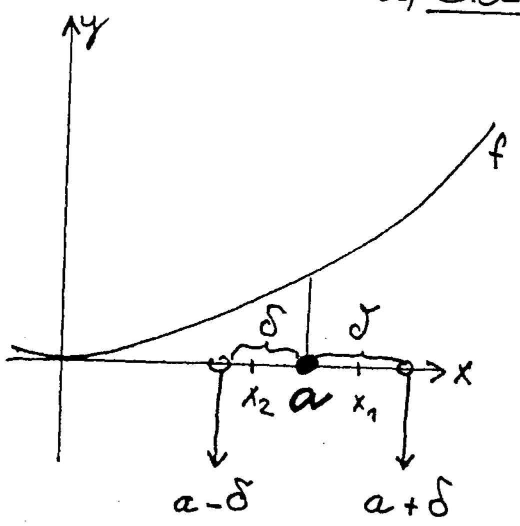
11 a) LIMITA A SPOJITOST FUNKCE

a) Okolí bodu



Definice:
$U(a) = (a-\delta;\ a+\delta)$ je otevřený interval, který se nazývá okolí bodu a, kde $\delta \in R^+$. Číslo a se nazývá střed okolí, δ poloměr okolí.

Poznámka: Bod a je zde ve významu obrazu čísla na číselné ose x.

Interval $(a-\delta;\ a\rangle$ je levé okolí bodu a (čísla a).

-||- $\langle a;\ a+\delta)$ " pravé " " " " " .

Platí: $x \in (a-\delta;\ a+\delta) \iff |x-a| < \delta$ (viz x_1, x_2 na obr.)

Příklad 1: Charakterizujte interval $(2;4)$ jako okolí bodu.

Počítáme: $2+4=6,\ 6:2=3$

Střed okolí je $a=3$, poloměr okolí je $\delta=1$.

Příklad 2: Charakterizujte intervaly $\langle 3;4)$ a $(2;3\rangle$ jako okolí bodu.

Odpověď: $\langle 3;4)$ je pravé okolí bodu $a=3$.

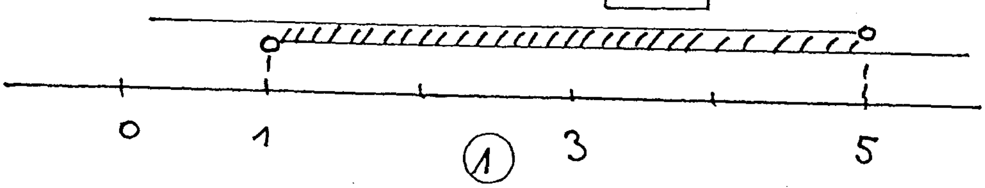
$(2;3\rangle$ " levé -||- -||- .

Příklad 3: Jak je možné se dívat na řešení nerovnice $|x-3|<2$?

$$|x-3|<2 \iff x-3<2 \ \vee\ -x+3<2$$

$$\boxed{x<5} \ \vee\ -x<-1 \quad |\cdot(-1)$$

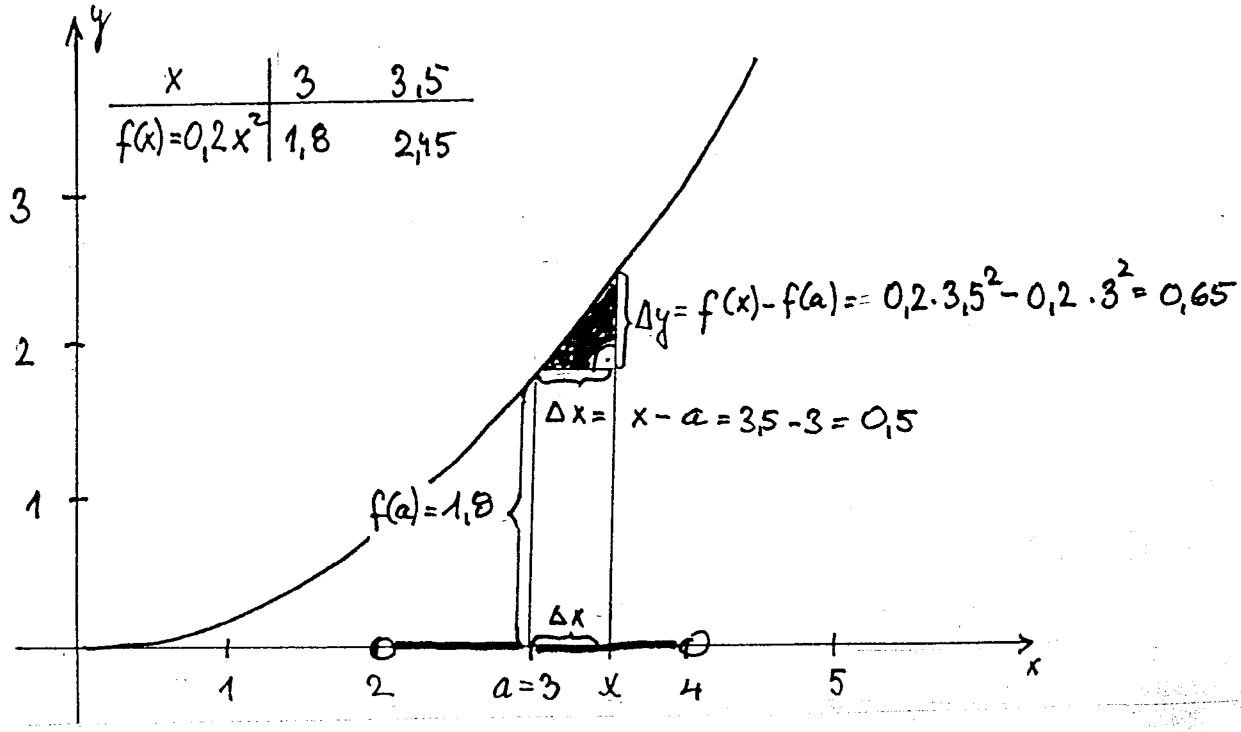
$$\boxed{x>1}$$



$x \in (1;5) \Rightarrow a=3,\ \delta=2.$ $(5+1):2=3$ je výpočet středu a jako aritmetického průměru krajních bodů $1;5$.

Interval $(1;5)$, který je řešením dané nerovnice, lze považovat za okolí bodu 3 s poloměrem 2.

Zavedení pojmů Δx a Δy pomocí funkce $f: y = 0{,}2x^2$.



> **Definice:** Nechť funkce f je definovaná v nějakém okolí $U(a)$ bodu a a nechť $x \in U(a)$. Rozdíl $x-a$ nazýváme přírůstek argumentu x v bodě a. Označujeme ho $\Delta x = x-a$.

V našem případě (viz obr.): $f: f(x)=0{,}2x^2$, okolí bodu $a=3$ je zvoleno $(2;4)$; $\Delta x = x-a = 3{,}5-3 = 0{,}5$ ... $\Delta x = 0{,}5$.

> **Definice** (jen stručně): Rozdíl $f(x)-f(a)$ se nazývá přírůstek funkce v bodě a odpovídající přírůstku $\Delta x = x-a$ argumentu. Označujeme ho $\Delta y = f(x)-f(a)$.

