Z učebnice pro Vysokou školu ekonomickou

Př. 1/str. 228

$$\int (x^5 - 2\sin x + 3x - \frac{1}{x} + 3)\,dx = \int x^5\,dx - 2\cdot\int \sin x\,dx + 3\cdot\int x\,dx - 2\int \frac{1}{x}\,dx + 3\cdot\int 1\,dx =$$

$$\frac{x^6}{6} - 2\cdot(-\cos x) + \frac{3}{2}\cdot\frac{x^2}{2} - 2\cdot\ln|x| + 3x + c =$$

$$= \underline{\frac{1}{6}x^6 + 2\cos x + \frac{3}{2}x^2 - 2\ln|x| + 3x + c}$$

Př. 4/228

$$\int \frac{\sqrt{x}-1}{x^3\sqrt{x}}\,dx = \int (x^{\frac{1}{2}}-1)\cdot x^{-3}\cdot x^{-\frac{1}{2}}\,dx = \int (x^{\frac{1}{2}}-1)\cdot x^{-\frac{7}{2}}\,dx =$$

$$= \int (x^{-3} - x^{-\frac{7}{2}})\,dx = \int x^{-3}\,dx - \int x^{-\frac{7}{2}}\,dx = \frac{x^{-2}}{-2} - \frac{x^{-\frac{5}{2}}}{-\frac{5}{2}} =$$

$$= -\frac{1}{2x^2} + \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{x^{\frac{5}{2}}} = \underline{-\frac{1}{2x^2} + \frac{2}{5\sqrt{x^5}}}$$

Př. 3/str. 229

$$\int \frac{\ln x}{x}\,dx = \int \ln x \cdot \frac{1}{x}\,dx = \ln x \cdot \ln x - \int \frac{1}{x}\ln x\,dx =$$

$u = \ln x$ $\quad v' = \frac{1}{x}$

$u' = \frac{1}{x}$ $\quad v = \ln x$

$$= \ln^2 x - \int \frac{\ln x}{x}\,dx$$ Dosadíme pomocí

$$\underbrace{\int \frac{\ln x}{x}\,dx}_{\text{stejné}} = \ln^2 x - \underbrace{\int \frac{\ln x}{x}\,dx}_{\text{stejné}}$$

$$2\cdot\int \frac{\ln x}{x} = \ln^2 x \quad |:2$$

$$\int \frac{\ln x}{x} = \underline{\frac{1}{2}\ln^2 x}$$

Př. resh. 231

$$\int x^3 e^x dx = x^3 e^x - \int 3x^2 e^x dx = x^3 e^x - 3\int x^2 e^x dx =$$

$u = x^3 \quad v' = e^x$

$u' = 3x^2 \quad v = e^x$

$u = x^2 \quad v' = e^x$

$u' = 2x \quad v = e^x$

$$= x^3 e^x - 3\cdot[x^2 e^x - \int 2x e^x dx = x^3 e^x - 3\cdot[x^2 e^x - 2\int x e^x dx =$$

$u = x \quad v' = e^x$

$u' = 1 \quad v = e^x$

$$= x^3 e^x - 3\cdot[x^2 e^x - 2\cdot(x e^x - \int e^x] = \underline{\underline{x^3 e^x - 3\cdot[x^2 e^x - 2(x e^x - e^x)]}}$$ lze ještě roznásobit

---

Př. 1/232 $\int \frac{1}{\sqrt{2x-1}} dx$ pro $x > \frac{1}{2}$ =

Subst. $2x - 1 = y$

$dy = 2\,dx$

$dx = \frac{1}{2} dy$

$$= \int (2x-1)^{\frac{1}{2}} dx = \int y^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2} dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int y^{-\frac{1}{2}} dy = \frac{1}{2}\cdot\frac{y^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{1}\cdot y^{\frac{1}{2}} = \sqrt{y} = \underline{\sqrt{2x-1} + c}$$

Př. 3/232 $\int \frac{x}{e^{x^2}} dx = \int x \cdot e^{-x^2} dx = \int e^{-x^2} x\,dx =$

Subst. $y = -x^2$

$dy = -2x\,dx$

$x\,dx = -\frac{1}{2} dy$

$$= \int e^y \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) dy = -\frac{1}{2}\int e^y dy =$$

$$= -\frac{1}{2} e^y = \underline{\underline{-\frac{1}{2} e^{-x^2}}}$$

Př. ze sb. 237 – NOVÝ TYP ÚLOHY je ve sbírce se sb. 15, mat. oběž 13

$$\int \operatorname{tg} x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\int \frac{-\sin x}{\cos x} = -\int \underbrace{\frac{1}{\cos x}}_{\text{je funkce } f} \cdot \underbrace{(-\sin x)\,dx}_{\text{je derivace } f' \text{ funkce } f}$$

Za předpokladu, že v intervalu I má daná funkce f derivaci f', pak provedeme substituci $y = f(x) \Rightarrow dy = f'(x)\,dx$. Dostáváme:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\int \frac{-\sin x}{\cos x}\,dx = \qquad \text{Sub. } y = \cos$$

$$y' = -\sin x$$

$$= -\int \frac{1}{\cos x}\cdot(-\sin x)\,dx = -\int \frac{1}{y}\,dy = -\ln|y| = \qquad dy = -\sin x\,dx$$

$$= -\ln|\cos x|$$

Jednodušší postup je ve sb. 1 v příkladech z nyní kontrolované sbírky (viz sešit vlevo)

Př. 1/236

$$\int \frac{1}{x^2+x}\,dx = \int \frac{1}{x(x+1)}\,dx = \int\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)dx$$

, neboť lze výpočtem ověřit, že $\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{x+1-x}{x(x+1)} = \frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x^2+x}$

$$= \int \frac{1}{x}\,dx - \int \frac{1}{x+1}\,dx = \ln|x| - \ln|x+1|$$

a podle vzorce: $\ln a - \ln b = \ln\frac{a}{b}$ platí: $= \ln\frac{|x|}{|x+1|} = \ln\left|\frac{x}{x+1}\right|$

Příklady ze sbírky Ivana Bušek

Sb. 507

$$\int \frac{x}{\sqrt{x}}\,dx = \int x\cdot x^{-\frac{1}{2}}\,dx = \int x^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{x^{1+\frac{1}{2}}}{1+\frac{1}{2}} = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}\cdot\sqrt{x^3} = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + C$$

Sb. 509

$$\int \frac{\sqrt{x} - 3x^3 + x\cos x}{x}\,dx = \int\left(\frac{\sqrt{x}}{x} - \frac{3x^3}{x} + \frac{x\cos x}{x}\right)dx =$$

$$\int\left(x^{\frac{1}{2}-1} - 3x^2 + \cos x\right)dx = \int x^{-\frac{1}{2}}\,dx - 3\int x^2\,dx + \int \cos x\,dx = \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} - 3\cdot\frac{x^3}{3} +$$

$$\sin x = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} - x^3 + \sin x = 2\sqrt{x} - x^3 + \sin x$$

Př. ze sb. 509

$$\int \frac{1}{1+\underbrace{\cos 2x}_{\text{VZOREC}}}dx = \int \frac{1}{\underbrace{1+\cos^2 x}_{}-\sin^2 x}dx = \int \frac{1}{\cos^2 x+\cos^2 x}dx = \int \frac{1}{2.\cos^2 x}dx =$$

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ $\quad = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \frac{1}{2}\,\mathrm{tg}\, x + c$

Př. ze sb. 511

$$\int \sin^2 x\,dx = \int \sin x . \sin x\,dx = -\sin x\cos x - \int -\cos x . \cos x\,dx =$$

