8a) KOMBINATORIKA

$V(3,10) - V(2,9)$

1) VSTUPNÍ ÚLOHY

Příklad 1 (1.1/11-uč.): Určete počet všech trojciferných přirozených čísel, v jejichž dekadickém zápisu se každá číslice vyskytuje nejvýše jednou.

K usnadnění řešení použijeme např. číslo 7 6 3

sta desítky jednotky

STA 1 2 3 4 5 6 7 8 9

K nápadu stovek lze použít všechny číslice od 1 do 9, nulu nelze použít neboť např. 049 není trojciferné přirozené číslo. Lze tedy použít $\boxed{9}$ číslic.

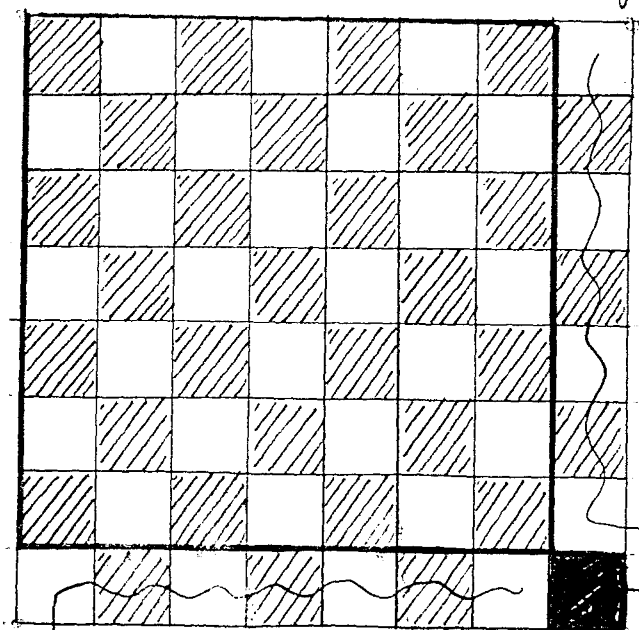
DESÍTKY 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

K nápadu desítek lze použít všechny číslice od 0 do 9 kromě číslice 7. Lze tedy použít $\boxed{9}$ číslic.

JEDNOTKY 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Z počtu 10 číslic nelze k nápadu jednotek použít číslice 6, 7. Z 10 číslic musím 2 číslice odečíst; $10 - 2 = 8$. Lze tedy použít $\boxed{8}$ číslic.

Podle kombinatorického pravidla součinu platí: $9 \cdot 9 \cdot 8 =$ $\boxed{648}$ je hledaný počet trojcif. čísel



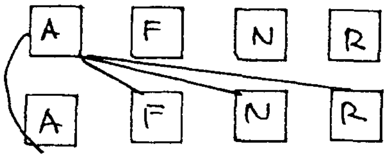
např. soused toto políčko

zde nesmím použít bílá pole

Příklad 2 (1.2/11-uč.): Kolika způsoby lze na šachovnici 8x8 vybrat 2 různobarevná políčka tak, aby obě neležela v téže řadě ani v témže sloupci.

Barevných polí je 32, barevné políčko mohu použít pro to 32krát, a to lze zkombinovat se 24 bílými poli (jsou v černém rámečku). Pomocí kombinat. pravidla pro součin existuje $32 \cdot 24 =$ $\boxed{768}$ dvojic políček barva + bílá.

Příklad 3 (1.3/11-uč.): Kolik dvojjazyčných slovníků je třeba k tomu, aby byla možnost přímého překladu z anglického, francouzského, německého a ruského jazyka do každého z nich.



z $\boxed{A}$ do $\boxed{A}$ nelze

stejné slovníky

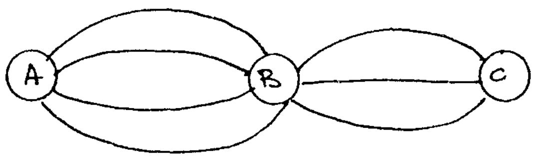
A-F	A-N	A-R
F-A	F-N	F-R
N-A	N-F	N-R
R-A	R-F	R-N

$4 \cdot 3 = 12$

$12 : 2 = 6$

Příklad 4 (1.4/11-uč.): Z místa A do místa B vedou 4 turistické trasy, z místa B do místa C jen 3. Určete počet způsobů, jimiž lze vybrat trasu:

a) z A do C a zpět ... cesta tam je podle komb. pravidla součinu



$4 \cdot 3 = 12$

cesta zpět $3 \cdot 4 = 12$

$12 \cdot 12 = \boxed{144 \text{ způsobů}}$

---

b) z A do C a zpět tak, že z těchto 7 cest (4+3) nemá žádnou použít 2krát.

Cesta tam z A do C .. $4 \cdot 3 = 12$ možností

Cesta zpět .. $3 - 1 = 2$, $4 - 1 = 3$ ... $2 \cdot 3 = 6$ možností

$12 \cdot 6 = \boxed{72 \text{ způsobů}}$

---

c) z A do C a zpět tak, že z těchto 7 cest jsou právě 2 použity dvakrát.