V našem případě (viz obr.): $\Delta y = f(x)-f(a) = 0{,}2\cdot 3{,}5^2 - 0{,}2\cdot 3^2 = 0{,}65$

$\Delta y = 0{,}65$

b) Spojitost funkce v bodě

Definice: Funkce f je spojitá v bodě a, jestliže k libovolně zvolenému okolí bodu $f(a)$ existuje takové okolí bodu a, že pro všechna x z tohoto okolí bodu a patří hodnoty $f(x)$ do zvoleného okolí bodu $f(a)$.

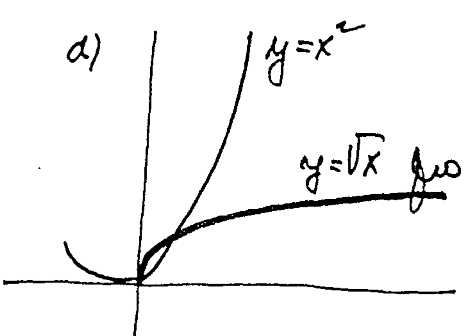
Poznámka: 1) Bod $f(a)$ je bod grafu (i když má ještě jiný význam – funkční hodnoty).

2) Je-li funkce spojitá, pak její graf je souvislá čára, kterou je možné nakreslit jedním tahem bez přerušení.

Příklady spojitých funkcí:

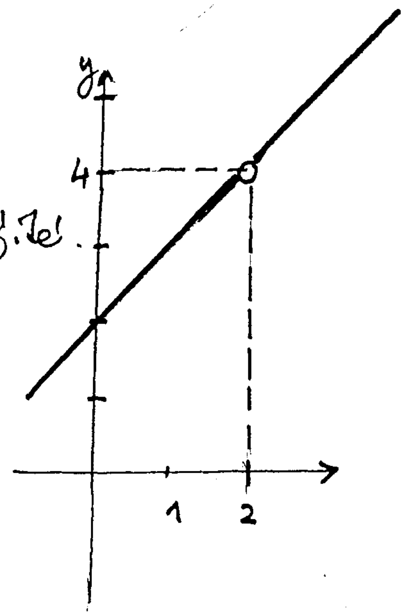
a) $y=3$ b) $y=2x-3$ c) $y=\sin x$

d)



e) $y=2^x$ atd.

Příklady funkcí, které nejsou spojité.



$\boxed{y=\dfrac{x^2-4}{x-2}}$ ... $y=\dfrac{(x+2).(x-2)}{x-2}=x+2$

↓

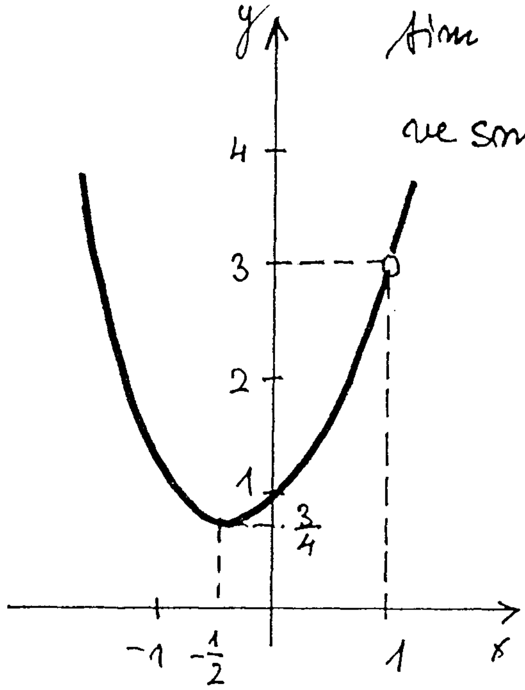
Tato funkce není spojitá v bodě $x=2$

$\boxed{y=\dfrac{x^3-1}{x-1}}$ ... $y=\dfrac{\cancel{(x-1)}.(x^2+x+1)}{\cancel{(x-1)}}=x^2+x+1$

↓

Tato funkce není spojitá v bodě $x=1$. Grafická interpretace je na další straně.

Pro informaci, jak vznikl graf: Graf $y=ax^2+bx+c$ je parabola, která vznikne z grafu funkce $y=ax^2$ posunutím o $\left(-\frac{b}{2a}\right)$ ve směru osy x a o $\left(-\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$ ve směru osy y.

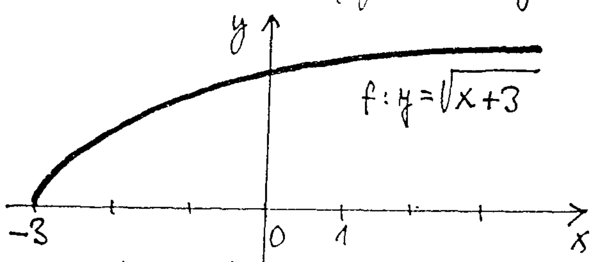


Aplikace: $-\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2\cdot1} = -\frac{1}{2}$

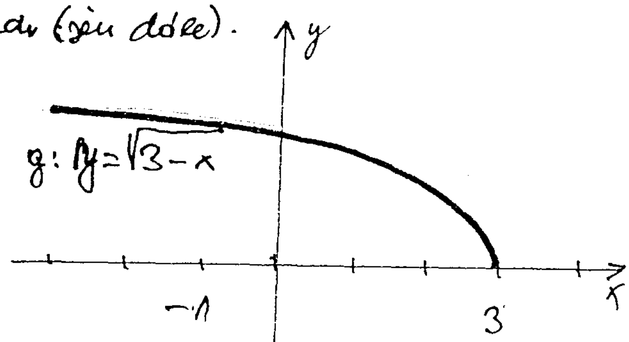
$$-\frac{b^2-4ac}{4a} = -\frac{1^2-4\cdot1\cdot1}{4\cdot1} = -\frac{1-4}{4} = -\frac{-3}{4} = \frac{3}{4}$$

c) Spojitost funkce v intervalu

Ani bez definice, jen na příkladech (viz dále).



$D_f = \langle -3; +\infty)$



$D_g = (-\infty; +3\rangle$

Tato funkce není definována v levém okolí bodu -3. Říkáme, že funkce f není spojitá v bodě -3.

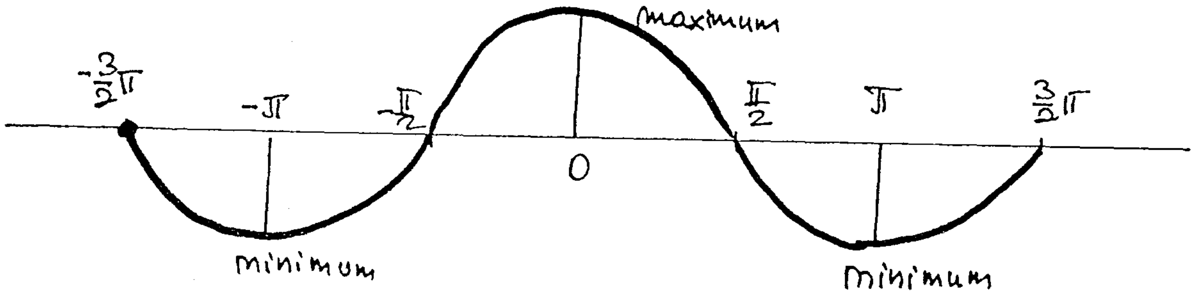
Tato funkce není definována v pravém okolí bodu $+3$. Říkáme, že funkce g není spojitá v bodě $+3$.

