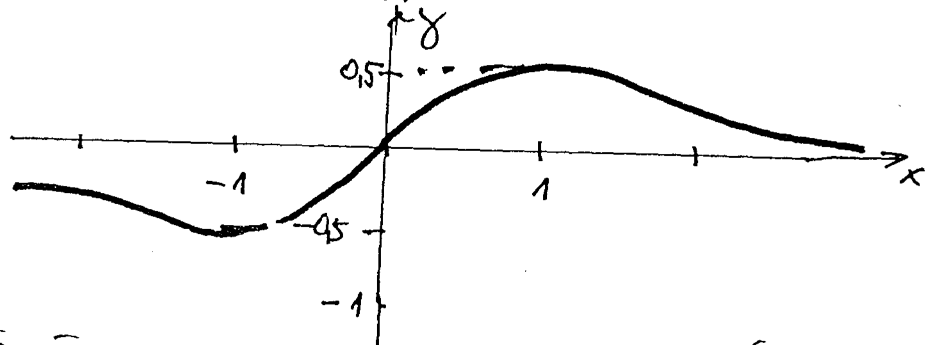
$y'=0$, $\frac{(1+x)\cdot(1-x)}{(1+x^2)^2}=0$ v případě, že čitatel je roven 0.

$(1+x)\cdot(1-x)=0 \Leftrightarrow 1+x=0 \vee 1-x=0$

$\boxed{x=-1} \vee \boxed{x=1}$

Pro $x=-1$ je $y=\frac{-1}{1+(-1)^2}=-\frac{1}{2}$

Pro $x=1$ je $y=\frac{1}{1+1^2}=\frac{1}{2}$



To, že má graf uvedenou podobu (osa x je asymptotou) zjistím pomocí limity:

$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{1+x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{x^2}}{\frac{1}{x^2}+\frac{x^2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}=\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}+1}=\frac{0}{0+1}=0$

$\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{1+x^2}=0$

---

b) $y=4x^2-x^4$ $\quad y'=4x(2-x^2)$

$y'=8x-4x^3$ $\quad y''=8-12x^2$

Určíme stacionární body, v nichž má funkce lok. extrémy.

$y' = 0 \; \dots \; 4x(2-x^2) = 0 \iff 4x = 0 \;\vee\; 2 - x^2 = 0$

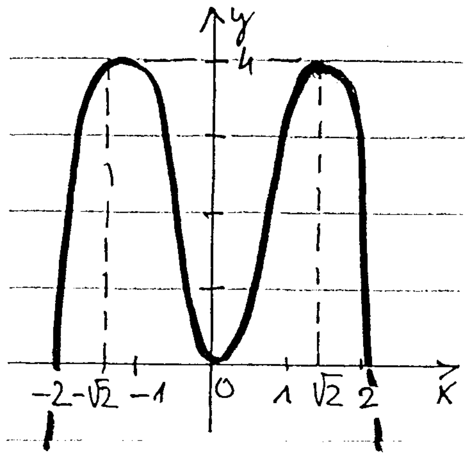
$x = 0 \;\vee\; x^2 = 2$

Existují 3 stac. body: $\boxed{x_1 = 0 \;|\; x_2 = \sqrt{2} \;|\; x_3 = -\sqrt{2}}$

V bodě $x_1 = 0 \dots y_1 = 4 \cdot 0^2 - 0^4 = 0$ $\quad [0;0]$

V bodě $x_2 = \sqrt{2} \dots y_2 = 4 \cdot (\sqrt{2})^2 - (\sqrt{2})^4 = 8 - 2^{\frac{4}{2}} = 8 - 2^2 = 4$

V bodě $x_3 = -\sqrt{2} \dots y_3 = 4 \cdot (-\sqrt{2})^2 - (-\sqrt{2})^4 = 4$



Z grafu vyčteme:

Funkce je rostoucí (viz obr.), klesající,
lok. maximum 4 má v bodech

$x_2 = \sqrt{2}$, $x_3 = -\sqrt{2}$, lokální minimum 0 v bodě $x_1 = 0$.

Příklad 10: Určete hodnoty lokálních extrémů funkce
$y = \sin^3 x + \cos^3 x$ v intervalu $\langle 0; \pi \rangle$.

$y' = 3\sin^2 x \cos x + 3\cos^2 x(-\sin x) = 3\sin^2 x \cos x - 3\sin x \cos^2 x$

$y' = 0$

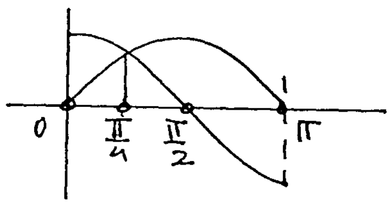
$3\sin^2 x \cos x - 3\sin x \cos^2 x = 0$

$3\sin x \cos x(\sin x - \cos x) = 0 \Leftrightarrow (\sin x = 0) \vee (\cos x = 0) \vee (\sin x = \cos x)$

$\sin x = 0$ je v bodě $0, \pi$

$\cos x = 0$ je v bodě $\frac{\pi}{2}$

$\sin x = \cos x$ je v bodě $\frac{\pi}{4}$



Extrém nemůže nastat v bodech 0 a π, protože jim chybí levé, respektive pravé okolí. Extrém nastane

a) v bodě $\frac{\pi}{4}$, jeho hodnota je $y = (\sin\frac{\pi}{4})^3 + (\cos\frac{\pi}{4})^3 =$

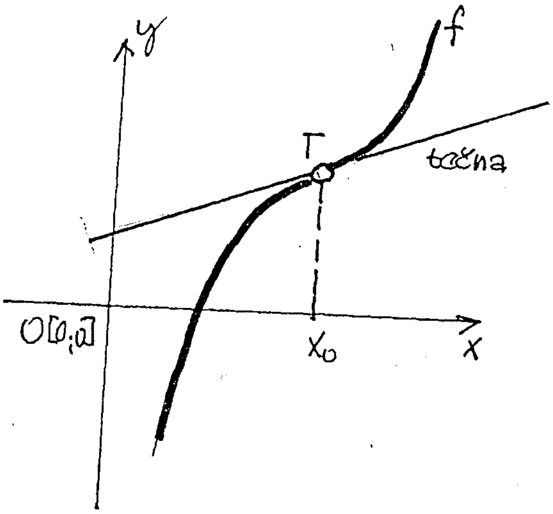
$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 = \frac{(\sqrt{2})^3}{8} + \frac{(\sqrt{2})^3}{8} = \frac{\sqrt{2^3}}{8} + \frac{\sqrt{2^3}}{8} = \frac{2\sqrt{2^3}}{8} = \frac{\sqrt{8}}{4} =$

$= \frac{2\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \doteq \boxed{0{,}707}$.