Tam je $4 \cdot 3 = 12$ možností, zpět 1 možnost $12 \cdot 1 = \boxed{12}$

Příklad 5 (1.5/11-uč.): V košíku je 12 jablek a 10 hrušek. Petr si má z něho vybrat buď jablko, nebo hrušku tak, aby Věra, která si po něm vybere 1 jablko a 1 hrušku, měla co největší možnost výběru. Co si (2) má Petr vybrat?

Řešení: Pro odebrání 1 jablka je $(12-1).10 = 11.10 = 110$ možností
" " 1 hrušky je $12.(10-1) = 12.9 = 108$ " $\Rightarrow$

Tedy si musí vybrat 1 jablko.

Příklad 6 (část úlohy 1.7/12-uč.): Určete počet všech 4ciferných přirozených čísel, v jejichž dekadickém zápise není 0 a ze zbývajících 9 číslic se v něm každá vyskytuje nejvýše jednou.

Řešení: Např. pro číslo 5847 platí

Řád tisíců má číslice:	1	2	3	4	5	6	7	8	9…	9 číslic	lze použít při zápise čísla
" set " "	1	2	3	4	~~5~~	6	7	8	9…	8 číslic	
" desítek " "	1	2	3	4	~~5~~	6	7	~~8~~	9…	7 číslic	
" jednotek " "	1	2	3	~~4~~	~~5~~	6	7	~~8~~	9..	6 číslic	

Celkový počet 4ciferných čísel určíme pomocí komb. pravidla součinu.

$9.8.7.6 = \boxed{3024 \text{ možných čísel}}$

$V(4,9) = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$

16./12

a) 4C+L $5 \cdot 5 = \underline{25}$

b) $\frac{5}{7} \cdot \frac{4}{2} = \underline{20}$

c) C+L = 4
L+L = 1
L+C = 4
$\overline{9}$

d) C+L = 4
L+C = 4
$\overline{8}$

2) VARIACE (bez opakování)

Definice 1: k-členná variace z n prvků je uspořádaná k-tice sestavená z těchto prvků tak, že každý se v ní vyskytuje nejvýše jednou.

Příklad 1: Do závěrečných bojů o titul mistra světa ve fotbale nastoupila 4 mužstva:
A – Anglie
B – Belgie
C – Celebes
D – Dánsko.

Kolika různými způsoby bylo možné rozdělit zlatou, stříbrnou a bronzovou medaili?

Řešení: Nejdříve vytvoříme všechny možné trojice mužstev bez ohledu na jejich pořadí (to jsou kombinace, viz dále).

ABC ABD ACD BCD

Nyní vytvoříme všechny variace tak, že každé písmeno v každé trojici písmen dáme na 1. místo 2krát a zbývající dvě písmena přehodíme

ABC	ACB	BAC	BCA	CAB	CBA
ABD	ADB	BAD	BDA	DAB	DBA
ACD	ADC	CAD	CDA	DAC	DCA
BCD	BDC	CBD	CDB	DBC	DCB

24 možností = 24 variací (což jsou všechny možné uspořádané trojice mužstev: zlaté, stříbrné, bronzové).

* Zapisujeme $V(3,4)$, obecně $V(k,n)$ je počet 3členných (k-členných) variací ze 4 (z n) prvků. Platí:

$$V(3,4) = 4 \cdot 3 \cdot 2 \quad 2=(4-3+1)$$

$$V(k,n) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \ldots (n-k+1)$$

$$\boxed{V(k;n) = \frac{n!}{(n-k)!}}$$

na kalkulačce: $V(3;4)$... 4 Shift $\frac{nPr}{nCr}$ 3 $\boxed{=}$ ... 24

Zlatou, stříbrnou a bronzovou medaili je možné rozdělit $\boxed{24}$ způsoby.

Příklad 8: Ve fotbalové lize je 16 mužstev. Kolika způsoby může být na konci soutěže obsazeno první, druhé a třetí místo?

Řešení: $V(3;16) = 16.15.14 = 3360$ nebo 16 shift $\boxed{nPr}$ 3 $\boxed{=}$ ...

Výsledek: 3360 způsoby.

Příklad 9: a) Určete počet všech pěticiferných čísel přirozených, v jejichž zápisu se žádná číslice neopakuje.

b) Kolik z těchto čísel je menších než 50 000?

Řešení a): Počet všech 5cif. čísel, která začínají i nulou je

$$V(5;10) = 10.9.8.7.6 = 30240$$

Z tohoto počtu musíme vyjmout ta čísla, která začínají nulou. Když v zápise všech pěticif. čísel škrtneme nulu na začátku, dostaneme 4ciferné čísla. Jde o počet variací 4. třídy z 9 čísel.

$$V(4;9) = 9.8.7.6 = 3024$$

$$V(5;10) - V(4;9) = 30240 - 3024 = \boxed{27216 \text{ čísel}}$$

Řešení b) Největší číslo menší než 50 000 je 49999

49998

⋮

4abcd

4 čísla

zde tři: 3, 2, 1

Určíme $V(4;9)$ a před každé vzniklé číslo napíšeme číslici 4.

$$V(4;9).4 = (9.8.7.6).4 = \boxed{12096 \text{ je menších než } 50000}$$

Příklad 10: Kolik je jednociferných, dvojciferných, trojciferných a čtyřciferných je možné sestavit z číslic 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8?