Definice: Funkce je spojitá v otevřeném intervalu (a,b), je-li spojitá v každém bodě tohoto intervalu.

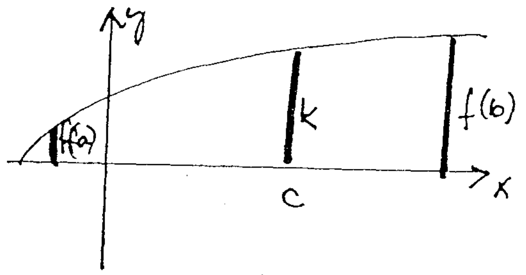
Definice: Funkce je spojitá v uzavřeném intervalu $\langle a,b\rangle$, je-li spojitá v (a,b) a v bodě a je spojitá zprava a v bodě b spojitá zleva.

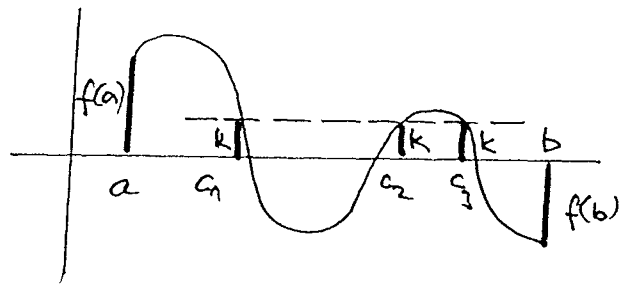
Věta Weierstrassova – nebudeme ji dokazovat, ale jen její smysl: Spojitá funkce v $\langle a;b\rangle$ nabývá v tomto intervalu alespoň v jednom bodě maxima a alespoň v jednom bodě minima. Např.

$f: y=\cos x$ nabývá v $\langle -\frac{3}{2}\pi ; \frac{3}{2}\pi \rangle$ maxima v bodě $x=0$ a minima v bodech $x=-\pi$ a $x=\pi$.



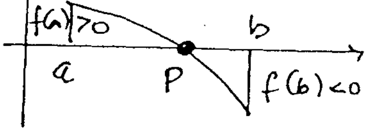
Věta Bolzanova-Weierstrassova: Je-li funkce f spojitá v $\langle a,b\rangle$ a $f(a) \neq f(b)$, potom ke každému číslu k, které leží mezi čísly $f(a)$ a $f(b)$, existuje alespoň jeden takový bod $c \in (a,b)$, že $f(c)=k$.

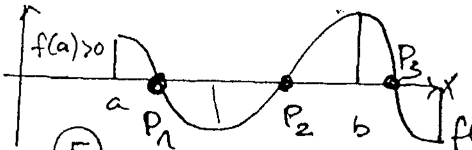


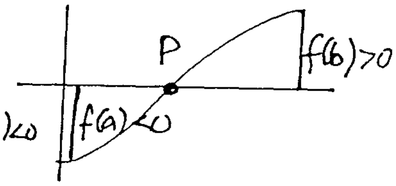


Věta 1: Je-li funkce f spojitá v $\langle a,b\rangle$ a mají-li čísla $f(a)$ a $f(b)$ různá znaménka, tj. $f(a)\cdot f(b)<0$, potom existuje alespoň jeden takový bod $c \in (a,b)$, v němž platí $f(c)=0$. Bude-li tato funkce rostoucí, nebo klesající, bude tento bod právě jeden.

Stručně řečeno: S danou podmínkou protíná graf příslušné funkce osu x alespoň v 1 bodě ($P_1, P_2, P_3 \ldots$ čili $c_1, c_2, c_3 \ldots$)





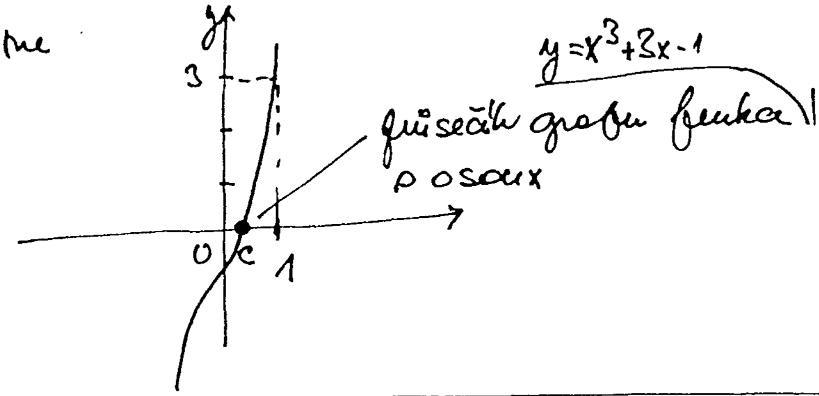


Příklad 4: Zdůvodněte, proč rovnice $x^3+3x-1=0$ má kořen v intervalu $(0;1)$.

Je zřejmé, že v $\langle 0;1\rangle$ je tato funkce spojitá. Platí:

$f(0)=-1$, $f(1)=3$ $\quad f(0)\cdot f(1)=-1\cdot 3=-3$; $-3<0$

Podle B.-W. věty existuje aspoň jeden bod, v němž graf této funkce protne osu x a $y=0$.



Příklad 5: Řešte v R nerovnici $x^3>x$

Řešení:

$x^3>x$

$x^3-x>0$

$x(x^2-1)>0$

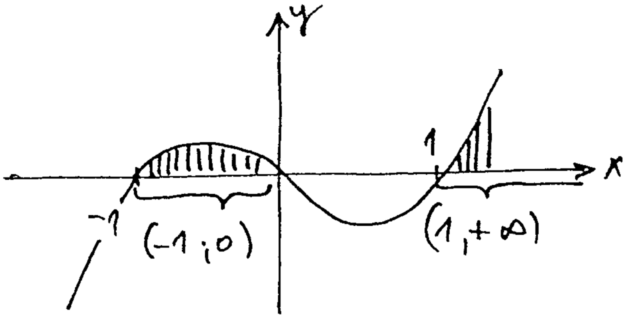
$x\cdot(x+1)\cdot(x-1)=0$

Vyšetříme jako funkci $f(x)=x(x+1).(x-1)$

Funkce $f(x)=0$ pro $\underbrace{x=-1}_{c_1}$, $\underbrace{x=0}_{c_2}$, $\underbrace{x=+1}_{c_3}$, kterým odpovídají body c_1 c_2 c_3

$(-\infty,-1)$		$(-1,0)$		$(0,1)$		$(1,+\infty)$
$-1{,}5$	-1	$-0{,}5$	0	$0{,}5$	1	2
$-$		$+$		$-$		$+$

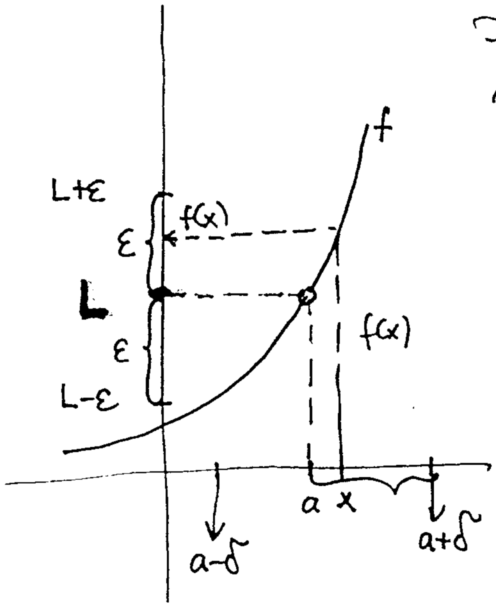
Dosazením zvolených čísel v daných intervalech zjistím, kdy je hodnota funkce $y=x^3-x$ kladná, nebo záporná.