$U = \sin x$ $\quad V' = \sin x$

$U' = \cos x$ $\quad V = -\cos x$

$$= -\sin x\cos x + \int \cos^2 x\,dx = -\sin x\cos x + \int (1-\sin^2 x)\,dx =$$

$$= -\sin x\cos x + \underbrace{\int 1\,dx}_{=x} - \int \sin^2 x\,dx \quad \text{... dostáváme rovnici}$$

$$\int \sin^2 x = -\sin x\cos x + x - \int \sin^2 x\,dx$$

$$2.\int \sin^2 x = x - \sin x\cos x$$

$$\int \sin^2 x = \frac{1}{2}(x - \sin x\cos x + c)$$

Př. ze sb. 510 $\quad \int \cos(3x-1)\,dx =$

Sub. $y = 3x-1$

$dy = 3dx$

$dx = \frac{1}{3}dy$

$$= \int \cos y \cdot \frac{1}{3}dy = \frac{1}{3}\int \cos y\,dy =$$

$$= \frac{1}{3}\sin y = \frac{1}{3}\sin(3x-1) + c$$

59.6/512 a 513

a) $\int \frac{x^2}{\sqrt{x}}dx = \int x^2 . x^{-\frac{1}{2}}dx = \int x^{\frac{3}{2}}dx = \frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} = \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} = \frac{2}{5}\sqrt{x^5} = \frac{2}{5}\sqrt{x^4.x} = \frac{2}{5}x^2\sqrt{x} + c$

---

b) $\int (4x^3 - 6\sqrt{x})\,dx = 4.\int x^3 dx - 6\int x^{\frac{1}{2}}dx = 4.\frac{x^4}{4} - 6.\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = x^4 - 6.\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} =$

$= x^4 - 6.\frac{2}{3}\sqrt{x^3} = x^4 - 4x\sqrt{x} + c$

c) $\int(x+2)^2\cdot(5x^2-4x)\,dx = \int(x^2+4x+4)\cdot(5x^2-4x)\,dx =$

$\int(5x^4+20x^3+20x^2-4x^3-16x^2-16x)\,dx = \int(5x^4+16x^3+4x^2-16x)\,dx$

$= 5\cdot\int x^4dx + 16\cdot\int x^3dx + 4\cdot\int x^2dx - 16\cdot\int x\,dx =$

$= 5\cdot\frac{x^5}{5} + 16\cdot\frac{x^4}{4} + 4\cdot\frac{x^3}{3} - 16\cdot\frac{x^2}{2} = \underline{\underline{x^5+4x^4+\frac{4}{3}x^3-8x^2+c}}$

Př. 59.7 ze str. 513

a) $\int\left(\frac{1}{x^3}-\sin x\right)dx = \int x^{-3}dx - \int \sin x\,dx = \frac{x^{-3+1}}{-3+1} - (-\cos x) = \frac{x^{-2}}{-2} + \cos x =$

$\cos x - \frac{1}{2}x^{-2} = \underline{\underline{\cos x - \frac{1}{2x^2}+c}}$

b) $\int\left(\frac{3-x^2}{x}\right)^2dx = \int\frac{9-6x^2+x^4}{x^2}dx = \int\left(\frac{x^4}{x^2}-\frac{6x^2}{x^2}+\frac{9}{x^2}\right)dx =$

$= \int x^2dx - 6\cdot\int 1\,dx + 9\cdot\int x^{-2} = \frac{x^3}{3} - 6x + 9\cdot\frac{x^{-1}}{-1} = \underline{\underline{\frac{x^3}{3}-6x-\frac{9}{x}+c}}$

c) $\int\left(x^2\cdot\sqrt[3]{x} - 3\sin x - 2^x\right)dx = \int\left(\sqrt[3]{x^7} - 3\cdot\sin x - 2^x\right)dx =$

$= \int x^{\frac{7}{3}}dx - 3\cdot\int \sin x\,dx - 1\cdot\int 2^xdx = \frac{x^{\frac{10}{3}}}{\frac{10}{3}} - 3\cdot(-\cos x) - \frac{2^x}{\ln 2} =$

$\underline{\underline{\frac{3}{10}x^3\cdot\sqrt[3]{x} + 3\cos x - \frac{2^x}{\ln 2}}}$

Př. 59.8 ze str. 513

a) $\int\left(\frac{3}{\sqrt{x}} + \frac{5}{\sqrt[3]{x^2}} + \cos x\right)dx = \int\left(3\cdot x^{-\frac{1}{2}} + 5\cdot x^{-\frac{2}{3}} + \cos x\right)dx =$

$= 3\cdot\int x^{-\frac{1}{2}}dx + 5\cdot\int x^{-\frac{2}{3}}dx + \int\cos x\,dx = 3\cdot\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + 5\cdot\frac{x^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} + \sin x =$

$= 2\cdot3\cdot\sqrt{x} + 5\cdot3\sqrt[3]{x} + \sin x = \underline{\underline{6\sqrt{x} + 15\cdot\sqrt[3]{x} + \sin x + c}}$

b) $\int\left(\frac{x^2-x}{\sqrt{x}} + e^x\right)dx = \int\left(\frac{x^2}{\sqrt{x}} - \frac{x}{\sqrt{x}} + e^x\right)dx = \int\left(x^2\cdot x^{-\frac{1}{2}} - x\cdot x^{-\frac{1}{2}} + e^x\right)dx =$

$\int\left(x^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{1}{2}} + e^x\right)dx = \int x^{\frac{3}{2}}dx - \int x^{\frac{1}{2}}dx + \int e^xdx = \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + e^x =$

$= \frac{2}{5}\sqrt{x^5} - \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + e^x = \underline{\underline{\frac{2}{5}x^2\sqrt{x} - \frac{2}{3}x\sqrt{x} + e^x + c}}$

c) $\int \cot g^2 x\, dx = \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\, dx = \int \frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x}\, dx = \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x}\right) dx =$

$= \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1\right) dx = \int \frac{1}{\sin^2 x} - \int 1\, dx = \underline{\underline{-\cot g x - x + c}}$

Př. 59.14/514 $\int 2x \sin(x^2+1)\, dx = \int \sin(x^2+1) \cdot 2x\, dx =$ Sub. $y = x^2+1$

$= \int \sin y\, dy = -\cos y = \underline{\underline{-\cos(x^2+1)}}$ $dy = 2x\, dx$

Př. 59.15/514 $\int \sin 3x\, dx = \int \sin y \cdot \frac{dy}{3} = \frac{1}{3}\int \sin y\, dy =$

$= \frac{1}{3}(-\cos y) = \underline{\underline{-\frac{1}{3}\cos 3x + c}}$

Př. 59.16/514

$\int \sqrt{2x-5}\, dx = \int y^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{dy}{2} = \frac{1}{2}\int y^{\frac{1}{2}} dy = \frac{1}{2} \cdot \frac{y^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} =$ | $y = 2x-5$, $dy = 2dx$, $dx = \frac{dy}{2}$

$= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{y^3} = \underline{\underline{\frac{1}{3}\sqrt{(2x-5)^3} + c}}$

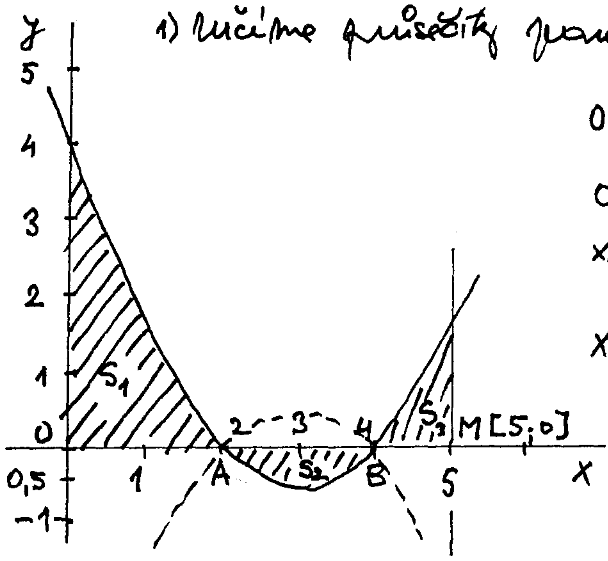
Podmínka: $2x-5>0$

$x > \frac{5}{2}$; $\left(\frac{5}{2}; \infty\right)$

Př. 60.1/515 – Nejdříve obsahy obrazců

Vypočítejte obsah obrazce ohraničeného parabolou $y = \frac{x^2}{2} - 3x + 4$, osou x, osou y a rovnoběžkou s osou y v bodě M[5;0].