Počet 1ciferných	$V(1;7) =$	7
" 2 "	$V(2;7) =$	42
" " "	$V(3;7) =$	210
" " "	$V(4;7) =$	840
		1099

Využito komb. pravidla součtu.

Celkem lze vytvořit $\boxed{1099}$ čísel.

Příklad 11 (1.10/16-uč.): a) Kolika způsoby lze sestavit rozvrh pro 1 den pro třídu, v níž se vyučuje 12 předmětům a každému připadá 1 vyuč. hodinu denně, má-li se skládat ze 6 vyučovacích hodin?

b) V kolika z nich se vyskytuje daný předmět?

c) V kolika z nich je tento předmět zařazen na 1. vyuč. hodinu?

Řešení:

a) Jde o 6předmětové variace z 12 předmětů.

$V(6;12) = 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 =$ 665 280 variací předmětů v 1 dni.

b) Např. dějepis, odeberme ho a zbyde 11 předmětů. 5hodinový rozvrh dává $V(5;11)$ variací, což je 55400. Ke každé vzniklé variaci přidáme dějepis na 1., 2., 3., 4., ..., nebo 6. místo. Počet 55400 se 6krát zvětší. Řešení lze zapsat

$6 \cdot V(5;11) =$ 332 640 variací, v nichž se vyskytuje 1 daný předmět (např. dějepis). V ostatních variacích se dějepis již nevyskytuje.

c) Má-li být tento předmět jen na 1. místě, pak platí:

$1 \cdot V(5;11) =$ 55400 variací

Příklad 12 (1.11/16-uč.): Určete počet prvků, z nichž lze vytvořit:

a) 240 2členných variací,

b) 2krát více 4členných variací než 3členných variací.

Řešení: a) $V(2;n) = 240$ tj.

$$n \cdot (n-1) = 240$$
$$n^2 - n = 240$$
$$n^2 - n - 240 = 0$$
$$n_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+960}}{2} = \frac{1 \pm 31}{2}$$
$$n_{1,2} = \begin{cases} 16 \\ -15 \end{cases}$$

-15 nevyhovuje, počet členů nemůže být záporný

$\boxed{16 \text{ prvků}}$

Zkouška

$V(2;16) = 16 \cdot 15 = 240$

b) $(3,n) < (4,n)$

$2 \cdot V(3;n) = V(4;n)$

$$2 \cdot \underbrace{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}_{0} = \underbrace{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)} \cdot (n-3)$$

$2 = n-3$

$\boxed{n=5}$

Zkouška: $V(3;5) = 60$

$V(4;5) = 120$

$2 \cdot 60 = 120$

Příklad 13: V oddílu je 15 vojáků. Kolik dvoučlenných hlídek je možné z nich vytvořit, má-li jeden z členů být velitelem a druhý jeho pomocníkem?

$V(2;15) = 15 \cdot 14 = \boxed{210}$

Příklad 14: Ve finálové skupině hokejového mistrovství světa hraje 8 mužstev. Kolik různých pořadí může být na prvních třech místech. Řešte dvěma způsoby.

a) $V(3;8) = 8 \cdot 7 \cdot 6 = \boxed{336}$

b) $V(k,n) = \dfrac{n!}{(n-k)!} = \dfrac{8!}{(8-3)!} = \dfrac{8!}{5!} = \dfrac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot \cancel{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}}{\cancel{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}} = 8 \cdot 7 \cdot 6 = \boxed{336}$

Příklad 15: Kolik trojciferných čísel dělitelných pěti lze postavit z číslic 1,2,3,4,5?

Vytvoříme všechny dvouprvkové variace ze čtyř číslic (1,2,3,4) a ke každé z nich připíši na konec číslici 5.

$V(2;4) = 4 \cdot 3 = 12$ Existuje $\boxed{12}$ trojcif. čísel dělitelných 5.

Příklad 16 (1/14 – uč.) Z bílé, červené, modré, zelené a žluté látky lze sešít vlajka ze tří různobarevných vodorovných pruhů.

a) Kolik vlajek lze vytvořit?

Jde o celkový počet 3členných variací z 5 pruhů.

$V(3;5) = 5 \cdot 4 \cdot 3 =$ $\boxed{\text{60 různých vlajek}}$

b) Kolik z nich má modrý pruh?

Vytvoříme 2členné variace ze 4 pruhů (bez modré) a pak můžeme přidat modrý pruh nahoru, doprostřed nebo dolů.

$V(2;4)\cdot 3 = \underline{4\cdot 3}\cdot 3 = 12\cdot 3 = \boxed{36 \text{ různých vlajek}}$

c) Kolik z nich má modrý pruh uprostřed?

$\frac{1}{3}$ z 36 = $\boxed{12}$

d) Kolik z nich nemá červený pruh uprostřed?

To je stejné jako počet vlajek s modrým pruhem uprostřed.

$60 - 12 = \boxed{48}$

Příklad 17 (1.12/16-uč.). Víme, že šesticiferné číslo začíná sedmičkou, neobsahuje žádné dvě stejné číslice a je dělitelné 25. Kolik čísel vyhovuje těmto podmínkám?