$x^3-x>0$ v intervalech $(-1;0)$ a $(1;+\infty)$. Platí tedy

$\boxed{x^3>x \text{ v } (-1;0)\cup(1;+\infty)}$

Limita funkce



D: Funkce f má v bodě $\underline{a}$ limitu L, právě když k libovolnému zvolenému okolí bodu L existuje okolí bodu $\underline{a}$ tak, že pro všechna $x \neq a$ z tohoto okolí náleží hodnoty $f(x)$ zvolenému okolí bodu L.

$$f(x) \in (L-\varepsilon;\ L+\varepsilon)$$

$$L-\varepsilon < f(x) < L+\varepsilon$$

Vlastnosti limit

pro dvě funkce

a) $f(x)$, pro kterou platí $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$

b) $g(x)$, " " " $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$

① $\lim\limits_{x\to a}[f(x)+g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x) = A+B$

② $\lim\limits_{x\to a} c\cdot f(x) = c\cdot \lim\limits_{x\to a} f(x) = c\cdot A$

③ $\lim\limits_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot \lim\limits_{x\to a} g(x) = A\cdot B$

④ $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} = \dfrac{A}{B}$ $\quad \forall x:\ g(x)\neq 0,\ B\neq 0$

Funkce f má v bodě $\underline{a}$ nejvýše jednu limitu.

Funkce f je spojitá v bodě $\underline{a}$, právě když $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Limita funkce v bodě $\underline{a}$ nezávisí na tom, zda je funkce v bodě $\underline{a}$ definována či nikoliv.

Některé důležité limity

$\lim\limits_{x\to 0-} \frac{1}{x} = -\infty$

$\lim\limits_{x\to 0+} \frac{1}{x} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{1}{x} = 0, \ \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = 0$

$\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{x^n} = 0, \ n \in N$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x}$ neexistuje

$\lim\limits_{x\to 0-} \operatorname{cotg} x = -\infty$

$\lim\limits_{x\to 0+} \operatorname{cotg} x = +\infty$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to +\infty} \sin x$ neexistuje

$\lim\limits_{x\to -\infty} \sin x$ neexistuje

$\lim\limits_{x\to +\infty} \cos x$ neexistuje

$\lim\limits_{x\to -\infty} \cos x$ neexistuje

$\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}-} \operatorname{tg} x = +\infty$ DALŠÍ-str. 15

$\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}+} \operatorname{tg} x = -\infty$

Smysl některých údajů lze ilustrovat pomocí grafů funkcí.

Příklady pro výpočty limit

$$\lim_{x\to 0} (1+x^2) = 1+0 = \boxed{1}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{2x^2-2}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{2(x^2-1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \underbrace{\frac{2(x+1)\cdot\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}}} = \lim_{x\to 1} 2(x+1) =$$

$$= 2(1+1) = \boxed{4}$$

Bylo možné krátit, neboť x se blíží k $\underline{1}$, ale nedosáhne této hodnoty.

$$\lim_{x\to 1} \frac{2x-1}{x+3} = \frac{2\cdot 1-1}{1+3} = \boxed{\frac{1}{4}}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2+2x-3}{x-1} =$$

V bodě $x=1$ není funkce spojitá, proto nelze dosazovat 1 přímo do daného výrazu. Provedeme rozklad.

$x^2+2x-3=0$

$x_{1,2} = \frac{-2\pm\sqrt{4+12}}{2} = \frac{-2\pm 4}{2} = \left\langle \begin{matrix} 1 \\ -3 \end{matrix} \right.$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(x+3)\cdot\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}} =$$

$$= \lim_{x\to 1} (x+3) = 1+3 = \boxed{4}$$

$$\lim_{x\to 2}(x^3-4x^2+6x-5)=2^3-4.2^2+6.2-5=\boxed{-1}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x+1}=\frac{2^2-4}{2+1}=\frac{0}{3}=\boxed{0}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x^4-16}=\lim_{x\to 2}\frac{x^3-2^3}{x^4-2^4}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2).(x^2+2x+4)}{(x^2)^2-(2^2)^2}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2).(x^2+2x+4)}{(x^2-2^2).(x^2+2^2)}=\lim_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}.(x^2+2x+4)}{\cancel{(x-2)}.(x+2).(x^2+4)}=\frac{2^2+2.2+4}{(2+2).(4+4)}=$$

$$=\frac{12}{32}=\boxed{\frac{3}{8}}$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^2+2x-15}=\lim_{x\to 3}\frac{(x+3).\cancel{(x-3)}}{\cancel{(x-3)}.(x+5)}=$$

$x^2+2x-15=0$

$x_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{64}}{2}=\frac{-2\pm 8}{2}=\begin{cases}3\\-5\end{cases}$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{x+3}{x+5}=\frac{3+3}{3+5}=\frac{6}{8}=\boxed{\frac{3}{4}}$$

$$\lim_{x\to 5}\frac{x^2-4x-5}{x^2-7x+10}=$$

$x^2-4x-5=0\ \dots\ x_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{36}}{2}=\frac{4\pm 6}{2}=\begin{cases}5\\-1\end{cases}$

$x^2-7x+10\dots\ x_{1,2}=\frac{7\pm\sqrt{9}}{2}=\frac{7\pm 3}{2}=\begin{cases}5\\2\end{cases}$

$$=\lim_{x\to 5}\frac{\cancel{(x-5)}.(x+1)}{\cancel{(x-5)}.(x-2)}=$$

$$=\lim_{x\to 5}\frac{x+1}{x-2}=\frac{5+1}{5-2}=\frac{6}{3}=\boxed{2}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+4x-5}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x^2+4x+4)-4-5}{x^2-1}=$$

$\left(\frac{4}{2}\right)^2=4$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x+2)^2-9}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+2+3).(x+2-3)}{(x+1).(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+5).\cancel{(x-1)}}{(x+1).\cancel{(x-1)}}=\lim_{x\to 1}\frac{x+5}{x+1}=$$

$$=\frac{1+5}{1+1}=\frac{6}{2}=\boxed{3}$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^2-5x+6} = \lim_{x\to 2} \frac{(x+2)\cdot\cancel{(x-2)}}{(x-3)\cdot\cancel{(x-2)}} =$$

$x^2-5x+6=0$

$x_{1,2} = \frac{5\pm\sqrt{1}}{2} = \frac{5\pm 1}{2} = \begin{cases} 3 \\ 2 \end{cases}$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{x+2}{x-3} = \frac{2+2}{2-3} = \boxed{-4}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x+3}{3x-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2x}{x}+\frac{3}{x}}{\frac{3x}{x}-\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2+\frac{3}{x}}{3-\frac{1}{x}} = \frac{2+0}{3-0} = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3-3x+1}{2-x^2-x^3} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^3}{x^3}-\frac{3x}{x^3}+\frac{1}{x^3}}{\frac{2}{x^3}-\frac{x^2}{x^3}-\frac{x^3}{x^3}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{\frac{2}{x^3}-\frac{1}{x}-1} = \frac{1-0+0}{0-0-1} = \boxed{-1}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^3+5}{x^2-5} =$$

Kdybychom postupovali jako u předchozího příkladu, došli bychom k výrazu, který nemá smysl, a sice $\frac{2+0}{0-0}$, proto uděláme postup pomocí vytknutí před závorku.