1) Určíme průsečíky paraboly s osou x vyřešením rovnice



$0 = \frac{x^2}{2} - 3x + 4 \quad | \cdot 2$

$0 = x^2 - 6x + 4$

$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36-32}}{2}$

$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{4}}{2} =$ $x_1 = 2 \dots A[2;0]$, $x_2 = 4 \dots B[4;0]$

$S_1 = \int_0^2 \left(\frac{x^2}{2} - 3x + 4\right) dx = \left[\frac{x^3}{6} - \frac{3x^2}{2} + 4x\right]_0^2 =$

$= \frac{8}{6} - \frac{12}{2} + 8 - 0 = \boxed{\frac{10}{3}} = S_1$

Obsah S_2 je roven obsahu obrazce ohraničeného parabolou $y=-(\frac{1}{2}x^2-3x+4)$, proto počítáme:

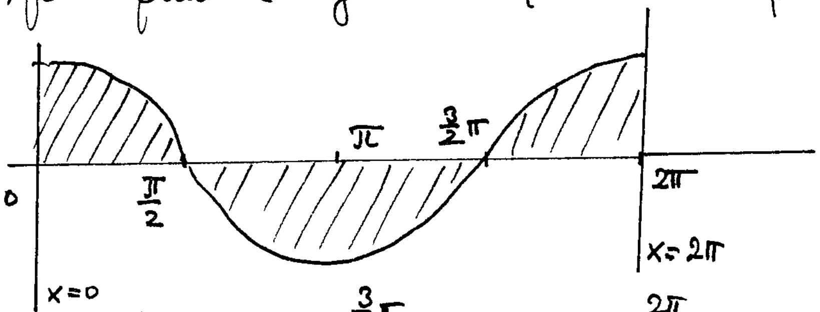
$$S_2=\int_4^{2}-\left(\frac{x^2}{2}-3x+4\right)dx=-\left[\frac{x^3}{6}-\frac{3x^2}{2}+4x\right]_4^2=-\left[\frac{32}{3}-24+16-\left(\frac{4}{3}-6+8\right)\right]_4^2=$$

$$=\frac{2}{3}$$

$$S_3=\int_5^4\left(\frac{x^2}{2}-3x+4\right)dx=\left[\frac{x^3}{6}-\frac{3x^2}{2}+4x\right]_5^4=\frac{125}{6}-\frac{75}{2}+20-\left(\frac{32}{3}-24+16\right)=\frac{2}{3}$$

$S=\frac{10}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}=\frac{14}{3}$ Obsah daného obrazce je $\underline{\underline{\frac{14}{3}}}$ čtv. jednotek.

Př. 60.8 1527 Vypočítejte obsah obrazce ohraničeného grafem funkce $y=\cos x$, osou x a přímkami $x=0$, $x=2\pi$



$\sin\frac{\pi}{2}=1$

$\sin 0=0$

$\sin\frac{3}{2}\pi=-1$

$\sin\frac{\pi}{2}=1$

$\sin 2\pi=0$

~~sin~~

$$S(u)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx+\underbrace{\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi}-\cos x\,dx}_{\text{je pod osou } x\text{, proto mínus}}+\int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi}\cos x\,dx=$$

$$=\Big[\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}-\Big[\sin x\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi}+\Big[\sin x\Big]_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi}=1-0-\left[-1-(+1)\right]+\left[0-(-1)\right]=1+2+1=\boxed{4}$$

Př. 60.9 1527 Kvůli obrázku provedeme nejdříve tyto výpočty:

a) ~~Při~~ Určím vrcholy obou parabol pomocí extrému.

$y=x^2-4x+5$	$y=2^2-4.2+5$	$y=-x^2+4x-1$	$y=-(2^2)+4.2-1$
$y'=2x-4$	$y=1$	$y'=-2x+4$	$y=3$
$2x-4=0$	$V_1[2;1]$	$-2x+4=0$	$V_2=[2;3]$
$x=2$		$x=2$	

Průsečíky paraboly $y = x^2 - 4x + 5$

a) s osou x… tj. $y=0$

$x^2 - 4x + 5 = 0$

$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16-20}}{2} \Rightarrow$ průsečíky s osou x neexistují

b) s osou y… tj. $x=0$

$y = 0^2 - 4 \cdot 0 + 5$

$y = 5$

… $y = -x^2 + 4x - 1$

a) s osou x… tj. $y=0$

$-x^2 + 4x - 1 = 0 \quad | \cdot (-1)$

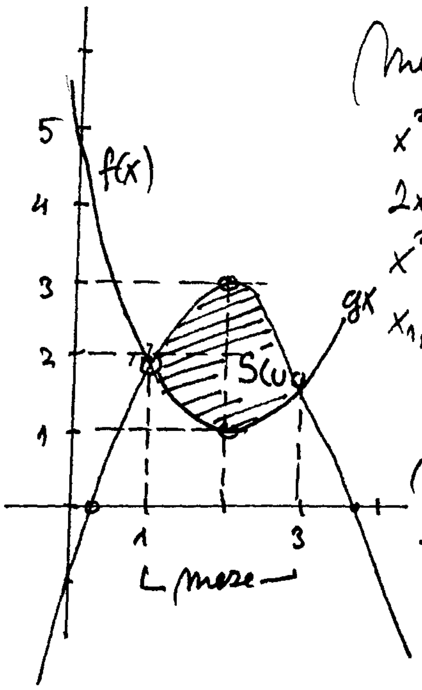
$x^2 - 4x + 1 = 0$

$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16-4}}{2} = \begin{cases} x_1 \doteq 0{,}26 \\ x_2 \doteq 3{,}7 \end{cases}$

b) s osou y tj. $x=0$

$y = -0^2 + 4 \cdot 0 - 1$

$y = -1$



Meze: $y = y$

$x^2 - 4x + 5 = -x^2 + 4x - 1$

$2x^2 - 8x + 6 = 0 \quad | : 2$

$x^2 - 4x + 3 = 0$

$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \begin{cases} 1 \\ 3 \end{cases}$

meze: $\langle 1; 3 \rangle$ = interval

Obsah vypočítáme pomocí **věty**: jsou-li v určité oblasti funkce f a g spojité v intervalu $\langle a; b \rangle$ $\wedge$ je-li $g(x) \leqq f(x)$, pak $S = \int_a^b f(x) - g(x)\, dx$!

~~$S = \int_1^3 [(x^2 - 4x + 5) - (-x^2 + 4x - 1)]\, dx = \int_1^3 (x^2 - 4x + 5 + x^2 - 4x + 1)\, dx$~~

To bylo špatně v publikaci. Podle uvedené věty to platí právě opačně:

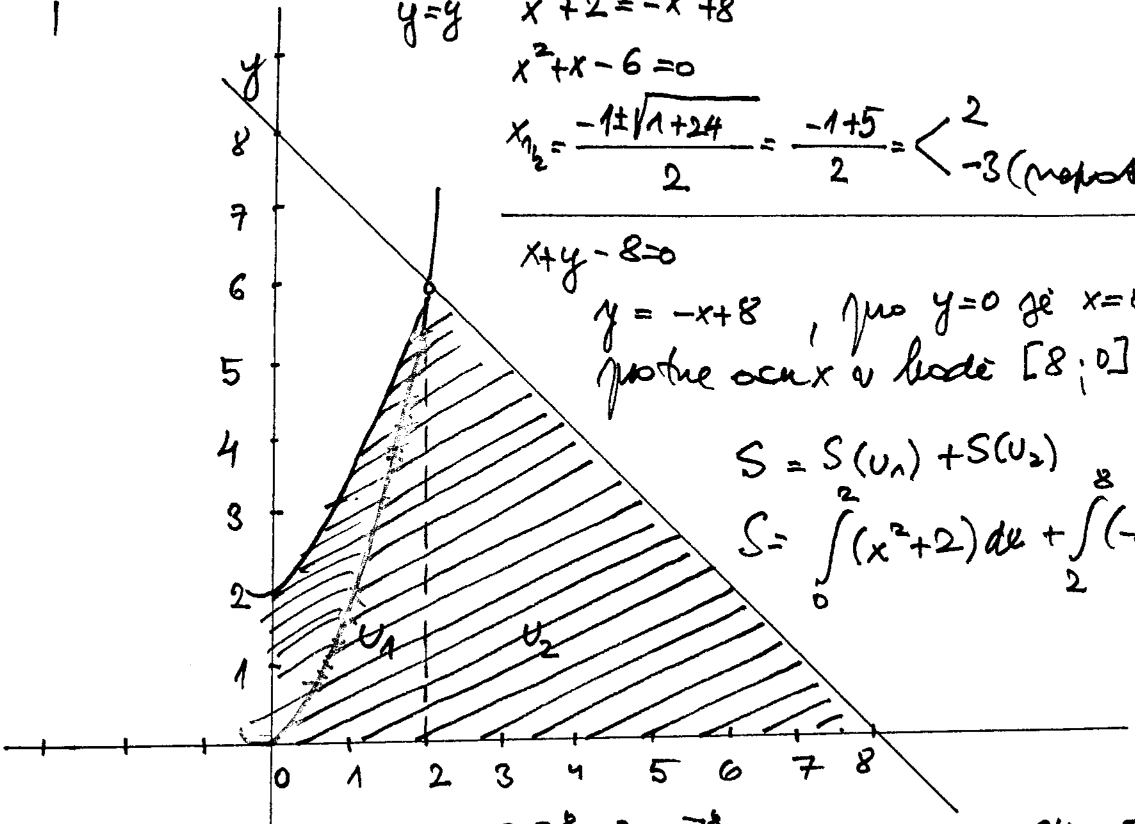
$$\int_1^3 [(-x^2 + 4x - 1) - (x^2 - 4x + 5)]\, dx = \int_1^3 (-x^2 + 4x - 1 - x^2 + 4x - 5)\, dx =$$