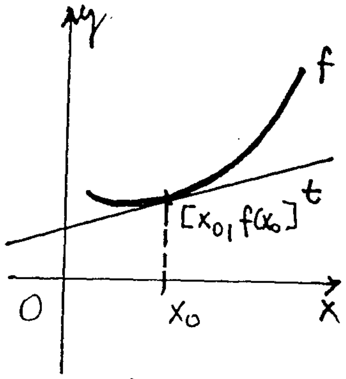
b) v bodě $\frac{\pi}{2}$, jeho hodnota je $y = (\sin\frac{\pi}{2})^3 + (\cos\frac{\pi}{2})^3 = 1^3 + 0^3 = \boxed{1}$

Že jde o lokální minimum $\frac{\sqrt{2}}{2}$ a lokální maximum 1 nebudeme dokazovat pomocí 2. derivace.

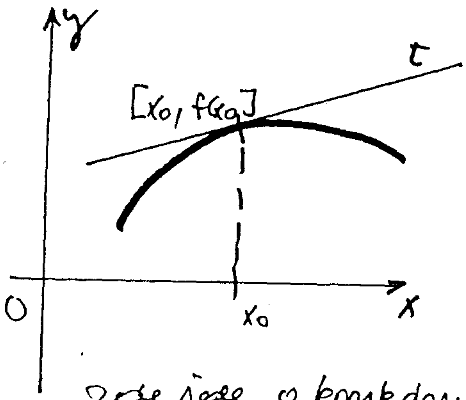
Konvexnost a konkávnost funkce, inflexní bod



Funkce f má dr. mať v bodě x_0 derivaci. V tomto bodě graf funkce přechází z polohy „pod tečnou" do polohy „nad tečnou" (i opačně). Bod x_0 se nazývá inflexní bod.



Tato funkce má v bodě x_0 derivaci. V bodě $[x_0, f(x_0)]$ je tato funkce konvexní (graf je nad tečnou)



Zde jde o konkávní funkci v bodě $[x_0, f(x_0)]$ (graf je pod tečnou)

Je-li funkce konvexní v každém bodě intervalu I, je konvexní / v intervalu I
" " konkávní " " " I, je konkávní v intervalu I.

Jinak řečeno: Věta 1:
Je-li $f''(x) > 0$ v $\forall x \in I$, pak je f. konvexní v intervalu I.
" $f''(x) < 0$ –"– –"– f. konkávní –"– .

Příklad 11: (4.27/116 uč.)e) Určete intervaly, v nichž funkce $f: y = -\frac{2x}{1+x^2}$ je konvexní či konkávní.

$y = \frac{-2x}{1+x^2}$, $y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$$y' = \frac{(-2x)' \cdot (1+x^2) - (-2x) \cdot (1+x^2)'}{(1+x^2)^2} = \frac{-2 \cdot (1+x^2) + 2x\,(0+2x)}{(1+x^2)^2} =$$

$$= \frac{-2 - 2x^2 + 4x^2}{(1+x^2)^2} \; \dots \; \boxed{y' = \frac{2x^2 - 2}{(1+x^2)^2}}$$

vytknu

$$y'' = \frac{(2x^2-2)' \cdot (1+x^2)^2 - (2x^2-2) \cdot [(1+x^2)^2]'}{(1+x^2)^4} = \frac{4x\,(1+x^2)^2 - (2x^2-2) \cdot 2 \cdot (1+x^2) \cdot 2x}{(1+x^2)^4}$$

$$= \frac{(1+x^2) \cdot [4x \cdot (1+x^2) - (2x^2-2) \cdot 4x}{(1+x^2)^4} = \frac{4x + 4x^3 - 8x^3 + 8x}{(1+x^2)^3} \; \dots \; y'' = \frac{12x - 4x^3}{(1+x^2)^3}$$

$$= \boxed{y'' = \frac{4x(3-x^2)}{(1+x^2)^3}}$$ a podle věty (16) 1 platí:

$y'' = 0$ ... nulové body

$$\frac{4x(3-x^2)}{(1+x^2)^3} = 0 \Leftrightarrow 4x = 0 \ \vee \ (3-x^2) = 0$$

$$x = 0 \ \vee \ x^2 = 3$$

$$\boxed{x=0} \ \vee \ \boxed{x = \pm\sqrt{3}}$$

-2 $\quad -\sqrt{3}$ $\quad -1$ $\quad 0$ $\quad 1$ $\quad \sqrt{3}$ $\quad 2$ — pomocné body

	$(-\infty;-\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3};0)$	$(0;\sqrt{3})$	$(\sqrt{3};\infty)$
y''	$\frac{4x(3-x^2)^3}{(1+x^2)^3}$			
	$y'' = \frac{-\cdot-}{+}$	$y'' = \frac{-\cdot+}{+}$	$y'' = \frac{+\cdot+}{+}$	$y'' = \frac{+\ -}{+}$
	$+$	$-$	$+$	$-$
	$y'' > 0$	$y'' < 0$	$y'' > 0$	$y'' < 0$

jsou jen pomocné symbolické zápisy

V intervalech $(-\infty;-\sqrt{3})$ a $(0;\sqrt{3})$ je daná funkce konvexní.
" $(-\sqrt{3};0)$ a $(\sqrt{3};\infty)$ " " " konkávní.