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2x^3\left(1+\frac{5}{2x^3}\right)}{x^2\left(1-\frac{5}{x^2}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2x^3}{x^2}\cdot\frac{1+\frac{5}{2x^3}}{1-\frac{5}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} 2x\cdot\frac{1+\frac{5}{2x^3}}{1-\frac{5}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} 2x \cdot \lim_{x\to\infty} \frac{1+\frac{5}{2x^3}}{1-\frac{5}{x^2}} =$$

$$= \infty\cdot\frac{1+0}{1-0} = \infty\cdot 1 = \boxed{\infty}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(-4x^3+7x-9\right) = \lim_{x\to\infty}\left(-4x^3\right)\cdot\left(1-\frac{7x}{4x^3}+\frac{9}{4x^3}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(-4x^3\right)\cdot\lim_{x\to\infty}\left(1-\right.$$

$$\left.-\frac{7}{4x^2}+\frac{9}{4x^3}\right) = -\infty\cdot(1-0+0) = -\infty\cdot 1 = \boxed{-\infty}$$

<u>Poznámka</u>: $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$, $0\cdot\infty$, $\infty\cdot\infty$ jsou neurčité výrazy, které se snažíme při výpočtech odstranit. Výraz $\frac{k}{\infty}$ nepovažujeme za neurčitý výraz, blíží se k 0.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{6x^4-2x}{2x^3+1}$$ ← opět musíme dělit čitatele a jmenovatele nejvyšším x^4, proto volíme již známý postup. $\left(\frac{6-0}{0+0}\right)$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{6x^4\cdot\left(1-\frac{2x}{6x^4}\right)}{2x^3\cdot\left(1+\frac{1}{2x^3}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{6x^4}{2x^3}\cdot\frac{1-\frac{1}{3x^3}}{1+\frac{1}{2x^3}} = \lim_{x\to\infty} 3x\cdot\frac{1-\frac{1}{3x^3}}{1+\frac{1}{2x^3}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} 3x \cdot \lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{1}{3x^3}}{1+\frac{1}{2x^3}} = \infty\cdot\frac{1-0}{1+0} = \infty\cdot 1 = \boxed{\infty}$$

$$\lim_{x\to 3+} \frac{x+2}{x-3} = +\infty$$ Jde o lineární lomenou funkci, kterou upravíme na tvar $y = \frac{k}{x-m}+n$, kde $S[m,n]$.
$\downarrow$
Opačné

$$\underbrace{\lim_{x\to 3-} \frac{x+2}{x-3} = -\infty}$$

Řešení objasní graf

Dělme: $(x+2):(x-3) = 1$

$$\frac{\mp x \pm 3}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{x+2}{x-3} = 1+\frac{5}{x-3} = \frac{5}{x-3}+1$$

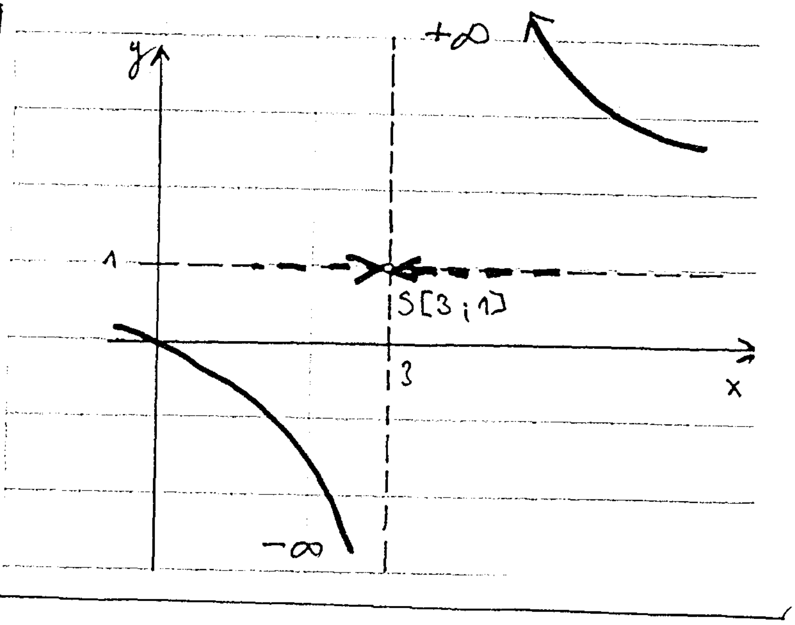
$\Rightarrow S[3;1]$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{2x^2-1}-\frac{x^2}{2x+1}\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{x^3(2x+1)-x^2(2x^2-1)}{(2x^2-1)\cdot(2x+1)} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{2x^4}+x^3\cancel{-2x^4}+x^2}{(2x^2-1)\cdot(2x+1)} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{x^3+x^2}{(2x^2-1)\cdot(2x+1)} =$$



$$= \lim_{x\to\infty}\frac{x^3+x^2}{4x^3+2x^2-2x-1} = \lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x^3}\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\cancel{x^3}\left(4+\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)} = \lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{4+\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}} =$$

$$= \frac{1+0}{4+0-0-0} = \boxed{\frac{1}{4}}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(a+x)^2-a^2}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(a+x+a).(a+x-a)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(2a+x)\cancel{x}}{\cancel{x}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}(2a+x)=2a+0=\boxed{2a}$$

$$\lim_{x\to a}\frac{x^3-a^3}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\cancel{(x-a)}(x^2+ax+a^2)}{\cancel{(x-a)}}=\lim_{x\to a}\frac{x^2+ax+a^2}{1}=\lim_{x\to a}(x^2+ax+a^2)=$$

$$=a^2+a.a+a^2=\boxed{3a^2}$$

$\lim\limits_{x\to 2-}\sqrt{4-x^2}=0$, protože hodnota $x<2$ a rozdíl $4-x^2>0$.

$\lim\limits_{x\to 2+}\sqrt{4-x^2}$ neexistuje, protože hodnota $x>2$ a rozdíl $4-x^2<0$, odmocnina ze záporného čísla v množině R neexistuje.