$7\ \underbrace{\boxed{?}\ \boxed{?}\ \boxed{?}}\ \left\langle \begin{matrix} 25\ A \\ 50\ B \end{matrix} \right\}$ 75 a 00 nelze použít

na tato tři místa přijdou trojčlenné variace ze 7 číslic

A: 0 1 2 3 4 5 6 7 8

už tam jsou

Když jde o číslo 7???25 je počet variací $V(3;7)$. Ke každé variaci se připíší číslice 7, 2, 5, což je $V(3;7)$

Když jde o číslo 7???50 … je také $V(3;7)$

$V(3;7) + V(3;7) = 2\cdot V(3;7) = 2\cdot 7\cdot 6\cdot 5 = \boxed{420}$

---

3) PERMUTACE (bez opakování)

Definice 2: Permutace z n prvků je n-členná variace z těchto prvků.

Počet permutací $\boxed{P(n) = n!}$ – čteme „en faktoriál"

Příklad 18: Kolik permutací ze tří prvků a, b, c lze vytvořit?

Řešení: $\underbrace{(a,b,c),\ (a,c,b),\ (b,a,c),\ (b,c,a),\ (c,a,b),\ (c,b,a)}$

$\boxed{6}$ permutací

Pomocí vzorce $P(n)=n!$

$$P(3) = 3! = 3.2.1 = 6$$

Obecně $n! = 1.2.3 \dots (n-1).n$

Příklad 19: V knihovně je 5 knih s tematikou sportu A, B, C, D, E. Určete počet všech jejich možných umístění v regálu.

Řešení: Jde o počet variací 5. třídy z 5 prvků.

$$\underbrace{V(5;5)} = 5.4.3.2.1 = 120$$

Tento zápis je rovnocenný se zápisem:

$$P(5) = 5! = 5.4.3.2.1 = \boxed{120}$$

Na kalkulačce: a) jako variace $\boxed{5}$ Shift $\boxed{nCr}$ (nPr) $\boxed{5}$ $\boxed{=}$ ... 120

b) jako permutace: $\boxed{5}$ Shift $\boxed{x^{-1}}$ ($x!$) $\boxed{=}$ 120

Příklad 20: Kolik pěticiferných čísel dělitelných 4 je možné vytvořit z číslic 1, 2, 3, 4, 5, jestliže se v žádném čísle nesmí opakovat žádná číslice?

Řešení: Všech pěticiferných čísel je $P(5)=5!=120$. Víme, že číslo je dělitelné 4, jestliže je sudé a jeho poslední dvojčíslí je dělitelné 4. Z číslic 1, 2, 3, 4, 5 lze vytvořit tato koncová sudá dvojčíslí: 12, 24, 32, 52.

Končí-li číslo na 12, zbudou 3 číslice 3,4,5. Z nich vytvoříme všechna možná trojciferná čísla, těch je 3! a pak ke každému z nich připojíme uvedené dvojčíslí atd.

12 ... zbude 3,4,5 .... $P(3) = 3! = 6$
24 ... " 1,3,5 .... $P(3) = 3! = 6$
32 ... " 1,4,5 .... $P(3) = 3! = 6$
52 ... " 1,3,4 ... $P(3) = 3! = 6$

celkem 24

Všech pěticiferných čísel je 120, z nich je 24 dělitelných čtyřmi.

Příklad 21: Kolik čtyřciferných čísel je možné vytvořit z číslic 0,1,2,3?

Řešení: Počet všech 4ciferných čísel včetně těch, které začínají nulou (0), je

$P(4) = 4! = 24$

Počet všech trojciferných čísel (bez 0) je

$P(3) = 3! = 6$ (0 k nim pak přidám na začátek a budou čtyřciferná, ale nepoužitelná, např. 0235 není správně zapsané čtyřcif. číslo.

Proto platí: $4! - 3! = 24 - 6 = 18$

Lze vytvořit $\boxed{18}$ čtyřciferných čísel.

Příklad 22: V lavici sedí 5 žáků: a, b, c, d, e. Kolikrát je lze přesadit tak, aby

a) žák a byl krajní,

b) žáci a, b seděli vedle sebe?

Řešení: a) Z 5 žáků žáka a vyřadím. Zbydou mi 4 žáci, a to b, c, d, e. Z nich vytvořím všechny možné čtveřice. Těch je

$$P(4) = 4! = 24$$

Když ke 24 čtveřicím přidám žáka a zleva, tak se tento počet pětic nezmění, je stejný jako počet čtveřic. Když přidám žáka a pak ještě zprava, tak se tento počet zdvojnásobí, čili $24 \cdot 2 = 48$

Celkové řešení je: $4! \cdot 2 = 24 \cdot 2 = 48$

Žáky je možné přesadit $\boxed{48}$krát.

b) Možné polohy žáků a, b v pěticích žáků

$$\left.\begin{array}{lllll l} a & b & ○ & ○ & ○ & \ldots\ P(3) = 3! = 6 \\ ○ & a & b & ○ & ○ & \ldots\ P(3) = 3! = 6 \\ ○ & ○ & a & b & ○ & \ldots\ P(3) = 3! = 6 \\ ○ & ○ & ○ & a & b & \ldots\ P(3) = 3! = 6 \end{array}\right\} 24$$

Vždy vytváříme trojice.

Chlapce a, b lze zaměnit, takže počet permutací $6 + 6 + 6 + 6 = 24$ se zdvojnásobí ... $24 \cdot 2 = 48$

Opět je možné přesadit žáky $\boxed{48}$krát.