Úka

Příklad 12 (4.27d/116-uč):

$$y = \frac{2x+5}{x-3} \ \ldots \ y' = \frac{(2x+5)'\cdot(x-3) - (2x+5)\cdot(x-3)'}{(x-3)^2} = \frac{2(x-3) - (2x+5)\cdot 1}{(x-3)^2} =$$

$$= \frac{2x-6-2x-5}{(x-3)^2} \ \ldots \ \boxed{y' = \frac{-11}{(x-3)^2}}$$

$$y'' = \frac{(-11)'\cdot(x-3)^2 - (-11)\left[(x-3)^2\right]'}{(x-3)^4} = \frac{0 + 11\left[2(x-3)^1\cdot 1\right]}{(x-3)^4} = \frac{11\cdot(2x-6)}{(x-3)^4} =$$

$$= \frac{11\cdot 2(x-3)}{(x-3)^4} \ \ldots \ y'' = 0$$

$$\frac{22(x-3)}{(x-3)^4} = 0 \Leftrightarrow x-3 = 0$$

$$x = 3$$

Čísla $x=3$ se však nesmí rovnat.

2 $\quad 3$ $\quad 4$

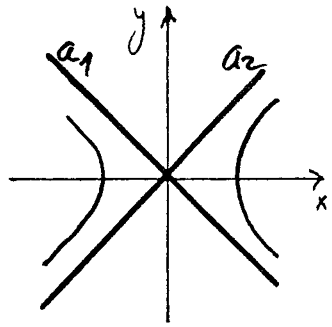
$(-\infty;3)$ $\quad (3;\infty)$

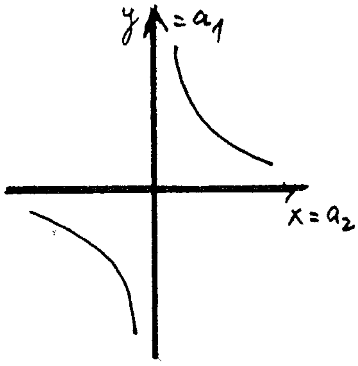
V intervalu $(-\infty;3)$ je funkce konkávní, v $(3;\infty)$ je konvexní. (což odpovídá mysl. v náčrtu.)

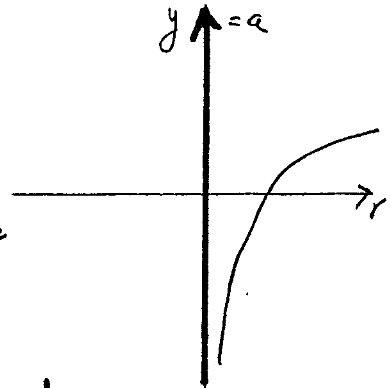
$$y'' = \frac{+\ -}{+} \Rightarrow - \qquad y'' = \frac{+\ +}{+} \Rightarrow +$$

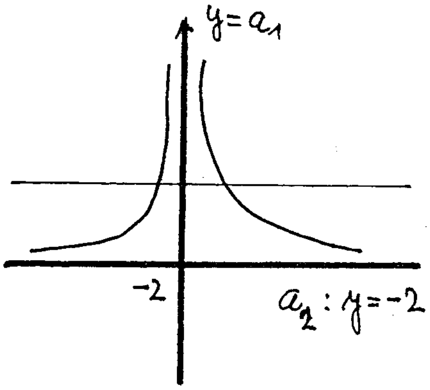
Asymptoty a jejich rovnice

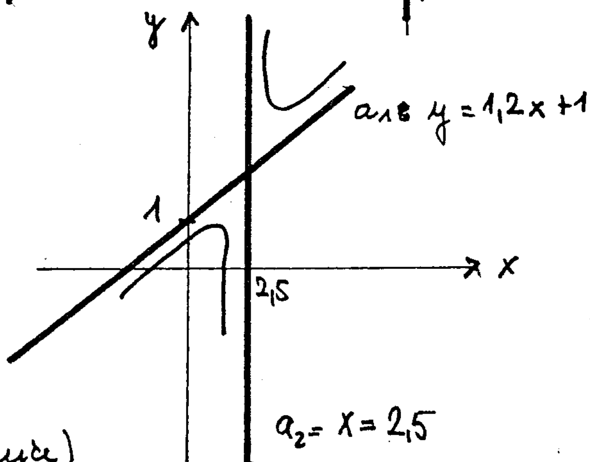
Ukázka asymptot











Příklad 13: Vypočítejte (určete rovnice) asymptot funkce f, je-li: $f: y = \frac{x^3}{2(x+1)^2}$.

Existují dva druhy asymptot:

a) přímky bez směrnice, např. $x = 2$ $(x = 0,\ x = -3$, obecně $x = c)$, $c \parallel y$.

b) přímky $y = ax + b$ $(y = kx + q)$ se směrnicí $\underline{a}$. Platí:

$\boxed{\text{Věta}}$: Přímka $y = ax + b$ je asymptotou grafu funkce $f \Leftrightarrow$ existuje-li $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = a$ $(a \in R)$ $\wedge$ $\lim\limits_{x \to \infty} [f(x) - ax] = b$

nebo $x \to -\infty$ $\qquad x \to -\infty$

1) Daná funkce není definována pro $x = -1$. Položíme si otázku, respektive čemu se rovná limita dané funkce, když $x \to -1^+$ (zprava), $x \to -1^-$ (zleva)

$\downarrow \qquad \downarrow$

abychom zjistili znaménko (+) nebo (−) dosadíme si např. za x číslo $+0{,}5$ (zprava) a $-1{,}5$ (zleva)