$\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{4-x^2}$ neexistuje, protože hodnota x se blíží k číslu 2 zleva i zprava a limity zleva i zprava nejsou stejné.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^4-x^2+x-7}{x^4+x-16}=\lim_{x\to\infty}\frac{4-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}-\frac{7}{x^4}}{1+\frac{1}{x^3}-\frac{16}{x^4}}=\frac{4-0+0-0}{1+0-0}=\boxed{4}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(2x-3)^5.(3x+2)^{25}}{(2x+1)^{30}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{(2x-3)^5.(3x+2)^{25}}{x^5.x^{25}}}{\frac{(2x+1)^{30}}{x^5.x^{25}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{(2x-3)^5}{x^5}.\frac{(3x+2)^{25}}{x^{25}}}{\frac{(2x+1)^{30}}{x^{30}}}=$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\frac{2x-3}{x}\right)^5.\left(\frac{3x+2}{x}\right)^{25}}{\left(\frac{2x+1}{x}\right)^{30}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\frac{2x}{x}-\frac{3}{x}\right)^5.\left(\frac{3x}{x}+\frac{2}{x}\right)^{25}}{\left(\frac{2x}{x}+\frac{1}{x}\right)^{30}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(2-\frac{3}{x}\right)^5.\left(3+\frac{2}{x}\right)^{25}}{\left(2+\frac{1}{x}\right)^{30}}=$$

$$=\frac{(2-0)^5.(3+0)^{25}}{(2+0)^{30}}=\frac{2^5.3^{25}}{2^{30}}=\frac{1\;.\;3^{25}}{2^{25}}=\boxed{\left(\frac{3}{2}\right)^{25}}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}+\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}}{\frac{x}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\sqrt{x^2-1}+\frac{1}{x}\sqrt{x^2+1} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{1^2}{x^2}(x^2-1)}+\sqrt{\frac{1^2}{x^2}(x^2+1)} = \lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{x^2}{x^2}-\frac{1}{x^2}}+\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \sqrt{1-\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = \sqrt{1-0}+\sqrt{1+0} = 1+1 = \boxed{2}$$

$$\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x-2}-\sqrt{x}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{(\sqrt{x-2}-\sqrt{x}).(\sqrt{x-2}+\sqrt{x})}{\sqrt{x-2}+\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{(\sqrt{x-2})^2-(\sqrt{x})^2}{\sqrt{x-2}+\sqrt{x}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{(x-2-x).(x-2+x)}{\sqrt{x-2}+\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{-2\,(2x-2)}{\underbrace{\sqrt{x-2}+\sqrt{x}}_{\text{nekonečně velké číslo}}} \;\dots\; \frac{k}{\infty} \;(\text{viz ch. }10) = \boxed{0}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}-x}{x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{(\sqrt{x^2+1}-x).(\sqrt{x^2+1}+x)}{(x+1).(\sqrt{x^2+1}+x)} \lim_{x\to\infty} \frac{(\sqrt{x^2+1})^2-x^2}{(x+1).(\sqrt{x^2+1}+x)} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1-x^2}{(x+1).(\sqrt{x^2+1}+x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{(x+1).(\sqrt{x^2+1}+x)} = \text{jako nahoře} = \boxed{0}$$

$$\lim_{\underbrace{x\to-2}_{\text{to není zleva}}} \frac{\sqrt{6+x}-2}{x+2} = \lim_{x\to-2} \frac{(\sqrt{6+x}-2).(\sqrt{6+x}+2)}{(x+2).(\sqrt{6+x}+2)} = \lim_{x\to-2} \frac{6+x-4}{(x+2).(\sqrt{6+x}+2)} =$$

$$= \lim_{x\to-2} \frac{\cancel{(x+2)}}{\cancel{(x+2)}.(\sqrt{6+x}+2)} = \lim_{x\to-2} \frac{1}{\sqrt{6+x}+2} = \frac{1}{\sqrt{6-2}+2} = \boxed{\frac{1}{4}}$$

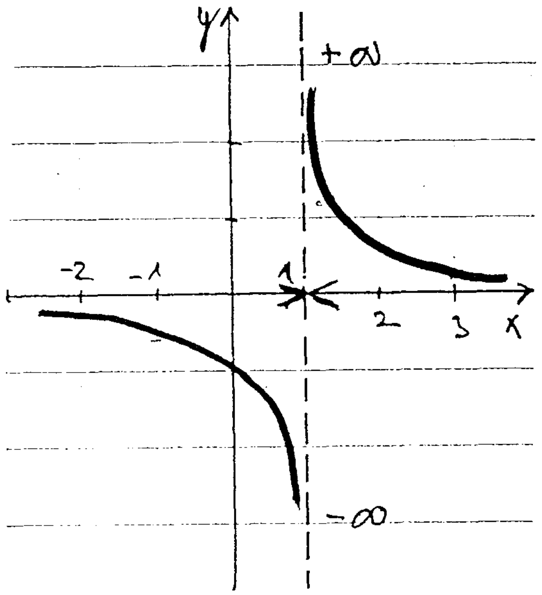
$$\lim_{x\to0} \frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}{x} = \lim_{x\to0} \frac{(\sqrt{2+x}-\sqrt{2}).(\sqrt{2+x}+\sqrt{2})}{x(\sqrt{2+x}+\sqrt{2})} = \lim_{x\to0} \frac{2+x-2}{x(\sqrt{2+x}+\sqrt{2})} =$$

$$= \lim_{x\to0} \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}(\sqrt{2+x}+\sqrt{2})} = \lim_{x\to0} \frac{1}{\sqrt{2+x}+\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2+0}+\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2.2} = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{4}}$$

$$\lim_{x\to 1-} \frac{1}{x^3-1} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 1+} \frac{1}{x^3-1} = +\infty$$



$$\lim_{x\to 3} \frac{\overset{A}{\sqrt{x+13}} - \overset{B}{2\sqrt{x+1}}}{x^2-9} =$$

$$\lim_{x\to 3} \frac{(\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1})\cdot(\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1})}{(x^2-9)\cdot(\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1})} =$$

$$= \lim_{x\to 3} \frac{x+13-4(x+1)}{\text{opiš}} =$$

$$= \lim_{x\to 3} \frac{x+13-4x-4}{\text{opiš}} = \lim_{x\to 3} \frac{-3x+9}{\text{opiš}} =$$

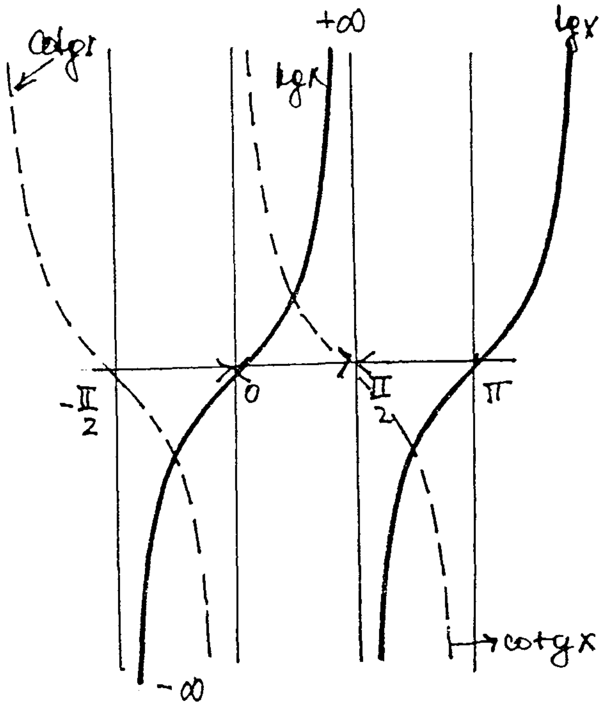
$$= \lim_{x\to 3} \frac{-3\cancel{(x-3)}}{(x+3)\cdot\cancel{(x-3)}\cdot(\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1})} =$$

$$= \lim_{x\to 3} \frac{-3}{(x+3)(\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1})} =$$

$$= \frac{-3}{(3+3)\cdot(\sqrt{3+13}+2\sqrt{3+1})} =$$

$$= \frac{-3}{6(\sqrt{16}+2\sqrt{4})} = \frac{-3}{6(4+2.2)} = \frac{-3}{6.8} = \boxed{-\frac{1}{16}}$$