$$= \int_1^3 (-2x^2 + 8x - 6)\, dx = -2 \cdot \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^3 + 8 \cdot \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^3 - 6 \cdot [x]_1^3 =$$

$$= -2 \cdot \left[\frac{27}{3} - \frac{1}{3}\right] + 8 \cdot \left[\frac{9}{2} - \frac{1}{2}\right] - 6 \cdot [3 - 1] = -2 \cdot \frac{26}{3} + 8 \cdot 4 - 6 \cdot 2 = 20 - \frac{52}{3} = \boxed{\frac{8}{3}}$$

60.11/527 Vypočítejte obsah obrazce ohraničeného parabolou $y = x^2 + 2$, přímkou $x + y - 8 = 0$ a osami x, y.

I



$y = y \quad x^2+2 = -x+8$

$x^2+x-6=0$

$x_{1,2} = \frac{-1\pm\sqrt{1+24}}{2} = \frac{-1\pm 5}{2} = \begin{cases} 2 \\ -3 \text{ (nepotřebujeme)} \end{cases}$

$x+y-8=0$

$y = -x+8$, pro $y=0$ je $x=8$, přímka protne osu x v bodě $[8;0]$

$S = S(U_1) + S(U_2)$

$S = \int_0^2 (x^2+2)\,dx + \int_2^8 (-x+8)\,dx =$

$= \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 + \left[2x\right]_0^2 + \left[-\frac{x^2}{2}\right]_2^8 + \left[8x\right]_2^8 = \frac{8}{3} - 0 + 4 - 0 + \left(\frac{-64}{2} - \frac{-4}{2}\right) +$

$[8\cdot 8 - 8\cdot 2] = \frac{8}{3} + 4 - 32 + 2 + 64 - 16 = \frac{8}{3} + 22 = \boxed{24\frac{2}{3}}$

Př. 60.12 1527 Vypočítejte obsah obrazce ohraničeného parabolou $y = x^2 - 3x + 2$ a jejími tečnami v bodech $T_1[0;2]$ a $T_2[2;0]$

Nejdřív jsem řešil tak, abych si výpočty mohl ověřovat pomocí obrázků. Poučení lze najít v mat. otázce 15b) „Parabola v analytické geometrii".

$y = x^2 - 3x + 2$

$x^2 - 3x = y - 2$

$(x^2 - 3x + 2{,}25) - 2{,}25 = y - 2$

$(x - 1{,}5)^2 = y + 0{,}25$

$(\underbrace{x - 1{,}5}_{})^2 = 1 \cdot (y \underbrace{+0{,}25}_{})$

$m = 1{,}5 \qquad 2p = 1 \qquad n = -0{,}25$

$p = 0{,}5$

$\left(\frac{3}{2}\right)^2 = 1{,}5^2 = 2{,}25$ … pomocný výpočet k tomu, abych vytvořil druhou mocninu dvojčlenu a mohl použít vzorec pro parabolu a tečnu:

$(x - m)^2 = \pm 2p(y - n)$ .. pro $p>0$

$x^2 + ax + by + c = 0$ … parabola

$(x_0 - m)\cdot(x - m) = p(y_0 - n) + p(y - n)$ … tečna

$V = [m; n] \dots V[1{,}5; -0{,}25]$

Vrchol V lze též určit pomocí extrému.

Polohu vrcholu V budu používat při sestrojení grafu. Kvůli grafu určíme též průsečíky grafu s osami x, y.

$y' = 2x - 3 \quad 2x - 3 = 0 \quad x = 1{,}5 \;\Big|\; y = 1{,}5^2 - 3 \cdot 1{,}5 + 2 \quad y = -0{,}25$

$V[x; y] \dots V[1{,}5; -0{,}25]$

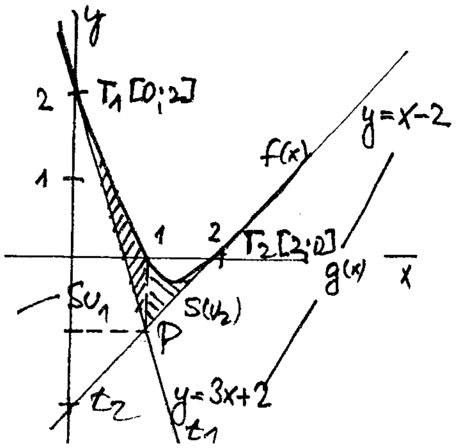
a) s osou x … jde o parabolu:

$x^2 - 3x + 2 = 0$

$x_{1,2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \dfrac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases} \quad x_1 = 1, \; x_2 = 2$

b) s osou y: $y = 0^2 - 3 \cdot 0 + 2$

$y = 2$



Rovnice tečen paraboly v bodech $T_{1,2}[x_0; y_0]$ najdeme rovněž v MO 15 b).

$t: (x_0 - m) \cdot (x - m) = p(y_0 - n) + p(y - n)$

Tečna v bodě $T_1[\underset{x_0; y_0}{0; 2}]$ $\quad V[1{,}5; -0{,}25]$

$(0 - 1{,}5) \cdot (x - 1{,}5) = 0{,}5 \cdot (2 + 0{,}25) + 0{,}5(y + 0{,}25)$

$-1{,}5x + 2{,}25 = 1 + 0{,}125 + 0{,}5y + 0{,}125$

$-1{,}5x + 1 = 0{,}5y$

$0{,}5y = -1{,}5x + 1 \quad | : 0{,}5$

$\boxed{y = -3x + 2} \dots t_1$

Tečna v bodě $T_2[\underset{x_0 \; y_0}{2; 0}]$

$(2 - 1{,}5) \cdot (x - 1{,}5) = 0{,}5 \cdot (0 + 0{,}25) + 0{,}5(y + 0{,}25)$

$0{,}5(x - 1{,}5) = 0{,}125 + 0{,}5y + 0{,}125$

$0{,}5x - 0{,}75 = 0{,}25 + 0{,}5y$

$0{,}5y = 0{,}5x - 1 \quad | : 0{,}5$

$\boxed{y = x - 2} \dots t_2$

Řešením soustavy rovnic určíme průsečík P tečen t_1 a t_2.