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{x^3}{2(x+1)^2} = \cdots \frac{(-0{,}5)^3}{2\cdot(0{,}5+1)^2} \cdots \frac{-}{+} \to (-)$$

$$\to -\infty$$

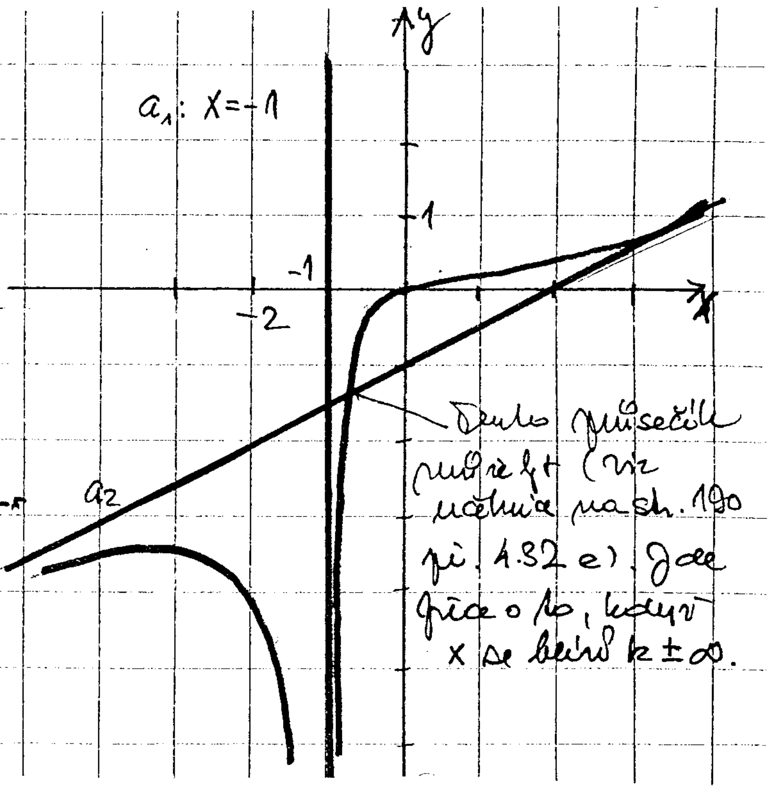
$$\lim_{x\to -1^-} \frac{x^3}{2(x+1)^2} = \cdots \frac{(-1{,}5)^3}{2\cdot(-1{,}5+1)^2} \cdots \frac{-}{+} = (-)$$

$$\to = -\infty$$

Jestliže $\lim\limits_{x\to -1^+} \frac{x^3}{2(x+1)^2} = -\infty$

$\lim\limits_{x\to -1^-} \frac{x^3}{2(x+1)^2} = -\infty$ $\Rightarrow$ asymptotou je přímka a_1 s rovnicí $\boxed{x=-1}$

2) Uplatníme větu ze str. 18



I. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{x^3}{2(x+1)^2}}{\frac{x}{1}} =$

$= \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2}{2(x+1)^2} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2}{2x^2+4x+2} =$

$= \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2}{x^2}}{\frac{2x^2}{x^2}+\frac{4x}{x^2}+\frac{2}{x^2}} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{2+\frac{4}{x}+\frac{2}{x^2}} =$

$= \frac{1}{2+0+0} = \boxed{\frac{1}{2} = a}$, dosadíme:

II. $\lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - ax] =$

$= \lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x^3}{2(x+1)^2} - \frac{1}{2}x\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^3 - x(x+1)^2}{2(x+1)^2} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{-2x^2-x}{2(x-1)^2} =$

$= \lim\limits_{x\to\infty} \frac{-2-\frac{1}{x}}{2+\frac{4}{x}+\frac{2}{x^2}} = \frac{-2-0}{2+0+0} = \boxed{-1 = b}$ $\quad a_2$: $\boxed{y = \frac{1}{2}x - 1}$

Příklad 14: Určete asymptoty funkce $y = 3x + \frac{3}{x-2}$.

$D_f = R - \{2\}$, proto platí:

1) $\lim\limits_{x \to 2^+} \left(3x + \frac{3}{x-2}\right) = \lim\limits_{x \to 2^+} \frac{3x^2-6x+3}{x-2}$ (dosadíme např. $x = 2{,}5$) $= +\infty$

$\lim\limits_{x \to 2^-} \frac{3x^2-6x+3}{x-2}$ (dosadíme např. $x = 1{,}5$) $= -\infty$

$\ldots \frac{3 \cdot 1{,}5^2 - 6 \cdot 1{,}5 + 3}{1{,}5-2} = \frac{0{,}75}{-0{,}5} \ldots \frac{+}{-} = -\infty$

Z toho plyne, že asymptotou je přímka s rovnicí $\boxed{x=2}$ a_1.

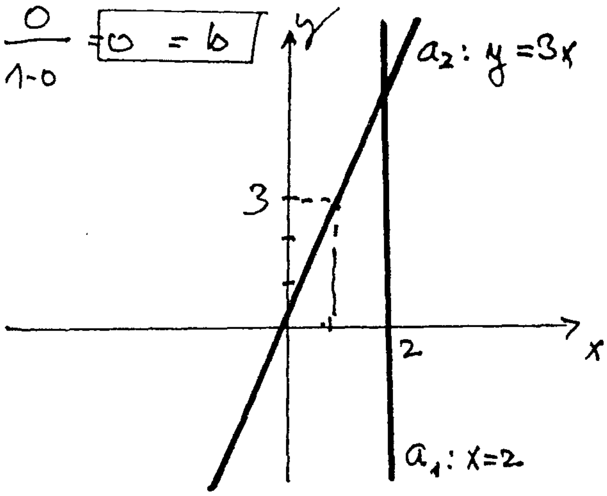
2) I. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(3x - \frac{3}{x-2}\right) = \lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{3x}{x} - \frac{\frac{3}{x}}{\frac{x}{x} - \frac{2}{x}}\right) = \lim\limits_{x \to \infty} \left(3 - \frac{\frac{3}{x}}{1 - \frac{2}{x}}\right) =$

$= 3 - \frac{0}{1-0} = \boxed{3 = a}$

II. $\lim\limits_{x \to \infty} [f(x) - ax] = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{3x^2-6x+3}{x-2} - 3x = \lim \frac{3x^2-6x+3-3x^2+6x}{x-2} =$

$= \lim\limits_{x \to \infty} \frac{3}{x-2} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{\frac{3}{x}}{\frac{x}{x} - \frac{2}{x}} = \frac{0}{1-0} = \boxed{0 = b}$

$y = 3x + 0 \ldots \boxed{y = 3x}$ a_2



Učivo o asymptotách jsme probrali z toho důvodu, že zjišťování rovnic asymptot můžeme uplatnit i při vyšetřování průběhu funkce. O tom je pojednáno v učebnici na str. 117, následující text je opsán z této strany.