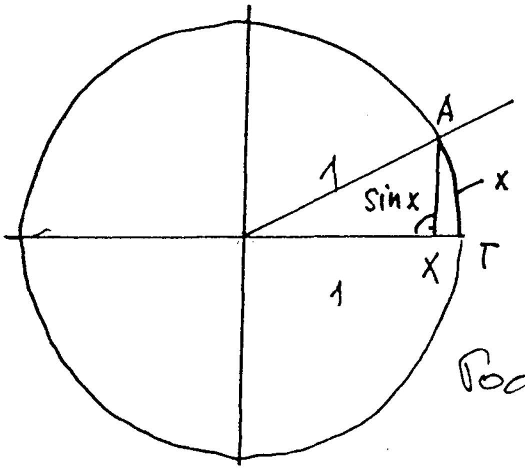
Limity goniometrických funkcí



$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}+} \operatorname{tg} x = -\infty \qquad \lim_{x\to \frac{\pi}{2}-} \operatorname{tg} x = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0-} \operatorname{cotg} x = -\infty$$

$$\lim_{x\to 0+} \operatorname{cotg} x = +\infty$$



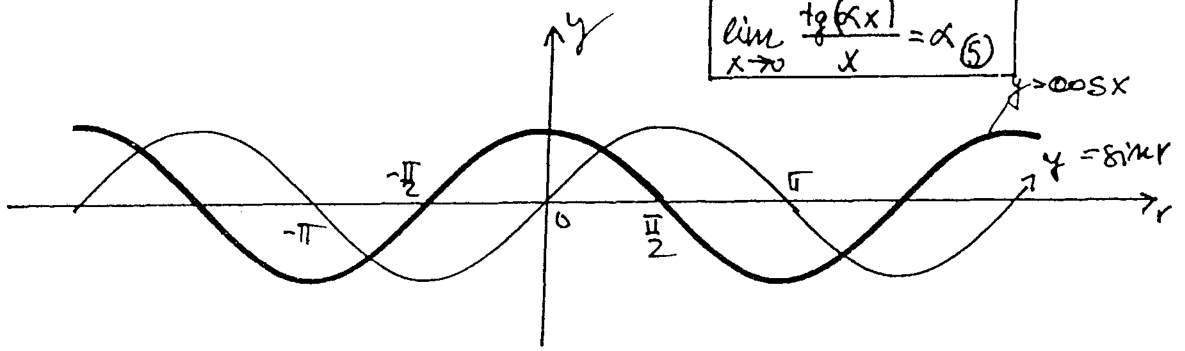
Pro malé hodnoty x (délky obloučku) se hodnota x blíží hodnotě $\sin x$. $|AX|$. Proto

platí i obráceně

$\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1 \quad (1)}$, též platí $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin kx}{kx}=1 \quad (2)}$

Podobně platí: $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}=1 \quad (3)}$ $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\alpha x)}{x}=\alpha \quad (4)}$

$\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}(\alpha x)}{x}=\alpha \quad (5)}$



$\lim\limits_{x\to -\infty}\sin x$ neexistuje $\qquad \lim\limits_{x\to +\infty}\sin x$ neexistuje

$\lim\limits_{x\to -\infty}\cos x$ —"— $\qquad \lim\limits_{x\to +\infty}\cos x$ neexistuje

---

$$\lim_{x\to 0} 5\cdot\cos x = 5\cdot\cos 0 = 5\cdot 1 = \boxed{5}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{3}}{x} = $$ 1) pomocí substituce $\frac{x}{3}=z \Rightarrow x=3z$

2) VZORCEM (4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\frac{1}{3}x}{x}=\dfrac{1}{3}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin z}{3z} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{3}\,\frac{\sin z}{z} = \frac{1}{3}\cdot 1 = \boxed{\frac{1}{3}}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{3x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{3}\cdot\frac{\sin 5x}{x} =$$ sub. $5x=z \Rightarrow x=\frac{z}{5}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{3}\cdot\frac{\sin z}{\frac{z}{5}} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{3}\cdot 5\cdot\frac{\sin z}{z} = \frac{5}{3}\cdot 1 = \boxed{\frac{5}{3}}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\sin\frac{x}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2x}{\frac{x}{2}}}{\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{4x}{x}}{1}=\frac{4}{1}=\boxed{4}$$

se blíží k 0, ale ≠ 0

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\operatorname{tg}x}{\sin 2x}=\lim_{x\to\pi}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{2\sin x\cos x}{1}}=$$

UZORCE: $\operatorname{tg}x=\frac{\sin x}{\cos x}$

$\sin 2x=2\sin x\cos x$

$$=\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{2\cdot\sin x\cos^2 x}=\lim_{x\to\pi}\frac{1}{2\cdot\cos^2 x}=\lim_{x\to\pi}\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{1}{\cos x}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\cos\pi}\cdot\frac{1}{\cos\pi}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{-1}\cdot\frac{1}{-1}=\boxed{\frac{1}{2}}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)\cdot(1+\cos x)}{x^2\cdot(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin^2 x}{x^2}}{\frac{\cancel{x^2}(1+\cos x)}{x^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\sin x}{x}}{1+\cos x}=$$

$$=\frac{1\cdot 1}{1+\cos 0}=\frac{1}{1+1}=\boxed{\frac{1}{2}}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x\cdot\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-(1-2\sin^2 x)}{x\cdot\sin x}=$$

UZOREC: $\cos 2x=1-2\sin^2 x$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{x\cdot\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x\cdot\sin x}{x\cdot\sin x}=\lim_{x\to 0}2\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\sin x}{\sin x}=$$

$$=2\cdot 1\cdot 1=\boxed{2}$$

$$\lim_{x\to 0}x\cdot\operatorname{cotg}x=\lim_{x\to 0}x\cdot\frac{\cos x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\underbrace{\frac{x}{\sin x}}_{\text{platí i obrácené}=1}\cdot\cos x=1\cdot\cos 0=1\cdot 1=\boxed{1}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\overbrace{a+x}^{\alpha}) - \sin(\overbrace{a-x}^{\beta})}{x}, \quad a\in R$$

UZOREC:

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2\cdot\cos\frac{a+x+a-x}{2}\cdot\sin\frac{a+x-(a-x)}{2}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{2\cdot\cos\frac{2a}{2}\cdot\sin\frac{2x}{2}}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2.\cos a\,.\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} 2.\cos a\,.\frac{\sin x}{x} = 2.\cos a\,.1 = \boxed{2.\cos a}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{\sin^2 x} = \lim_{x\to 0}\frac{(\cos x-1)\cdot(\cos x+1)}{\sin^2 x\cdot(\cos x+1)} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x - 1}{\sin^2 x\,(\cos x+1)} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-\sin^2 x}{\sin^2 x\cdot(\cos x+1)} = \lim_{x\to 0} -\frac{\sin^2 x}{\sin^2 x}\cdot\frac{1}{\cos x+1} = -1\cdot\frac{1}{\cos 0+1} =$$

$$= -1\cdot\frac{1}{1+1} = -1\cdot\frac{1}{2} = \boxed{-\frac{1}{2}}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{5x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{5}\,\frac{\sin 3x}{x} = $$ 1) sub. $3x = z \Rightarrow x = \frac{z}{3}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{5}\cdot\frac{\sin z}{\frac{z}{3}} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{5}\cdot\frac{3.\sin z}{z} = \frac{3}{5}\cdot\frac{\sin z}{z} = \frac{3}{5}\cdot 1 = \boxed{\frac{3}{5}}$$