Příklad 23: Kolika způsoby může 8 skautů nastoupit a) do řady, b) do řady, v níž je skaut A na kraji, c) do řady, v níž skauti A, B stojí vedle sebe?

Řešení: a) $P(8) = 8! = \boxed{40320 \text{ způsoby}}$

b) $P(7) \cdot 2 = 5040 \cdot 2 = \boxed{10\,080 \text{ způsobů}}$

c) $P(7) \cdot 2 = \ldots\ \boxed{10\,080 \text{ způsobů}}$ viz str. 11B

●	●	○	○	○	○	○	○	6!	7 párdal
○	●	●	○	○	○	○	○	6!	
○	○	●	●	○	○	○	○	6!	
○	○	○	●	●	○	○	○	6!	
○	○	○	○	●	●	○	○	6!	
○	○	○	○	○	●	●	○	6!	
○	○	○	○	○	○	●	●	6!	

$$6! \cdot 7 \cdot 2 = 7 \cdot 6! \cdot 2 = 7! \cdot 2 = \cancel{10800}\ 10\,080$$

Příklad 24: V množině N řešte rovnice:

a) $\frac{(x-1)!}{(x-3)!} - 2\cdot\frac{x!}{(x+1)!} = -2$

Musím končit výrazem, který je ve jmenovateli.

$$\frac{(x-1)\cdot(x-2)\cdot\cancel{(x-3)!}}{\cancel{(x-3)!}} - 2\cdot\frac{x\,\cancel{(x-1)!}}{\cancel{(x-1)!}} = -2$$

$$(x-1)\cdot(x-2) - 2x = -2$$

$$x^2-3x+2-2x+2=0$$

$$x^2-5x+4=0$$

$$x_{1,2} = \frac{5\pm\sqrt{25-16}}{2} = \frac{5\pm\sqrt{9}}{2} = \frac{5\pm3}{2} = \begin{cases}\boxed{x_1=4}\\ \boxed{x_2=1}\end{cases}$$

---

b) $\frac{2(x+1)!}{(x-1)!} + \frac{3(x-1)!}{(x-2)!} = 49$

$$\frac{2\cdot(x+1)\cdot x\cdot\cancel{(x-1)!}}{\cancel{(x-1)!}} + \frac{3(x-1)\cdot\cancel{(x-2)!}}{\cancel{(x-2)!}} = 49$$

$$2x(x+1) + 3(x-1) = 49$$

$$2x^2+2x+3x-3-49=0$$

$$2x^2+5x-52=0$$

$$x_{1,2} = \frac{-5\pm\sqrt{25+416}}{4} = \frac{-5\pm\sqrt{441}}{4} = \frac{-5\pm21}{4} = \begin{cases}\boxed{x_1=4}\\ x_2=-6{,}5;\ -6{,}5\notin N\end{cases}$$

Zkouška pro $x=4$

$$L = \frac{2(4+1)!}{(4-1)!} + \frac{3(4-1)!}{(4-2)!} = \frac{2\cdot5!}{3!} + \frac{3\cdot3!}{2!} = \frac{240}{6} + \frac{18}{2} = 40+9=49$$

$P=49;\ L=P$

Příklad 25: Zjednodušte (nejde o rovnici):

$$\frac{n^2-9}{(n+3)!}+\frac{6}{(n+2)!}-\frac{1}{(n+1)!}=$$

$$=\frac{\cancel{(n+3)}\cdot(n-3)}{\cancel{(n+3)}\cdot(n+2)\cdot(n+1)!}+\frac{6}{(n+2)\cdot(n+1)!}-\frac{1}{(n+1)!}=$$

$$=\frac{n-3}{(n+2)\cdot(n+1)!}+\frac{6}{(n+2)\cdot(n+1)!}-\frac{1}{(n+1)!}=$$

$$=\frac{n-3+6-(n+2)\cdot 1}{(n+2)\cdot(n+1)!}=\frac{\cancel{n}-3+6-\cancel{n}-2}{(n+2)\cdot\underbrace{(n+1)!}_{\text{lze vynechat}}}=$$

$$=\boxed{\frac{1}{(n+2)!}}$$

Příklad 26: Zvětší-li se počet prvků o 2, zvětší se počet permutací 12krát. Určete původní počet prvků.

Řešení: $P(n)\cdot 12=P(n+2)$

$$n!\cdot 12=(n+2)!$$

$$\cancel{n!}\cdot 12=(n+2)\cdot(n+1)\cdot\cancel{n!} \quad |:n!$$

$$12=(n+2)\cdot(n+1)$$

$$(n+2)\cdot(n+1)-12=0$$

$$n^2+3n+2-12=0$$

$$n^2+3n-10=0$$

$$\rightarrow n_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{9+40}}{2}=\frac{-3\pm 7}{2}$$

$n_{1,2}=$ $\boxed{n_1=2}$, $n_2=-5$ (nevyhovuje)