$y = -3x + 2 \quad y = x - 2 \;\Big|\; -3x + 2 = x - 2 \quad -4x = -4 \quad \boxed{x = 1}$

$y = 1 - 2 \Rightarrow \boxed{y = -1}$

$P[1; -1]$

Podle věty ze sh. 8 tohoto souboru je $g(x) \leq f(x) \Rightarrow$ výpočet

$$S = S_{U_1} + S_{U_2} = \int_0^1 [(x^2-3x+2)-(-3x+2)]\,dx + \int_1^2 [(x^2-3x+2)-(x-2)]\,dx =$$

$$= \int_0^1 (x^2 \cancel{-3x+2} \cancel{+3x-2})\,dx + \int_1^2 (x^2-3x+2-x+2)\,dx =$$

$$\int_0^1 x^2\,dx + \int_1^2 (x^2-4x+4)\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 - 4\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 + \left[4x\right]_1^2 =$$

$$\left(\frac{1}{3}-0\right) + \left(\frac{8}{3}-\frac{1}{3}\right) - 4\left(\frac{4}{2}-\frac{1}{2}\right) + (4.2-4) = \frac{1}{3}+\frac{7}{3}-6+8-4 = \frac{8}{3}-2 = \boxed{\frac{2}{3}}$$

Příklady ze staré uč. pro G z r. 1987

Př. 3/100 Vypočítejte obsah útvaru ohraničeného parabolami: $y = x^2-2x$ a $y = -x^2+4x$.

Kvůli grafu budeme teď počítat:

a) souřadnice průsečíků obou grafů s osou x (resp. g) a souřadnice vrcholů.

a) $y = x^2-2x$

$x^2-2x=0$ $\quad$ $y' = 2x-2$ $\quad$ $y = 1^2-2.1$

$x(x-2) = 0$ $\quad$ $2x-2=0$ $\quad$ $y=-1$

$x=0 \wedge x=2$ $\quad$ $x=1$ $\quad$ $V_1[1;-1]$

b) $y = -x^2+4x$

$-x^2+4x=0 \;|\cdot(-1)$

$\left.\begin{array}{l} x^2-4x=0 \\ x(x-4)=0 \end{array}\right\} x=0 \wedge x=4$

Meze = průsečíky obou parabol.

$y=y \quad x^2-2x = -x^2+4x$

$2x^2-6x=0 \quad |:2$

$x^2-3x=0 \nearrow x(x-3)=0$

$\Downarrow$

$x_1=0,\ x_2=3$

Vrchol: $y' = -2x+4$

$-2x+4=0$

$2x=4$

$x=2$

$y=-(2)^2+4.2$

$y=-4+8$

$y=4$

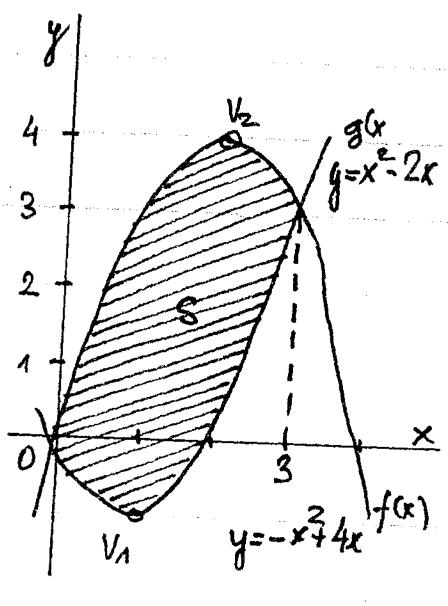
$V_2=[2;4]$

Podle věty na str. 8 tohoto svazku je $g(x) \leq f(x)$ v části roviny, kde jsou obě funkce spojité, proto:

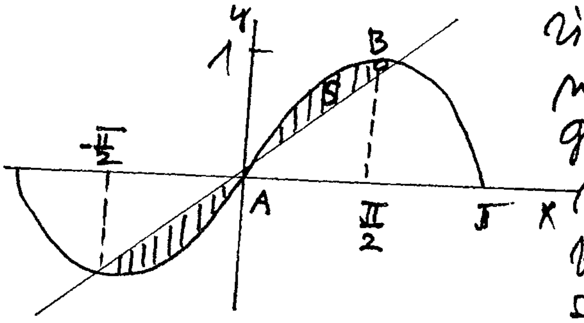
$$S = \int_0^3 [(-x^2+4x)-(x^2-2x)]\,dx =$$

$$= \int_0^3 (-2x^2+6x)\,dx = -2\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3 + 6\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^3 =$$

$$= -2\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3 + 3\left[x^2\right]_0^3 = -2\cdot\left(\frac{27}{3}\right)+3\cdot 9 = -18+27 = \boxed{9}$$



2.15/105 Vypočítejte obsah množiny ohraničené křivkou $y=\sin x$ a přímkou $y=\frac{2x}{\pi}$.



Úvodní poznámka: Úloha v učebnici není zcela správně formulována. Graf $y=\frac{2x}{\pi}$ není křivka, ale přímka. Výsledek v učebnici $(1-\frac{\pi}{4})$ odpovídá pouze 1. kvadrantu. Ten je třeba zdvojnásobit - viz obr.

$y=\frac{2x}{\pi} \dots y=\frac{2}{\pi}x \dots y \doteq 0{,}687x$, určíme 2 body přímky, abychom ji mohli narýsovat.

$x=0 \dots y=0 \dots A[0;0]$; $x=\frac{\pi}{2} \dots y=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2} \dots y=1$ $B[\frac{\pi}{2};1]$

Je zřejmé, že graf přímky protíná graf křivky v bodech A, B $\Rightarrow$ meze: $\langle 0;\frac{\pi}{2}\rangle$. Opět podle čísla na str. 8 tohoto svazku platí pro obsah S v 1. kvadrantu.

$$S=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin x-\frac{2}{\pi}x\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx-\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\,dx=$$

$$=\left[-\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{2}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=-0+1-\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{2}-0=1-\frac{\frac{\pi^2}{4}}{2}=$$

$$=1-\frac{\pi^2}{8}\cdot\frac{2}{\pi}=\boxed{1-\frac{\pi}{4}}$$

Stejně, jak bylo uvedeno...krát 2

$$2S=\left(1-\frac{\pi}{4}\right)\cdot 2=2-\frac{\pi}{2}=\boxed{2-\frac{\pi}{2}}$$

2.16/106 Vypočítejte obsah množiny (tj. útvaru) ohraničené
a) parabolou $y=4x-x^2$ a osou x,
b) parabolou $y=x^2-2x$ a osou x.

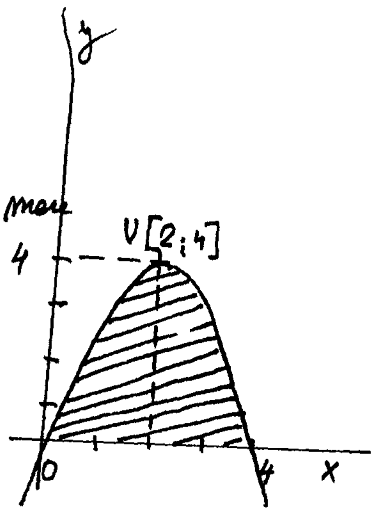
Řešení a)... průsečíky s osou x: $4x-x^2=0$

$x(4-x)=0 \left\langle \begin{matrix} x=0 \\ x=4 \end{matrix} \right\}$ jsou meze

Vrchol: $y'=-2x+4 \dots -2x+4=0$

$-2x=-4$

$x=2;\ y=4\cdot 2-2^2=4$



$$S=\int_0^4(4x-x^2)\,dx=$$

$$=\left[4\cdot\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_0^4=\left[2x^2-\frac{x^3}{3}\right]=2\cdot 4^2-\frac{4^3}{3}-(0-0)=32-\frac{64}{3}=\boxed{\frac{32}{3}}$$

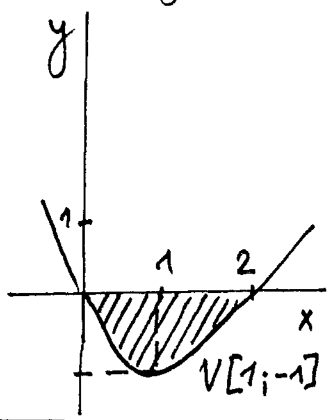
Řešení b) Průsečíky s osou x: $x^2-2x=0$

$x(x-2)=0 \quad \left< \begin{matrix} x=0 \\ x=2 \end{matrix} \right\}$ meze $\langle 0;2 \rangle$

