7a) $\boxed{\text{MATEMATICKÁ INDUKCE}}$

Pomocí matematické indukce dokazujeme matematickou větu: „Pro každé přirozené číslo n platí vlastnost $V(n)$."

I. KROK: Vlastnost $V(n)$ dokážeme pro $n=1$.

II. KROK: Předpokládáme, že vlastnost $V(n)$ platí pro libovolné přirozené číslo k. Dokážeme-li, že platí i pro jeho následovníka $(k+1)$, pak vlastnost $V(n)$ platí pro všechna přirozená čísla.

Jinak řečeno musíme dokázat platnost věty: „Jestliže platí $V(k)$, pak platí i $V(k+1)$."

Příklad 1 (1.22 a/34 učebnice): Dokažte matematickou indukcí, že pro všechna přirozená čísla n platí

a) $2+4+6+\dots+2n = n(n+1)$

b) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\dots+\frac{1}{n(n+1)} = 1-\frac{1}{n+1}$

Řešení a)

$$\underbrace{\underbrace{2+4+6+\dots+2n}_{L} = \underbrace{n\cdot(n+1)}_{P}}_{V(n)}$$

I. Pro $n=1$: $\left.\begin{array}{l} L=2 \\ P=1\cdot(1+1)=2 \end{array}\right\} \Rightarrow L=P$ ... $V(n)$ platí pro $n=1$

II. $\forall k\in N: \; V(k) \Rightarrow V(k+1)$ ... čili jde o větu: „Jestliže vlastnost platí pro k, pak platí i pro $(k+1)$, kde $k\in N$. Tuto větu zapíšeme:

$$\forall k\in N: \; \underbrace{2+4+6+\dots+2k}_{S_k} = \underbrace{k\cdot(k+1)}_{S_k} \Rightarrow 2+4+6+\dots+2k+\underbrace{2k+2} = (k+1)\cdot(k+1+1)$$

přidáme další sudé číslo, které následuje po čísle $2k$.

$$\underbrace{2+4+6+\dots+2k=k(k+1)} \Rightarrow 2+4+6+\dots+2k+2k+2 = \underbrace{(k+1)\cdot(k+2)}$$

a k tomuto výsledku musíme dospět pro S_{k+1}.

$S_{k+1} = S_k +$ další člen posloupnosti … $S_{k+1} = S_k + 2k+2 = k(k+1)+2k+2 =$
$= k(k+1)+2(k+1) = (k+1)\cdot(k+2)$

$V(n)$… $2+4+6+\dots 2n = n(n+1)$ platí proto pro všechna $n \in N$.

Řešení b: $$\underbrace{\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\dots+\frac{1}{n(n+1)}}_{L} = \underbrace{1-\frac{1}{n+1}}_{P}$$ Jonáš

I. Pro $n=1$: $L = \frac{1}{1(1+1)} = \frac{1}{2}$

$P = 1 - \frac{1}{1+1} = 1-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ } $L=P$ … $V(n)$ platí pro $n=1$.

II. Pokusíme se dokázat platnost věty $V(k) \Rightarrow V(k+1)$. Tuto větu rozepíšeme:

$$\underbrace{\overbrace{\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\dots+\frac{1}{k(k+1)}}^{S_k} = \overbrace{1-\frac{1}{k+1}}^{S_k}}_{\text{předpoklad}} \Rightarrow$$

$$\underbrace{\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\dots+\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(k+1)\cdot\underbrace{(k+1+1)}_{k+2}} = 1-\frac{1}{\underbrace{k+1+1}_{k+2}}}_{\text{závěr}}$$

$$\underbrace{\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\dots+\frac{1}{k(k+1)}}_{S_k}+\underbrace{\frac{1}{(k+1)\cdot(k+2)}}_{\text{je další člen posloupnosti}} = \boxed{1-\frac{1}{k+2}}$$

na tento tvar upravíme předpoklad, neboť S_{k+1}

$S_{k+1} = S_k +$ další člen posloupnosti.

$$S_{k+1} = S_k + \frac{1}{(k+1)\cdot(k+2)} = \underbrace{1-\frac{1}{k+1}}_{S_k} + \frac{1}{(k+1)\cdot(k+2)} =$$ užijeme komutativnost

$$= 1 + \frac{1}{(k+1)\cdot(k+2)} - \frac{1}{k+1} = 1 + \frac{1-(k+2)}{(k+1)\cdot(k+2)} = 1 + \frac{1-k-2}{(k+1)\cdot(k+2)} =$$

$$= 1 + \frac{-k-1}{(k+1)\cdot(k+2)} = 1 - \frac{\cancel{(k+1)}}{\cancel{(k+1)}\cdot(k+2)} = \boxed{1 - \frac{1}{k+2}}$$ a to jsme chtěli dokázat

$\Rightarrow$ $V(n)$ platí pro všechna $n \in N$.