Zkouška pro $n=2$: $P(2)=2$, $2\cdot 12=24$

$P(4)=24$

Příklad 27: Vypočítejte, popř. zjednodušte:

a) $\frac{7!}{6!} = \frac{7.6!}{6!} = 7$

b) $\frac{7!}{5!} = \frac{7.6.5!}{5!} = 7.6 = 42$

c) $\frac{7!+5!}{5!} = \frac{7.6.5!+5!}{5!} = \frac{5!(42+1)}{5!} = 43$

d) $\frac{n!}{(n-1)!} = \frac{n.(n-1)!}{(n-1)!} = n$

e) $\frac{(n+1)!}{n!} - \frac{n!}{(n-1)!} = \frac{(n+1).n!}{n!} - \frac{n.(n-1)!}{(n-1)!} = n+1-n = 1$

Příklad 28: Řešte rovnice

a) $(5!)^x = (4!)^{x-1}$

$(5.4!)^x = (4!)^{x-1}$

$5^x.(4!)^x = (4!)^x.(4!)^{-1} \quad |:(4!)^x$

$5^x = \frac{1}{4!}$

$5^x = \frac{1}{24}$

$x.\log 5 = \log \frac{1}{24}$

$\boxed{x = \frac{\log \frac{1}{24}}{\log 5}}$

---

b) $(5!)^{x-1} = (6!)^{x-1}$

$(5!)^x.(5!)^{-1} = (6!)^x.(6!)^{-1}$

$(5!)^x.\frac{1}{120} = (6.5!)^x.\frac{1}{720}$

$(5!)^x.\frac{1}{120} = 6^x.(5!)^x.\frac{1}{720} \quad |:(5!)^x$

$\frac{1}{120} = 6^x.\frac{1}{720}$

$6^x = \frac{720}{120}$

$6^x = 6$

$6^x = 6^1 \Rightarrow \boxed{x=1}$

Zkouška:

$L = (5!)^{1-1} = (5!)^0 = 1$

$P = (6!)^{1-1} = (6!)^0 = 1$

$L = P$

---

c) $\frac{(x+6)!}{(x+4)!} + x^2 - 16x = 28$

$\frac{(x+6)(x+5)\cancel{(x+4)}!}{\cancel{(x+4)}!} + x^2 - 16x - 28 = 0$

$x^2 + 11x + 30 + x^2 - 16x - 28 = 0$

$2x^2 - 5x + 2 = 0$

$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{5 \pm 3}{4} = \begin{cases} 2 \\ \frac{1}{4} \end{cases}$

$\frac{1}{4}$ ↓ nevyhovuje

Zkouška:

$L = \frac{(2+6)!}{(2+4)!} + 4 - 32 =$

$= \frac{8!}{6!} + 4 - 32 = 56 + 4 - 32 = 28$

$P = 28$

$L = P$

Řešení: $\boxed{x=2}$

d) $\frac{(x-1)!}{(x-3)!} - 2\cdot\frac{x!}{(x-1)!} = -2$

$\frac{(x-1)\cdot(x-2)\cdot\cancel{(x-3)}!}{\cancel{(x-3)}!} - 2\cdot\frac{x\,\cancel{(x-1)}!}{\cancel{(x-1)}!} = -2$

$x^2-3x+2-2x+2=0$

$x^2-5x+4=0$

$x_{1,2} = \frac{5\pm\sqrt{9}}{2} = \frac{5\pm3}{2} = \begin{cases}4\\1\end{cases}$

Skouška:

pro $x=4$:

$L = \frac{(4-1)!}{(4-3)!} - 2\cdot\frac{4!}{(4-1)!} = \frac{3!}{1!} - 2\cdot\frac{4!}{3!} =$

$= 6-2\cdot4 = 6-8 = -2$

$P=-2$; $L=P$ $\boxed{x=4}$

pro $x=1$ nevyhovuje ... $(x-3)!$ .. $(1-3)! = (-2)!$ není přir. číslo

e) $\frac{2(x+1)!}{(x-1)!} + \frac{3(x-1)!}{(x-2)!} = 49$

$\frac{2(x+1)\cdot x\cdot\cancel{(x-1)}!}{\cancel{(x-1)}!} + \frac{3\cdot(x-1)\cdot(x-2)!}{(x-2)!} = 49$

$2x(x+1)+3(x-1)=49$

$2x^2+2x+3x-3-49=0$

$2x^2+5x-52=0$

$x_{1,2} = \frac{-5\pm\sqrt{441}}{4} = \frac{-5\pm21}{4} = \begin{cases}4\\ \cancel{-6{,}5} \text{ ne}\end{cases}$

Skouška:

$L = \frac{2(4+1)!}{(4-1)!} + \frac{3(4-1)!}{(4-2)!} =$

$= \frac{2\cdot5!}{3!} + \frac{3\cdot3!}{2!} = 40+9 = 49$

$P=49$, $L=P$ $\boxed{x=4}$

KOMBINACE bez opakování

__Definice 3:__ k-členná kombinace z n prvků je neuspořádaná k-tice sestavená z těchto n prvků tak, že každý se v ní vyskytuje nejvýše jednou.