Postup při kompletním vyšetřování průběhu funkce

1. Definiční obor, funkce sudá, lichá, periodická.
2. Body, ve kterých není funkce definována, ale má v nich jednostranné limity, výpočet těchto limit, limity v nevlastních bodech, intervaly spojitosti.
3. Průsečíky s osami x, y, znaménka funkčních hodnot.
4. Výpočet 1. derivace, nulové body 1. derivace a body, ve kterých není definována 1. derivace.
5. Lokální extrémy, intervaly monotónnosti.
6. Výpočet 2. derivace, nulové body 2. derivace a body, ve kterých není definována 2. derivace.
7. Inflexní body, intervaly konvexnosti a konkávnosti.
8. Asymptoty.
9. Obor hodnot.
10. Graf funkce.

Příklad 15 (4.32d/123-uč.): Vyšetřete průběh funkce $y=\frac{1-x^3}{x^2}$.

1) $y=\frac{1-x^3}{x^2}$, $D_f=R-\{0\}$

$f(-x)\neq f(x)$ ... např. $f(1)\ldots y=\frac{1-1^3}{1^2}=0$, $f(-1)\ldots y=\frac{1-(-1)^3}{(-1)^2}=2$ $\Rightarrow$ daná funkce není sudá.

$f(x)\neq -f(x)$ ... např. $f(-1)=2$, $-f(1)=0$ $\Rightarrow$ daná funkce není lichá. A není ani periodická.

2) Funkce není definována v bodě $x=0$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1-x^3}{x^2}=+\infty \ldots \text{např. pro } x=0{,}5 \text{ je } y=\frac{1-0{,}5^3}{0{,}5^2}=\frac{+}{+}=+$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{1-x^3}{x^2}=+\infty \ldots \text{např. pro } x=-0{,}5 \text{ je } y=\frac{1-(-0{,}5)^3}{(-0{,}5)^2}=\frac{+}{+}=+$$

$\Downarrow$ asymptota a: $\boxed{x=0}$

Limity v nevlastních bodech:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1-x^3}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{x^3}{x_2}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^2}-x\right)\ldots \text{„}0-\infty\text{"}=-\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1-x^3}{x^2}=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x^2}-x\right)\ldots \text{„}0-(-\infty)=+\infty\text{"}\ldots=+\infty$$

---

3) Průsečík s osou x ... $y=0$

$$\frac{1-x^3}{x^2}=0 \iff 1-x^3=0 \qquad x^3=1 \qquad x=\sqrt[3]{1} \qquad x=1$$

Graf protne osu x v bodě $[1;0]$. Osu y graf neprotíná (ta je asymptotou).

Monotónnost funkce v intervalech

$(-\infty;0)$, bod -1	$(0;1)$, bod $0{,}5$	$(1;\infty)$, bod 2
$y=\frac{1-x^3}{x^2}\ldots$	např. pro $x=0{,}5$	např.
$y=\frac{-1-(-1)^3}{(-1)^2}=\ldots\frac{+}{+}=+$	$y=\frac{1-(0{,}5)^3}{0{,}5^2}\ldots\frac{+}{+}=+$	$y=\frac{1-2^3}{2^2}=\frac{-}{+}=-$

---

4) $$y'=\left(\frac{1-x^3}{x^2}\right)'=\frac{(1-x^3)'\cdot x^2-(1-x^3)\cdot(x^2)'}{x^4}=\frac{-3x^2\cdot x^2-(1-x^3)\cdot 2x}{x^4}=$$

$$=\frac{-3x^4-2x+2x^4}{x^4}=\frac{-x^4-2x}{x^4}=\frac{-x(x^3+2)}{x^4}=-\frac{x^3+2}{x^3}\ \ldots\ \boxed{y'=-\frac{x^3+2}{x^3}}$$ 1. derivace

1. derivace není definována v bodě $x=0$

Stac. body:

$$y'=0\ \ldots\ -\frac{x^3+2}{x^3}=0$$

$$-\left(\frac{x^3}{x^3}+\frac{2}{x^3}\right)=0$$

$$-1-\frac{2}{x^3}=0$$

$$-\frac{2}{x^3}=1$$

$$x^3=-2$$

$$x=\sqrt[3]{-2}$$

$$\boxed{x=-\sqrt[3]{2}}$$ cca $-1{,}26$

Nulové body: $-\sqrt[3]{2}$, 0

$(-\infty;-\sqrt[3]{2})$	$(-\sqrt[3]{2};0)$	$(0;+\infty)$
-2	-1	2
$-\frac{x^3+2}{x^3}$ $-\frac{-8+2}{-8}\dots-\frac{-6}{-8}$ $\frac{+}{-}=(-)$	$-\frac{-1+2}{-1}=-\frac{+1}{-1}\dots$ $\frac{-}{-}=(+)$	$-\frac{+8+2}{+8}=-\frac{+}{+}=(-)$
V $(-\infty;-\sqrt[3]{2})$ je funkce klesající	V $(-\sqrt[3]{2};0)$ je funkce rostoucí	V $(0;+\infty)$ je funkce klesající

jsou intervaly monotónnosti

5) Extrém: $y'=0$ je v bodě $x=-\sqrt[3]{2}$. Hodnota extrému je:

$$y=\frac{1-x^3}{x^2}=\frac{1-(-\sqrt[3]{2})^3}{(-\sqrt[3]{2})^2}=\frac{1-(-2^{\frac{1}{3}})^3}{(\sqrt[3]{2})^2}=\frac{1+2}{\sqrt[3]{2^2}}=\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$$

V bodě $x=-\sqrt[3]{2}$ má funkce lokální extrém $\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$. Zda jde o max. nebo min. rozhodneme pomocí druhé der.