2) VZORCEM (4)

$$\lim_{x\to}\frac{\sin 3x}{x}\cdot\frac{1}{5} = 3.\frac{1}{5} = \boxed{\frac{3}{5}}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x(\sqrt{x+2}+\sqrt{2})}{(\sqrt{x+2}-\sqrt{2})(\sqrt{x+2}+\sqrt{2})} = \lim\frac{\sin 2x(\sqrt{x+2}+\sqrt{2})}{x+2-2}$$

$$= \text{sub: } 2x = z,\ x = \frac{z}{2}\ \ldots = \lim_{x\to 0}\frac{\sin z\ (\sqrt{x+2}+\sqrt{2})}{\frac{z}{2}} = \lim_{x\to 0}$$

$$\frac{\frac{\sin z}{1}}{\frac{z}{2}}\cdot(\sqrt{x+2}+\sqrt{2}) = \lim_{x\to 0} 2\,.\,\frac{\sin z}{z}\,.\,(\sqrt{x+2}+\sqrt{2}) = 2.1(\sqrt{0+2}+\sqrt{2}) =$$

$$= 2\,(\sqrt{2}+\sqrt{2}) = 2.2\sqrt{2} = \boxed{4.\sqrt{2}}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x}{\sqrt{x+6}-\sqrt{6}} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x.(\sqrt{x+6}+\sqrt{6})}{(\sqrt{x+6}-\sqrt{6}).(\sqrt{x+6}+\sqrt{6})} = \frac{\sin 6x(\sqrt{x+6}+\sqrt{6})}{x+6-6} =$$

$$= \boxed{\frac{\sin 6x(\sqrt{x+6}+\sqrt{6})}{x}}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin \overset{a}{5x} - \sin \overset{b}{3x}}{\sin x} = \qquad \text{VZOREC: } \sin a - \sin b = 2\cdot\cos\frac{a+b}{2}\cdot\sin\frac{a-b}{2}$$

$$\lim_{x\to 0} = 2\cdot\cos\frac{5x+3x}{2}\cdot\sin\frac{5x-3x}{2} = \lim_{x\to 0}\frac{2\cdot\cos 4x\cdot\cancel{\sin x}}{\cancel{\sin x}} = 2\cdot\cos 4x =$$

$$= 2\cdot\cos 4\cdot 0 = 2\cdot\cos 0 = 2\cdot 1 = \boxed{2}$$

TÉŽ JINAK (DOLE)

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{\operatorname{tg} x} = \lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{\frac{\sin x}{\cos x}} = \lim_{x\to 0}\frac{(x-\sin x)\cdot\cos x}{\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{\sin x}\cdot\cos x =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sin x}-\frac{\sin x}{\sin x}\right)\cos x = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sin x}-1\right)\cdot\cos x = (1-1)\cdot\cos x = 0\cdot\cos 0 = \boxed{0}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{\operatorname{tg} 3x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 4x}{x}}{\frac{\operatorname{tg} 3x}{x}}$$ podle vzorců (4) a (5) platí: $= \boxed{\frac{4}{3}}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin mx}{\sin nx} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin mx}{x}}{\frac{\sin nx}{x}}$$ podle vzorce (4) $= \frac{mx}{nx} = \boxed{\frac{m}{n}}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{\operatorname{tg} x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{x}-\frac{\sin x}{x}}{\frac{\operatorname{tg} x}{x}}$$ podle vzorců (1) a (5) (3) platí:

$$\frac{1-1}{1} = \frac{0}{1} = \boxed{0}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x - \sin 3x}{\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 5x}{x}-\frac{\sin 3x}{x}}{\frac{\sin x}{x}}$$ podle vzorců (1) a (4) platí:

$$\lim_{x\to 0}\frac{5-3}{1} = \boxed{2}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x-\sin x}{\cos 2x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x-\sin x}{\cos^2 x-\sin^2 x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cancel{\cos x-\sin x}}{\cancel{(\cos x-\sin x)}\cdot(\cos x+\sin x)}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos x+\sin x} = \frac{1}{\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\frac{\sqrt2}{2}+\frac{\sqrt2}{2}} = \frac{1}{\sqrt2} = \boxed{\frac{\sqrt2}{2}}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{\sin^2 x}=\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{1-\cos^2 x}=\lim_{x\to0}-\frac{\cos x-1}{\cos^2 x-1}=\lim_{x\to0}-\frac{\cancel{\cos x-1}}{(\cos x+1)\cancel{(\cos x-1)}}=$$

$$=\lim_{x\to0}-\frac{1}{\cos x+1}=-\frac{1}{\cos 0+1}=-\frac{1}{1+1}=\boxed{-\frac{1}{2}}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\sin x}{x}=1\cdot 1=\boxed{1}$$

$\lim_{x\to0}\frac{\sin 5x}{x}$ podle vzorce (4) $=\boxed{5}$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x-\sin x}{1-\operatorname{tg} x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x-\sin x}{1-\frac{\sin x}{\cos x}}=\lim\frac{\frac{\cos x-\sin x}{1}}{\frac{\cos x-\sin x}{\cos x}}=$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x\cdot\cancel{(\cos x-\sin x)}}{\cancel{\cos x-\sin x}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\cos x=\cos\frac{\pi}{4}=\boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$\lim_{x\to0}(x\cdot\operatorname{cotg} x)=\lim_{x\to0}x\cdot\frac{\cos x}{\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{x}{\sin x}\cdot\cos x=\lim_{x\to0}1\cdot\cos=\lim_{x\to0}\cos x$$

$=\cos 0=\boxed{1}$

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sqrt{1-\operatorname{tg}x}-\sqrt{1+\operatorname{tg}x}}{\sin 2x}=\lim_{x\to\pi}\frac{(\sqrt{1-\operatorname{tg}x}-\sqrt{1+\operatorname{tg}x})\cdot(\sqrt{1-\operatorname{tg}x}+\sqrt{1+\operatorname{tg}x})}{2\sin x\cos x\cdot(\sqrt{1-\operatorname{tg}x}+\sqrt{1+\operatorname{tg}x})}=$$

$$=\lim_{x\to\pi}\frac{1-\operatorname{tg}x-(1+\operatorname{tg}x)}{2\sin x\cos x(\sqrt{1-\operatorname{tg}x}+\sqrt{1+\operatorname{tg}x})}=-\lim\frac{2\operatorname{tg}x}{\text{dtto}}=-\lim\frac{2\cdot\frac{\sin x}{\cos x}}{\text{dtto}}=$$

$$=\lim_{x\to\pi}-\frac{\frac{2\cdot\sin x}{\cos x}}{\underbrace{2\cdot\sin x\cos x\cdot(\sqrt{1-\operatorname{tg}x}+\sqrt{1+\operatorname{tg}x})}}=\lim_{x\to\pi}-\frac{\cancel{2\cdot\sin x}}{\cancel{2\cdot\sin x}\cos^2 x\cdot(\text{dtto})}$$

1

$$=\lim_{x\to\pi}-\frac{1}{\cos^2 x(\sqrt{1-\operatorname{tg}x}+\sqrt{1+\operatorname{tg}x})}=-\frac{1}{(-1)^2\cdot(\sqrt{1-0}+\sqrt{1+0})}=\boxed{-\frac{1}{2}}$$

π

$\cos\pi=-1$, $\operatorname{tg}\pi=0$