__Příklad 29:__ Je dána množina $M=\{1,2,3,4\}$. Určete a graficky vyznačte všechny její

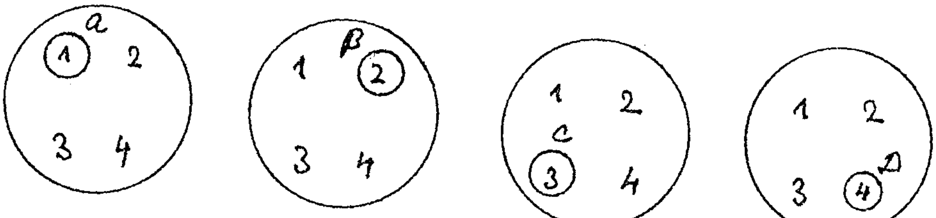
a) jednoprvkové kombinace,

b) dvouprvkové —"— ,

c) tříprvkové —"— ,

d) čtyřprvkové —"— .

__Řešení:__ a)



Výsledkem jsou jednoprvkové podmnožiny $A=\{1\}$, $B\{2\}$, $C\{3\}$, $D=\{4\}$. Jsou celkem 4. Jejich počet lze určit pomocí vzorce

$K(k;n)=\binom{n}{k}$, kde $n=4$, $k=1$

lze vynechat

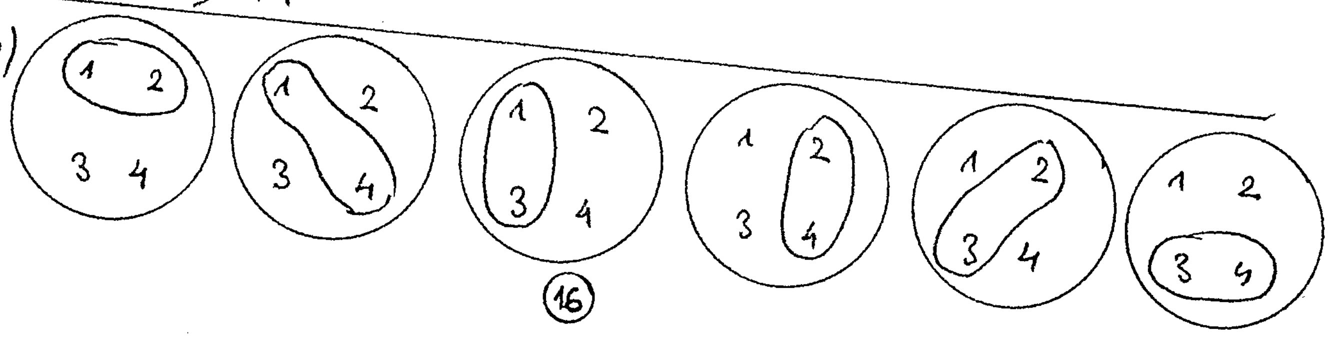
$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}=\frac{4!}{1!\cdot(4-1)!}=\frac{4!}{3!}=\frac{4.3.2.1}{3.2.1} \text{ nebo } \frac{4.\cancel{3.2.1}}{\cancel{3.2.1}}=\boxed{4}$$

Existují 4 jednoprvkové kombinace.

Všimněme si, že počet 1-prvkových kombinací je stejný jako počet doplňujících 3-prvkových kombinací. To naznačuje zápis, od něhož vede šipka. Počet 3-prvkových kombinací ($n=4, k=3$) lze počítat pomocí tzv. kombinačního čísla

3,4}... $K=\binom{4}{3}=\frac{4.\cancel{3.2}}{\cancel{3.2}.1}=\frac{4}{1}=\boxed{4}$

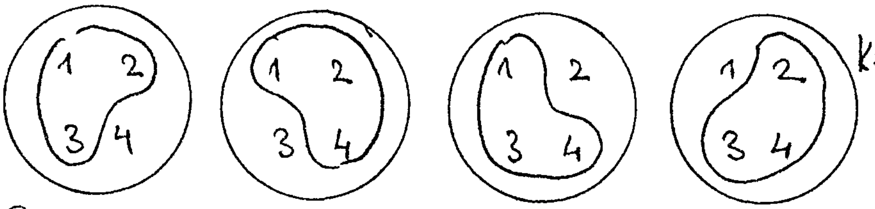
b)



Výpočet: $K=\binom{4}{2}=\frac{4.3}{2.1}=\frac{12}{2}=\boxed{6}$ Jde o množiny {1,2}, {1,4} .... {3,4}

Existuje 6 dvouprvkových kombinací.

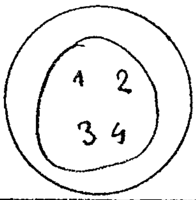
c)



$K=\binom{4}{3}=\frac{4.3.2}{3.2.1}=\boxed{4}$

Poznámka: 3prvkové kombinace jsou doplňkové k 1prvkovým kombinacím. Jde o množiny {1,2,3}, {1,2,4} ... {2,3,4}

d)

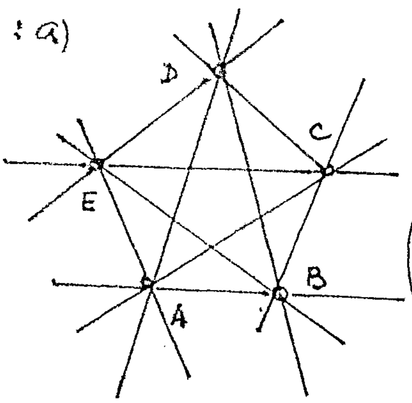


$K=\binom{4}{4}=\frac{4.3.2.1}{4.3.2.1}=\boxed{1}$ .. existuje jediná kombinace.