Příklad 2: Dokažte: $\forall n \in N: n < 2^n$ — Jonáš

Důkaz: I. pro $n=1$ platí $1 < 2^1$

$1 < 2$

II. $\forall k \in N: k < 2^k \Longrightarrow k+1 < \boxed{2^{k+1}}$ musíme dokázat

Předpokládáme tedy, že $k < 2^k$ ... Přičteme-li k oběma stranám nerovnosti číslo 1, nerovnost se nezmění!

$k+1 < 2^k + 1$ ... Zvětšíme-li číslo 1 na 2, tak se nerovnost opět nezmění!

$k+1 < 2^k + 2^1$ ... nahradíme-li 2 výrazem 2^k ($k \in N$),

$k+1 < 2^k + 2^k$ tak se nerovnost opět nezmění

~~$k+1 < 2 \cdot 2^k$~~

$\underline{k+1 < 2^{k+1}}$ $\Rightarrow$ daná nerovnost platí pro $\forall n \in N$.

Příklad 3: Dokažte: $\forall n \in N: 1.1! + 2.2! + \cdots + n.n! = (n+1)! - 1$ — Jonáš

Důkaz: I. Pro $n=1$: $L = 1.1! = 1$

$P = (1+1)! - 1 = 2! - 1 = 2 - 1 = 1$ } $L = P$, tzn., že $V(n)$ platí pro $n=1$

II. $\forall k \in N: 1.1! + 2.2! + \cdots + k.k! = (k+1)! - 1 \Longrightarrow$

$$\underbrace{1.1! + 2.2! + \cdots + k.k!}_{(k+1)! - 1} + (k+1).(k+1)! = \boxed{(k+2)! - 1}$$ a to musíme dokázat

$(k+1)! - 1 + (k+1).(k+1)! =$ (upravíme pomocí komutativnosti)

$= \underline{(k+1)! + (k+1).(k+1)!} - 1 = (k+1)!\,(1 + k+1) - 1 =$

$= (k+1)!\,(k+2) - 1 = \underbrace{(k+2).(k+1)!}\, - 1 = \boxed{(k+2)! - 1}$ a to jsme měli dokázat

např. pro $k=5$ je to $7.6! - 1$ lze nahradit $7! - 1$

$V(n)$ platí proto pro $\forall n \in N$.

Příklad 4: $\forall n \in N$: $6 \mid (n^3+5n)$ ... znamená, že výraz n^3+5n je dělitelný šesti, čili musíme dokázat, že je násobkem šesti

Důkaz: I. Pro $n=1$ ... $1^3+5.1 = 1+5 = 6$, 6 je dělitelné šesti, tzn., že $V(n)$ platí pro $n=1$.

II. Musíme dokázat:

$6 \mid (k^3+5k) \Longrightarrow 6 \mid \left((k+1)^3+5(k+1)\right)$

Z toho plyne, že výraz $(k+1)^3+5(k+1)$ musí být dělitelný 6.

Výraz $(k+1)^3$ upravíme pomocí vzorce $(A+B)^3 = A^3+3A^2B+3AB^2+B^3$

$(k+1)^3+5(k+1) = \underbrace{k^3+3k^2+3k+1+5k}_{\text{spojíme}}+5 =$

$\boxed{k^3+5k} + 3k^2+3k+\boxed{6}$ ... zbývá dokázat, že také výraz $3k^2+3k$ je dělitelný 6.

k^3+5k je dělitelné 6 podle předpokladu

6 je dělitelné 6

$3k^2+3k = 3\underbrace{k.(k+1)}_{\downarrow}$,

z těchto dvou čísel je jedno sudé, proto výraz $3k^2+3k$ je dělitelný 3 a 2 a je proto násobkem 6.