6) $$y''=\frac{(x^3+2)'\cdot x^3-(x^3+2)(x^3)'}{x^6}=\frac{3x^2\cdot x^3-(x^3+2)\cdot 3x^2}{x^6}=$$

$$=\frac{3x^5-3x^5+6x^2}{x^6}=\frac{6x^2}{x^6}\dots\boxed{y''=\frac{6}{x^4}}$$

y'' v bodě $-\sqrt[3]{2}$ je $\frac{6}{(-\sqrt[3]{2})^4}=\frac{6}{\sqrt[3]{2^4}}>0 \Rightarrow$ Lokálním extrémem je lokální minimum.

7) Inflexní bod najdeme takto:

$y''=0$ $\quad \frac{6}{x^4}=0 \to 6=0\cdot x^4 \to 6=0$ nemá řešení $\Rightarrow$ inflexní bod neexistuje.

8) V bodě $x=0$ má funkce asymptotu $\boxed{a_1: x=0}$

Asymptotu typu $y=ax+b$ určíme jako na str. 19.

I $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=l.\frac{\frac{1-x^3}{x^2}}{\frac{x}{1}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1-x^3}{x^3}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^3}-\frac{x^3}{x^3}=$

$= \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x^3} - 1 = 0 - 1 = -1$ $\boxed{a=-1}$

$\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x)-ax\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1-x^3}{x^2} + x = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1-x^3+x^3}{x^2} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} = 0$

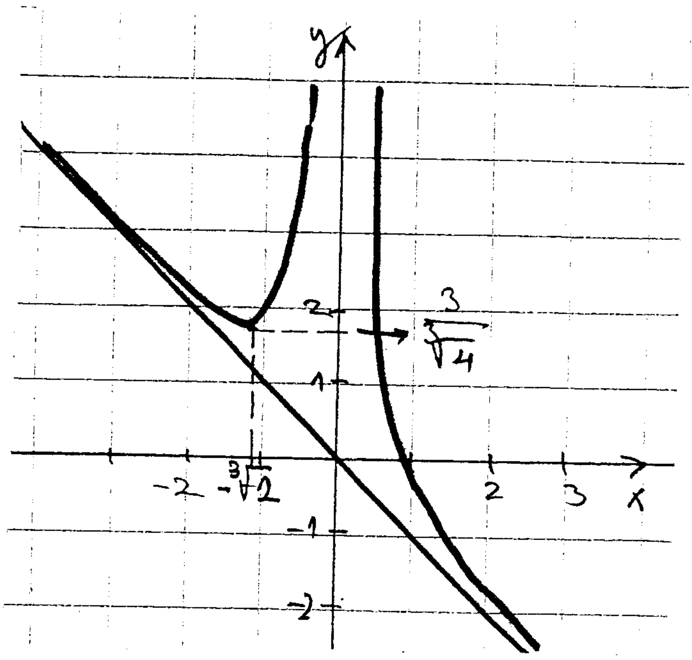
$\boxed{b=0}$ $y=ax+b \dots y=-1x+0 \dots \boxed{y=-x}$

---

9) Obor hodnot v $D_f = R-\{0\}$ je $H_f = R$

---

10)



Další podobné úlohy lze studovat v učebnici na str. 118 a další.

Příklad 16: Vyšetřete průběh funkce $y = \frac{x^3}{6x-12}$

1) $D_f = R - \{2\}$

Je sudá? Nejsou.

pro $x = 1$ je $f(1) = \frac{1^3}{6\cdot 1 - 12} = \frac{1}{-6} = -\frac{1}{6}$

pro $x = -1$ je $f(-1) = \frac{(-1)^3}{6\cdot(-1)-12} = \frac{-1}{-6-12} = \frac{1}{18}$

$f(-x) \neq f(x) \Rightarrow$ funkce není sudá

Je lichá? Platí, že $f(-x) = -f(x)$

nejsou. pro $x=1$, $f(1) = -\frac{1}{6}$

$x=-1$, $f(-1) = \frac{1}{18}$

$-f(1) = \frac{1}{6}$

$\neq$

$f(-x) \neq -f(x) \Rightarrow$ funkce není lichá

---

2) $\lim\limits_{x\to 2^+} \frac{x^3}{6x-12} = +\infty$ $\left(\frac{+}{+} \to \oplus\right)$ dosaď $x>2$

$\lim\limits_{x\to 2^-} \frac{x^3}{6x-12} = -\infty$ $\left(\frac{+}{-} \Rightarrow \ominus\right.$, dosaď $x<2$

$\Rightarrow$ asymptotou je přímka $x=2$.

Funkce v intervalu $(-\infty, 2)$ je spojitá, pro každé $x \in (-\infty, 2)$ existuje $f(x)$

—"— —"— $(2, +\infty)$ je spojitá —"— $(2, +\infty)$ —"— $f(x)$

---

3) Průsečík s osou x ... $y=0$

$\frac{x^3}{6x-12} = 0$

$x^3 = 0$

$x = 0$

graf protíná osu x v bodě $x=0$.

Průsečík s osou y ... $x=0$

$y = \frac{0^3}{6\cdot 0 - 12} = 0$

graf protíná osu y v bodě $y=0$

$\Rightarrow$ graf prochází počátkem soustavy souřadnic.

	$(-\infty, 0)$	$(0, 2)$	$(2, +\infty)$
	-1	1	3
$y = \frac{x^3}{6x-12}$	$\frac{-}{-}$ $\oplus$	$\frac{+}{-}$ $\ominus$	$\frac{+}{+}$ $\oplus$
	kladné hodn.	záporné h.	kladné hodnoty funkce

4) $$y' = \frac{(x^3)'\cdot(6x-12) - x^3(6x-12)'}{(6x-12)^2} = \frac{3x^2(6x-12) - x^3\cdot 6}{(6x-12)^2} = \frac{18x^3-36x^2-6x^3}{(6x-12)^2}$$

$$\frac{12x^3-36x^2}{(6x-12)^2} = \frac{12x^2(x-3)}{(6x-12)^2} \Leftrightarrow \quad 12x^2=0 \quad \vee \quad x-3=0$$

$$\boxed{x=0} \quad \vee \quad \boxed{x=3}$$

Pomocí nulových bodů a jim příslušných intervalů rozhodneme, ve kterých intervalech je funkce rostoucí či klesající. Navíc musíme vzít i bod $\boxed{x=2}$, jímž prochází asymptota.