Vrchol: $y'=2x-2$; $2x-2=0$

$2x=2$

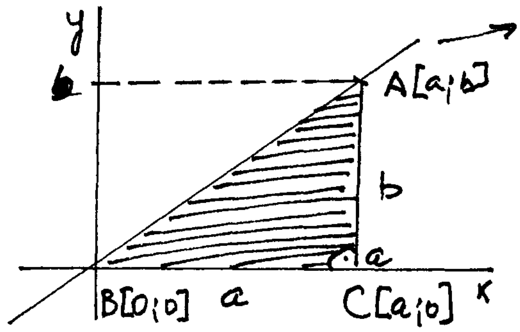
$x=1$; $y=1^2-2\cdot 1=-1$ $\quad V[1;-1]$



$$S=-\int_0^2 (x^2-2x)\,dx=-\left[\frac{x^3}{3}-2\cdot\frac{x^2}{2}\right]_0^2=-\left[\frac{x^3}{3}-x^2\right]_0^2=$$

$$=-\left(\frac{2^3}{3}-2^2-0\right)=-\left(\frac{8}{3}-4\right)=-\left(-\frac{4}{3}\right)=\boxed{\frac{4}{3}}$$

217/106 Pomocí integrálního počtu ověřte platnost vzorce $S=\frac{ab}{2}$ pro výpočet obsahu pravoúhlého $\triangle$ s vrcholy $A[a;b]$, $B[0;0]$, $C[a;0]$



přímka, která má směrnici $\frac{b}{a}$.

$y=kx$

$y=\frac{b}{a}x$

$$S_\triangle=\int_0^a \left(\frac{b}{a}x\right)dx=\frac{b}{a}\cdot\int_0^a x\,dx=\frac{b}{a}\cdot\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^a=$$

$$=\frac{b}{a}\cdot\left(\frac{a^2}{2}-0\right)=\frac{b}{a}\cdot\frac{a^2}{2}=\boxed{\frac{ab}{2}}$$

218/106 Vypočítejte obsah útvaru ohraničeného křivkou

a) $y=\cos x$ a přímkou $y=1-\frac{2x}{\pi}$ (Formulaci jsem vhodně upravil.)

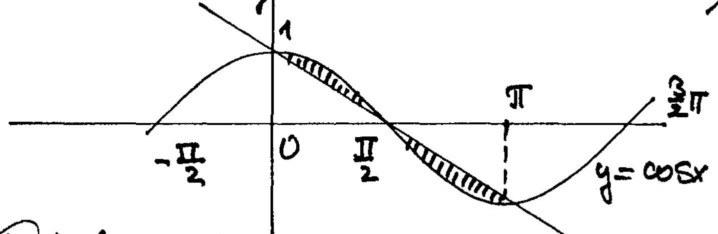
$y=1-\frac{2x}{\pi}$ upravíme na tvar

$y=kx+q \dots y=-\frac{2}{\pi}x+1$

Určíme průsečíky přímky s osami x, y (a $f(x)=\cos x$).

$x=0$, $y=1$

$x=\frac{\pi}{2}$; $y=-\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}+1$; $y=0$



Přímka a kosinusoida vymezí dva útvary, které mají shodný obsah, což učebnice neuvedla.

Meze $\langle 0; \frac{\pi}{2} \rangle$ pro S_1 a $\langle \frac{\pi}{2}; \pi \rangle$ pro S_2 $S_1 = S_2$

Pohledem na větu na sh. 8 platí:

$$S_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\cos x - \left(1 - \frac{2}{\pi}x\right) \right] dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos x - 1 + \frac{2}{\pi}x\right) dx = \left[\sin x - x + \frac{2}{\pi} \cdot \frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \left[\sin x - x + \frac{1}{\pi}x^2\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 - \frac{\pi}{2} + \frac{1}{\pi} \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = 1 - \frac{\pi}{2} + \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi^2}{4} = 1 - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} =$$

$$= 1 + \frac{-2\pi + \pi}{4} = 1 + \frac{-\pi}{4} = 1 - \frac{\pi}{4} = \boxed{\frac{4-\pi}{4} \quad (\doteq 0{,}2146\ldots)}$$

Výsledek v učebnici $\frac{3\pi - 8}{8}$ není zřejmě správný.
Pohledem na graf by měl být S dvojnásobný, tedy

$$\frac{4-\pi}{4} \cdot 2 = \boxed{\frac{4-\pi}{2} \doteq 0{,}4292\ldots}$$

---

b) Základní test – viz předchozí příklad:

$y = \sin^2 x$, $\underbrace{y = 0}$, $x = \frac{\pi}{2}$

rovnice přímky, což je osa x

Při výpočtu použiji řešení $\int \sin^2 x\, dx = \frac{1}{2}(x - \sin x \cos x)$, které je na sh. 4 tohoto svazku:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\, dx = \frac{1}{2}\Big[(x - \sin x \cos x)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2} - 1.0 - (0-0)\right] = \boxed{\frac{\pi}{4}}$$

V učebnici je rovněž uveden výsledek $\frac{\pi}{4}$, avšak ze vztahu $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos 2x}{2}\right) dx$.

---

c) Test opět stejný, avšak $y = \frac{1}{\cos^2 x}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{4}$

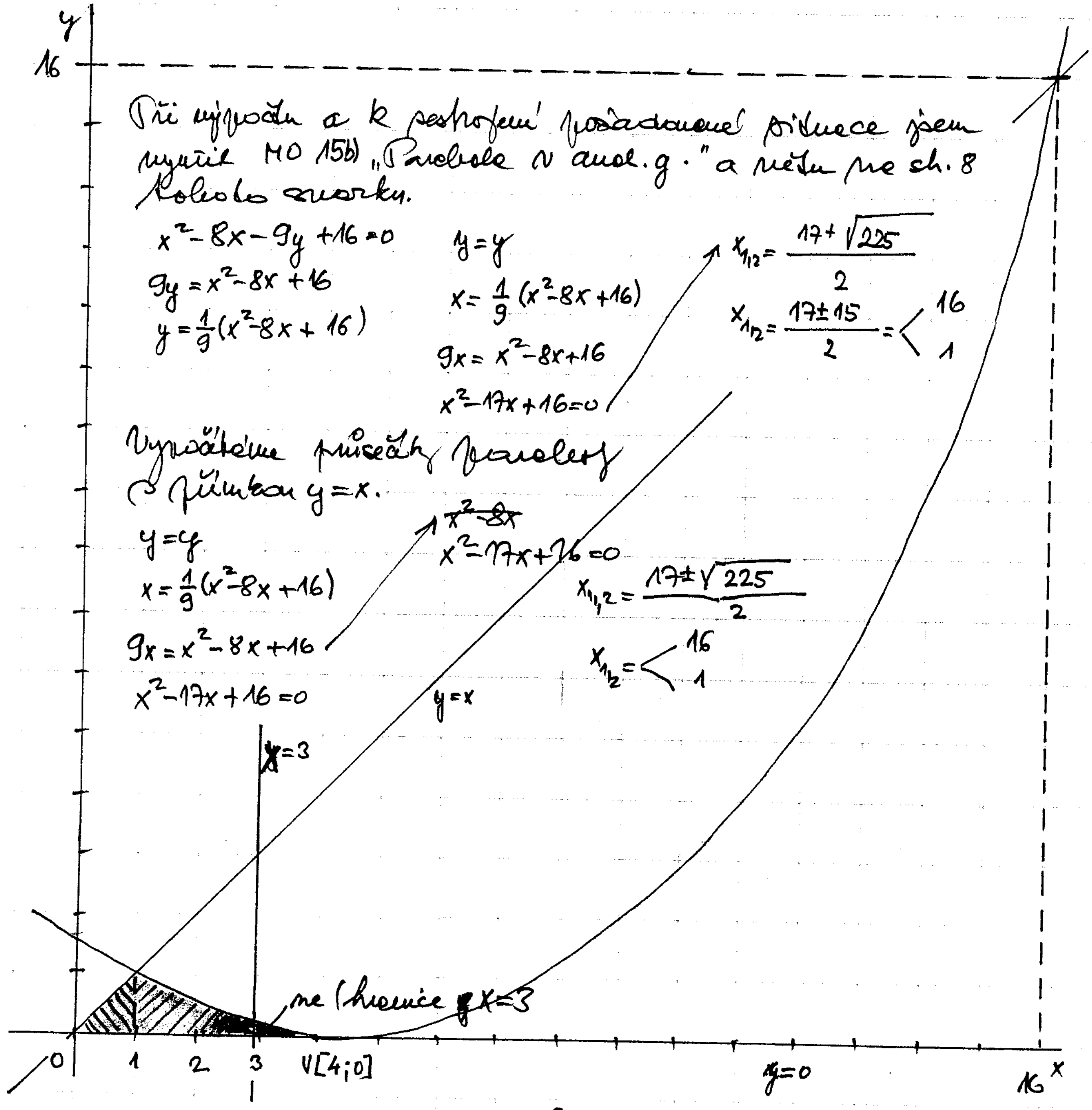
$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x}\, dx = \Big[\operatorname{tg} x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} = (1 - 0) = \boxed{1}$$