Využíváme věty: Součet je dělitelný 6, jestliže každý sčítanec je dělitelný 6.

$\forall n \in N$ platí $V(n)$: $6 \mid n^3+5n$

Příklad 5 (obdoba příkladu 4):

$\forall n \in N$: Jestliže $6 \mid (n^3+11n)$, pak $6 \mid [(n+1)^3+11(n+1)]$

Důkaz: I. Pro $n=1$: $(1+1)^3+11(1+1) = 2^3+22 = 8+22 = 30$ a $6 \mid 30$, proto $V(n)$ platí pro $n=1$.

II. Pro $\forall k \in N$: $\underbrace{6 \mid (k^3+11k)}_{\text{Předpokládáme:}} \Longrightarrow 6 \mid [\underbrace{(k+1)^3+11(k+1)}_{\text{musí být dělitelné 6}}]$

$(k+1)^3+11(k+1) = \underbrace{k^3}_{}+3k^2+3k+1+\underline{11k}+11 = k^3+3k^2+3k+\underline{12}+11k$

je dělitelné 6 podle předpokladu

je také dělitelné 6

$$= (k^3+11k)+3k^2+3k+12 = \underline{(k^3+11k)} + 3\underbrace{k(k+1)} + \underline{12}$$

jedno z těchto čísel je sudé, čili je násobkem 2, pro $3k(k+1)$ je násobkem 6,

z toho plyne, že výraz $(k+1)^3+11(k+1)$ je dělitelný 6.

$V(n)$ platí pro $\forall n \in N$

Příklad 6 : $\forall n \in N: \quad 133 \mid (11^{n+2}+12^{2n+1})$ ... Jonáš

Důkaz: I. Pro $n=1$: $11^{1+2}+12^{2\cdot 1+1} = 11^3+12^3 = 3059$

$3059 : 133 = 23$

$V(n)$ platí pro $n=1$

II. $\forall k \in N: \quad 133 \mid (11^{k+2}+12^{2k+1}) \Longrightarrow 133 \mid (11^{k+3}+12^{2k+3})$

Dokažme, že $(11^{k+3}+12^{2k+3})$ je dělitelné 133

$$11^{k+3}+12^{2k+3} = 11^k \cdot 11^3 + 12^{2k}\cdot 12^3 = 11^k\cdot 11^{2+1} + 12^{2k}\cdot 12^{2+1} =$$

$$= \underline{11^k \cdot 11^2} \cdot 11 + \underline{12}^{2k} + 12^2 \cdot \underline{12} = 11^{k+2}\cdot 11 + 12^{2k+1}\cdot 12^2 =$$

$$= 11^{k+2}\cdot 11 + 12^{2k+1}\cdot 144 = 11^{k+2}\cdot 11 + 12^{2k+1}\cdot(11+133) =$$

$$= 11\cdot 11^{k+2} + 11\cdot 12^{2k+1} + 133\cdot 12^{k+1} = 11\cdot\underbrace{(11^{k+2}+12^{2k+1})}_{A} + \underbrace{133\cdot 12^{k+1}}_{B}$$

Výraz A je dělitelný 133 podle předpokladu a výraz B je násobkem 133, a proto je také dělitelný 133.

Závěr: $\forall n \in N$ platí: $133 \mid (11^{n+2}+12^{2n+1})$

Příklad 7: Dokažte mat. indukcí, že pro každou aritmetickou posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ s diferencí $\underline{d}$ platí:

$$\boxed{a_n = a_1 + (n-1)\cdot d}$$

Důkaz: Pro $n=1$: $L = a_1$, $P = a_1+(1-1)\cdot d = a_1 + 0d = a_1$

$L=P$, vzorec platí pro $n=1$.

II. Pro $\forall k \in N$: $a_k = a_1 + (k-1).d$

$$a_{k+1} = a_1 + (k+1-1).d = \boxed{a_1 + k.d}$$

$$a_{k+1} = a_k + d = a_1 + (k-1).d + d = a_1 + kd - d + d = \boxed{a_1 + kd}$$

$\Rightarrow$ vzorec platí pro $\forall n \in \mathbb{N}$.