	$(-\infty,0)$	$(0;2)$	$(2;3)$	$(3,+\infty)$
y'....	$\frac{+\cdot -}{+}$ $\ominus$	$\frac{+\cdot -}{+}$ $\ominus$	$\frac{+\cdot -}{+}$ $\ominus$	$\frac{+\cdot +}{+}$ $\oplus$
Funkce je	klesající	klesající	klesající	rostoucí

Funkce není definována v bodě $x=2$.

5) Extrém je v bodě $x=3$

$$y = \frac{x^3}{6x-12} = \frac{27}{18-12} = \frac{27}{6} = 4{,}5 \qquad [3;4{,}5]$$

Že jde o minimum vyplývá též z toho, že v intervalu $(2;3)$ funkce klesá a v intervalu $(3,\infty)$ roste.

V bodě $[3;4{,}5]$ má funkce lokální minimum.

Intervaly monotónnosti jsou vypsány v tabulce (viz úloha 4)

6) $$y'' = \left(\frac{12x^3-36x^2}{(6x-12)^2}\right)' = \frac{(36x^2-72x)\cdot(6x-12)^2 - (12x^3-36x^2)\cdot 2\cdot(6x-12)\cdot 6}{(6x-12)^4}$$

$$= \frac{(6x-12)[(36x^2-72x)\cdot(6x-12) - 12(12x^3-36x^2)]}{(6x-12)^4} =$$

$$= \frac{(36x^2-72x)\cdot(6x-12) - 12(12x^3-36x^2)}{(6x-12)^3} = \frac{216x^3 - \cancel{432x^2} - 432x^2 + 864x - 144x^3 + \cancel{432x^2}}{(6x-12)^3} =$$

$$= \frac{72x^3-432x^2+864x}{(6x-12)^3} = \frac{72(x^3-6x^2+72x)}{6(x-12)\cdot 6(x-12)\cdot 6(x-12)} =$$

$$= \frac{72(x^3-6x^2+72x)}{216(x-12)^3} = \boxed{\frac{x^3-6x^2+72x}{3(x-2)^3} = y''} = \boxed{\frac{x(x^2-6x+72)}{3(x-2)^3}} = y''$$

$y''=0 \Leftrightarrow x^3-6x^2+12x \Rightarrow \boxed{x=0}$ ... inflexní bod

	$(-\infty,0)$	$(0;2)$	$(2,+\infty)$
y''	$\frac{-+}{-}=+$	$\frac{+\ +}{-}=-$	$\frac{+\ +}{+}=+$
	$y''>0$	$y''<0$	$y''>0$

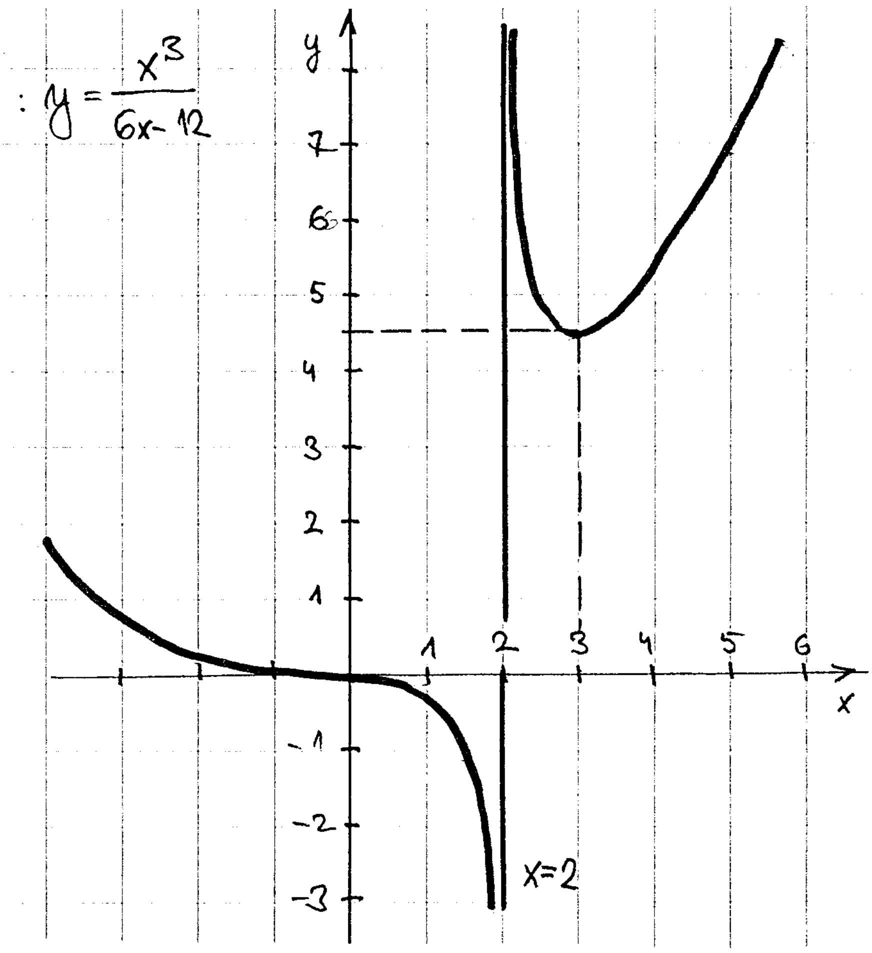
Funkce je v těchto intervalech:
konvexní   konkávní   konvexní