---

d) $y = \cos^2 x$, $y = 0$, $x = 0$. Použiji jen výpočet z mat. ol. č. 13 ne sh. 13

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\, dx = \frac{1}{2}\Big[\sin x \cos x + x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\left[1.0 + \frac{\pi}{2} - 0.1 + 0\right] = \boxed{\frac{\pi}{4}}$$

219/106 Vypočítejte obsah útvaru ohraničeného křivkou danou rovnicí $x^2-8x-9y+16=0$ a přímkami $y=x$, $y=0$, $x=3$.



Při výpočtu a k zakreslení požadované situace jsem využil MO 15b) „Parabola v anal. g." a řešení ve sb. 8 Koleslo zvorky.

$x^2-8x-9y+16=0$

$9y=x^2-8x+16$

$y=\frac{1}{9}(x^2-8x+16)$

$y=y$

$x=\frac{1}{9}(x^2-8x+16)$

$9x=x^2-8x+16$

$x^2-17x+16=0$

$x_{1,2}=\frac{17+\sqrt{225}}{2}$

$x_{1,2}=\frac{17\pm 15}{2}=\begin{cases}16\\1\end{cases}$

Vypočítáme průsečíky paraboly s přímkou $y=x$.

$y=y$

$x=\frac{1}{9}(x^2-8x+16)$

$9x=x^2-8x+16$

$x^2-17x+16=0$

$\cancel{x^2-8x}$

$x^2-17x+16=0$

$x_{1,2}=\frac{17\pm\sqrt{225}}{2}$

$x_{1,2}=\begin{cases}16\\1\end{cases}$

Meze $\langle 0;1\rangle$ a $\langle 1;3\rangle$ $S=\int_0^1 x\,dx+\int_1^3 \frac{1}{9}(x^2-8x+16)\,dx=$

$=\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1+\frac{1}{9}\left[\frac{x^3}{3}-8\cdot\frac{x^2}{2}+16x\right]=\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1+\frac{1}{9}\left[\frac{x^3}{3}-4x^2+16x\right]_1^3=$

Souhlasí s výsledkem v učebnici.

$=\frac{1}{2}-0+\frac{1}{9}\cdot\left[\frac{27}{3}-4\cdot 9+16\cdot 3-\left(\frac{1}{3}-4+16\right)\right]=$

$=\frac{1}{2}+\frac{1}{9}\left[9-36+48-\left(\frac{1}{3}-4+16\right)\right]=\frac{1}{2}+\frac{1}{9}\left(21-\frac{37}{3}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{9}\cdot\frac{26}{3}=\frac{1}{2}+\frac{26}{27}=\boxed{\frac{79}{54}}$

2.19b/106 Text stejný, avšak: $y=x,\ 3x^2+y-4=0,\ x=0,\ y=3$.

S ohledem na graf a volbu postupu počítáme:

a) Určíme průsečíky paraboly s osou x:

$y=-3x^2+4$

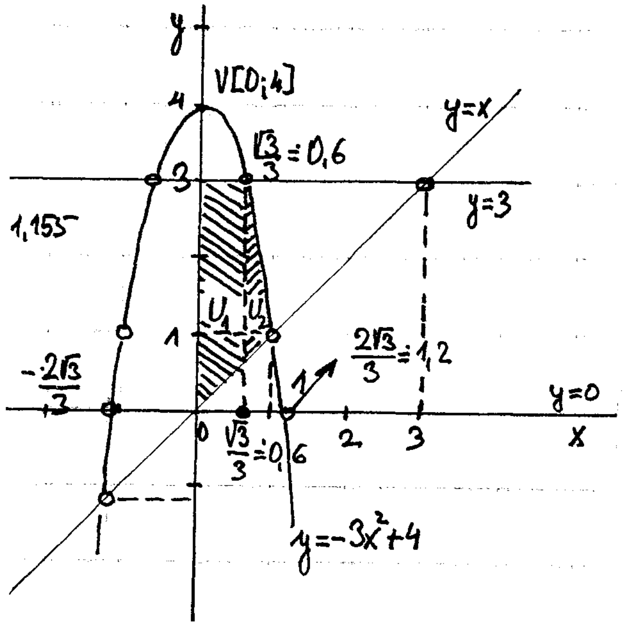
$-3x^2+4=0$

$3x^2=4$

$x^2=\frac{4}{3}$

$\rightarrow x_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{4}{3}}$

$x_{1,2}=\pm\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}= \left\langle \begin{array}{l}\frac{2\sqrt{3}}{3} \doteq 1{,}155 \\ -\frac{2\sqrt{3}}{3}\end{array}\right.$



Průsečík přímek $y=3$ a $y=x$

$y=y \Rightarrow x=3 \ldots y=3$

Průsečíky paraboly s přímkou $y=3$

$3=-3x^2+4$

$3x^2=1$

$x_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{1}{3}}=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$

Průsečík paraboly s přímkou $y=x$.

$y=y$

$x=-3x^2+4$

$3x^2+x-4=0$

$x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{49}}{6}=\frac{-1\pm 7}{6}= \left\langle \begin{array}{l} x_1=-1\frac{1}{3} \\ x_2=1\end{array}\right.$

$S=S_{U_1}+S_{U_2}$ meze $\left\langle 0;\frac{\sqrt{3}}{3}\right\rangle$ a $\left\langle \frac{\sqrt{3}}{3};1\right\rangle$

$$S=\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}}(3-x)\,dx+\int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{1}\left[(-3x^2+4)-x\right]dx=\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}}(3-x)\,dx+\int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{1}(-3x^2-x+4)\,dx=$$

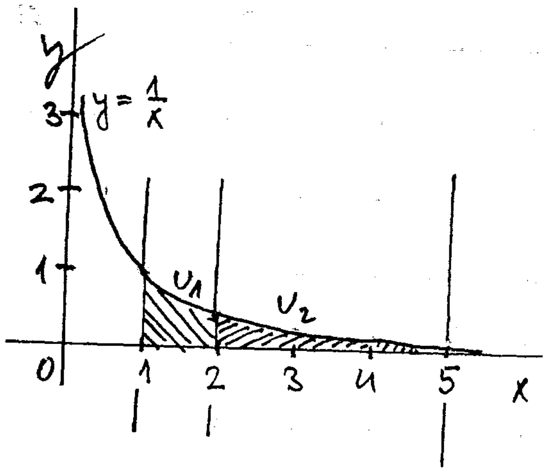
$$=\Big[3x\Big]_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}}-\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}}-\cancel{3}\cdot\left[\frac{x^3}{\cancel{3}}\right]_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{1}-\left[\frac{x^2}{2}\right]_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{1}+\Big[4x\Big]_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{1}=$$

$$=3\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}-\left[\frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}{2}\right]-\left[1-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3\right]-\left[\frac{1}{2}-\frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}{2}\right]+\left[4-4\frac{\sqrt{3}}{3}\right]=$$

$$=\sqrt{3}-\cancel{\frac{\frac{3}{9}}{2}}+\frac{(\sqrt{3})^3}{27}-\frac{1}{2}+\cancel{\frac{\frac{3}{9}}{2}}+4-\frac{4}{3}\sqrt{3}=\frac{5}{2}-\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{(\sqrt{3})^3}{27}=$$

$\boxed{\frac{5}{2}+\frac{(\sqrt{3})^3-9\sqrt{3}}{27}} \doteq 2{,}115$ ... Ve výsledcích je $\frac{45-4\cdot\sqrt{3}}{18}$, což má stejnou hodnotu 2,115. V uč. je však omylem uvedena tato hodnota jako záporné číslo, což není pravda.

Př. 2.21/106 Vypočítejte obsah útvaru ohraničeného křivkou $y=\frac{1}{x}$ a
a) přímkami $x=1$, $x=2$ Text jsem upravil.
b) " $x=2$, $x=5$



Řešení a)

$S_4=\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx=\left[\ln x\right]_1^2=\ln 2-\ln 1=\ln\frac{2}{1}=\boxed{\ln 2}$

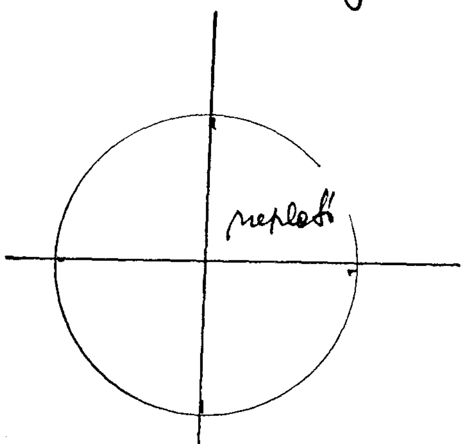
$\doteq 0{,}693$ (na kalk.)

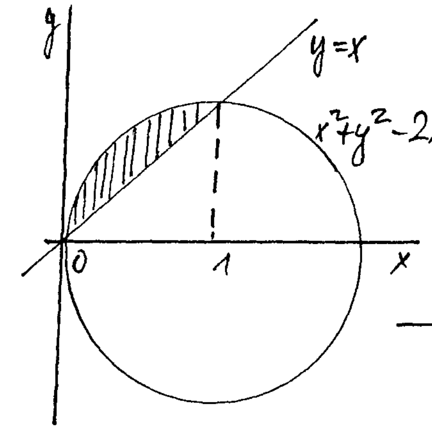
Řešení b) $\int_2^5 \frac{1}{x}\,dx=\left[\ln x\right]_2^5=\ln 5-\ln 2=\boxed{\ln\frac{5}{2}}\doteq 0{,}916$

Výpočet objemu – sb. mat. příloh ze str...

str. 520 Vypočítejte objem tělesa T, které vznikne rotací kolem osy x vyšrafovaného obrazce ohraničeného částí kružnice $x^2+y^2-2x=0$ a přímkou $y=x$.

Rovnici $x^2+y^2-2x=0$ upravíme na středový tvar rovnice kružnice $(x-m)^2+(y-n)^2=r^2$, kde r je střed kružnice se středem $S[m;n]$





$x^2+y^2-2x=0$

$(x^2-2x+1)-1+y^2=0$

$(x-1)^2+y^2=1$

$(x-1)^2+(y-0)^2=1^2$

$\Rightarrow m=1,\ n=0;\ S[1;0]$

Pro potřebu výpočtu potřebujeme další úpravu rovnice kružnice:

$y^2=1-(x-1)^2$

$y^2=1-(x^2-2x+1)$

$y^2=\cancel{1}-x^2+2x-\cancel{1}$

$y^2=2x-x^2$

$y=\sqrt{2x-x^2}$

Meze jsou průsečíky kružnice $x^2+y^2-2x=0$ a přímky $y=x$ (to dosadit)

$x^2+x^2-2x=0$

$2x^2-2x=0 \quad |:2$

$x^2-x=0$

$x(x-1)=0 \ < \ x_1=0,\ x_2=1$

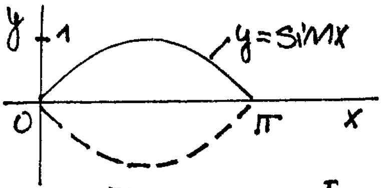
Meze $\langle 0;1\rangle$

$$V=\pi\int_0^1\left(\sqrt{2x-x^2}\right)^2dx-\pi\int_0^1x^2dx=\dots \quad \text{VZOREC: } V=\int_a^b f^2(x)\,dx$$

$$=\pi\cdot\int_0^1(2x-x^2)dx-\int_0^1x^2dx=\pi\left[\frac{2x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_0^1-\pi\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\pi\left[x^2-\frac{x^3}{3}\right]_0^1-$$

$$-\pi\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\pi\left(1-\frac{1}{3}\right)-\pi\cdot\frac{1}{3}=\pi-\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{3}=\pi-\frac{2}{3}\pi=\boxed{\frac{1}{3}\pi}$$

2.30/110 ze staré uč. pro G: Vypočítejte objem tělesa, které vznikne rotací jednoho oblouku sinusoidy kolem osy x.

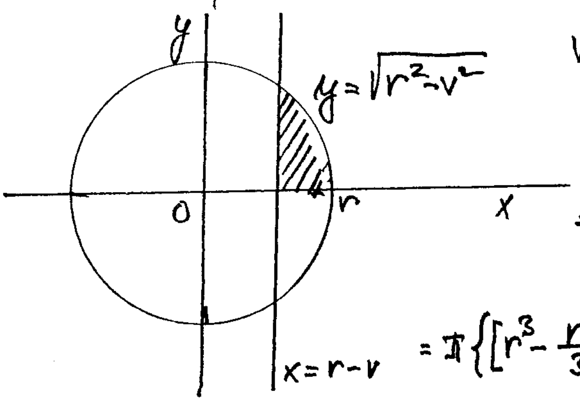


$V=\pi\int_0^\pi(\sin x)^2dx=\pi\cdot\int_0^\pi$ podle příkladu na str. 4 tohoto svazku platí:

$$=\pi\int_0^\pi\sin^2x\,dx=\pi\left[\frac{1}{2}(x-\sin x\cos x)\right]_0^\pi=\frac{\pi}{2}\left[x-\sin x\cos x\right]_0^\pi=$$

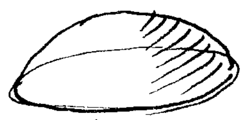
$$=\frac{\pi}{2}\left[\pi-0-0\right]=\frac{\pi^2}{2}=\boxed{\frac{1}{2}\pi^2}\doteq 4{,}934 \text{ (krych. jednotek)}$$

Př. 22/176 z nové uč. M pro G: Vypočítejte objem kulové úseče, která je částí koule s poloměrem r a výškou v.



$$V=\pi\cdot\int_{r-v}^{r}\left(\sqrt{r^2-x^2}\right)^2dx=\pi\int_{r-v}^{r}(r^2-x^2)dx=$$

$$=\pi\left[r^2x-\frac{x^3}{3}\right]_{r-v}^{r}=$$



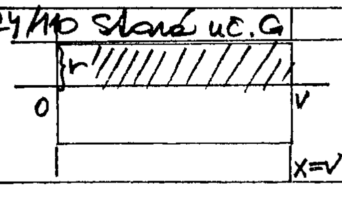
úseč

$$=\pi\left\{\left[r^3-\frac{r^3}{3}\right]-\left[r^2\cdot(r-v)-\frac{(r-v)^3}{3}\right]\right\}=$$

$$=\pi\left[\frac{2}{3}r^3-r^3+r^2v+\frac{r^3-3r^2v+3rv^2-v^3}{3}\right]=\pi\left[\cancel{-\frac{r^3}{3}}+\cancel{r^2v}+\cancel{\frac{r^3}{3}}-\cancel{r^2v}+rv^2-\frac{v^3}{3}\right]=$$

$$=\pi\left(rv^2-\frac{v^3}{3}\right)=\pi\cdot\frac{3rv^2-v^3}{3}=\frac{\pi v^2(3r-v)}{3}=\boxed{\frac{\pi v^2}{3}(3r-v)}$$

2.24/110 stará uč. G



$y=r$ Odvození V válce: $V=\pi\int_0^v r^2dx=\pi\left[r^2x\right]_0^v=$

$$=\pi\cdot r^2v-0=\boxed{\pi r^2v}$$