---

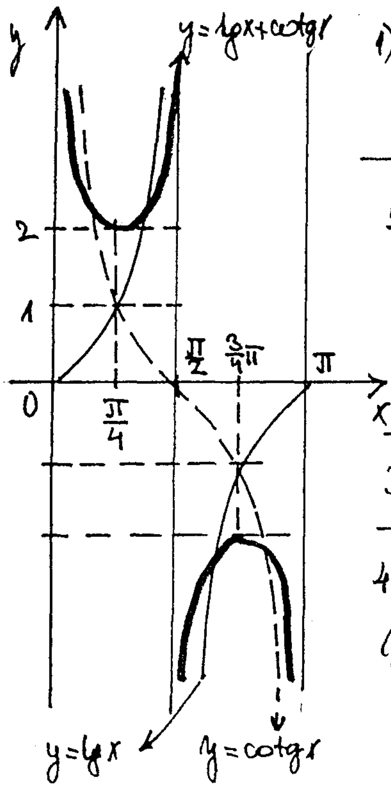
8) asymptotou je přímka daná rovnicí $x=2$.

9) $H_f=R$

10) graf: $y=\frac{x^3}{6x-12}$



Příklad 17: Určete průběh funkce $y = \mathrm{tg}\,x + \mathrm{cotg}\,x$ v $\langle 0, \pi \rangle$



1) D_f: $x \in R$, $x \neq 0, \frac{\pi}{2}, \pi$, je lichá (souměrná podle středu $[\frac{\pi}{2}; 0]$ a periodická.

2) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^+} (\mathrm{tg}\,x + \mathrm{cotg}\,x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} (\mathrm{tg}\,x + \mathrm{cotg}\,x) = +\infty$

} asymptotou je přímka: $x = \frac{\pi}{2}$

3) Průsečíky s osami x, y neexistují

4) Monotónnost lze vyčíst z grafu nebo určit pomocí 1. derivace:

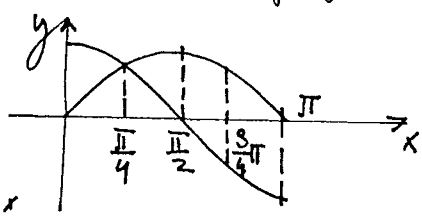
$$y' = (\mathrm{tg}\,x + \mathrm{cotg}\,x)' = \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x} = \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x}$$

$y' = 0 \Leftrightarrow \sin^2 x - \cos^2 x = 0$

$\sin^2 x = \cos^2 x$

$\sin x = \pm \cos x$

Nakreslíme si graf:



V bodě $x = \frac{\pi}{4}$ platí, že $\sin x = \cos x$

$x = \frac{3}{4}\pi$ platí, že $\sin x = -\cos x$

V intervalu $(0, \frac{\pi}{4})$ ... je funkce klesající

$(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$ ... " rostoucí

$(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{4}\pi)$ ... " rostoucí

$(\frac{3}{4}\pi, \pi)$ ... " klesající

V intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$ je funkce konvexní

$(\frac{\pi}{2}, \pi)$ " " konkávní

2. derivace je na další straně, avšak není třeba ji dělat, postačí graf. Výpočet y'' je dost pracný.

$$y'' = \left(\frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x}\right)' \ldots \text{jako podíl..} \quad \frac{(\sin^2 x - \cos^2 x)' \cdot \sin^2 x \cos^2 x - (\sin^2 x - \cos^2 x) \cdot (\sin^2 x \cos^2 x)'}{\sin^4 x \cos^4 x} \rightarrow \text{jako součin}$$

$$y'' = \frac{[2\sin x \cos x - (2 \cdot \cos x \cdot (-\sin x)] \cdot \sin^2 x \cos^2 x - (\sin^2 x - \cos^2 x) \cdot [2 \cdot \sin x \cos \cdot \cos^2 x - \sin^2 x \cdot 2 \cdot \cos x \cdot (-\sin x)]}{(\sin x \cos x)^4} =$$

$$y'' = \frac{(2\sin x \cos x + 2\sin x \cos x) \cdot \sin^2 x \cos^2 x - (\sin^2 x - \cos^2 x) \cdot (2\sin x \cos^3 x + 2\cos x \sin^3 x)}{(\sin x \cos x)^4} =$$

$$y'' = \frac{4\sin x \cos x \cdot \sin^2 x \cos^2 x - (\sin^2 x - \cos^2 x) \cdot 2\sin x \cos x \overbrace{(\cos^2 x + \sin^2 x)}^{=1}}{(\sin x \cos x)^4}$$

$$y'' = \frac{4\sin x \cos x \cdot \sin^2 x \cos^2 x - (\sin^2 x - \cos^2 x) \cdot 2\sin x \cos x}{(\sin x \cos x)^4} \text{, vytkneme}$$

$$y'' = \frac{(\cancel{\sin x \cos x}) \cdot (4 \cdot \sin^2 x \cos^2 x) - (\sin^2 x - \cos^2 x) \cdot 2}{(\sin x \cos x)^{\cancel{4}\,3}} = \frac{4\sin^2 x \cos^2 x - 2\,[\sin^2 x - (1 - \sin^2 x)]}{(\sin x \cos x)^3} \rightarrow$$

$$= \frac{4\sin^2 x \cos^2 x - 2\,(\sin^2 x - 1 + \sin^2 x)}{(\sin x \cos x)^3} = \frac{4\sin^2 x \cos^2 x - 2\,(2\sin^2 x - 1)}{(\sin x \cos x)^3} = \boxed{\frac{4\sin^2 x \cos^2 x - 4\sin^2 x + 2}{(\sin x \cos x)^3}} \text{ což je 2. derivace}$$

Výpočet extrémů:

v bodě $\boxed{x = \frac{\pi}{4}}$ je

$y = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} + \operatorname{cotg} \frac{\pi}{4} =$

$= 1 + 1 = \boxed{2} \ldots$

... lokální minimum

v bodě $\boxed{x = \frac{3}{4}\pi}$ je

$y = \operatorname{tg} \frac{3}{4}\pi + \operatorname{cotg} \frac{3}{4}\pi =$

$= -1 - 1 = \boxed{-2} \ldots$

... lokální maximum.

29