Důležitá poznámka: U kombinací nezáleží na pořadí prvků, ale pouze na jejich výčtu.

Příklad 30: Kolik existuje přímek, které procházejí vrcholy konvexního („vypouklého")
a) pětiúhelníku ABCDE, b) 24-úhelníku?

Řešení: a)



$K=\binom{5}{2}=\frac{5.4}{2.1}=\frac{20}{2}=\boxed{10 \text{ přímek}}$

Výpočet na kalkulačce:

$\boxed{5}\boxed{nCr}\boxed{2}$ $\boxed{=}$ ...10

→ protože přímka je určena 2 body.

b) $K=\binom{24}{2}=\frac{24.23}{2.1}=\boxed{276 \text{ přímek}}$

Příklad 31: Je dán konvexní 6-úhelník. Každé tři jeho vrcholy jsou vrcholy trojúhelníku. Kolik jich je?

Řešení: $K=\binom{6}{3}=\frac{6.5.4}{3.2.1}=\boxed{20 \text{ trojúhelníků}}$  atd.

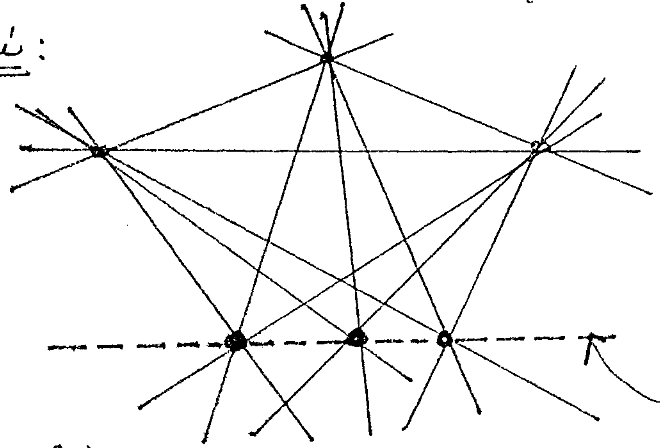
Příklad 32: V rovině je 10 různých bodů. Žádné trojice bodů neleží na téže přímce. Kolik kružnic lze jimi určit s podmínkou, že tyto kružnice musí vždy procházet 3 body?

Řešení: $K = \binom{10}{3} = \boxed{120 \text{ kružnic}}$

Příklad 33: Kolik přímek je určeno 6 body, jestliže jen tři z nich leží na téže přímce, ostatní nikoli?

Řešení:

$K = \binom{6}{2} - \binom{3}{2} + 1 = 13$



Existuje 13 přímek.

Číslo $\binom{3}{2}$ se promění – nahradí se číslem 1 (přímka – čárkovaná).

Příklad 34: 7 měst je navzájem spojeno leteckými linkami. Průměrná vzdálenost mezi dvěma městy je 389 km. Vypočítejte celkovou délku všech leteckých linek.

Řešení: $\binom{7}{2} \cdot 389 = 21 \cdot 389 = \boxed{8169 \text{ km}}$

jde o 7 různých prvků

Kombinatorické pravidlo součinu: V učebně jsou otevřena 4 okna. Po vletnutí včely bylo 1 okno zavřeno. Kolik existuje celkem možných pohybů včely do učebny a z učebny?

Při vletu dovnitř měla včela 4 možnosti.

" vyletu ven " " 3 –"–.

Celkem měla 12 možností různých pohybů ($12 = 4 \cdot 3$).

Příklad 35: V dílně pracuje 15 mužů a 12 žen. Kolika způsoby lze vytvořit 7 člennou pracovní skupinu tak, aby v ní

a) byli pouze muži,

b) byly pouze ženy,

c) bylo 5 žen a 2 muži,

d) bylo 6 mužů a 1 žena?

Řešení: využijeme při tom kombinatorické pravidlo součinu, a to v případě c), d).

a) $\binom{15}{7} = 6435$ možností b) $\binom{12}{7} = 792$ možností

c) $\binom{12}{5} \cdot \binom{15}{2} = 792 \cdot 105 = 83\,160$ možností

d) $\binom{15}{6} \cdot \binom{12}{1} = 5005 \cdot 12 = 60\,060$ možností

Poznámka: $\binom{12}{7}$ a $\binom{12}{5}$ je stejné, neboť 7-prvkové a 5-prvkové kombinace jsou navzájem doplňkové: $7+5=12$

Příklad 36: Ve třídě je 18 chlapců a 14 dívek. Kolikerým způsobem si mohou zvolit do třídního výboru 3 zástupce, mají-li to být

a) samí chlapci b) samé dívky c) 2 chlapci a 1 dívka?

Řešení: $\binom{18}{3} = \boxed{816}$ $\binom{14}{3} = \boxed{364}$ $\binom{18}{2} \cdot \binom{14}{1} = 153 \cdot 14 = \boxed{2142}$

Příklad 37: Kolik různých tanečních párů chlapec + dívka je možné vytvořit z 24 chlapců a 15 dívek?

Řešení: $\binom{24}{1} \cdot \binom{15}{1} = 24 \cdot 15 = \boxed{360 \text{ párů}}$

Příklad 38: Peter má 7 kníh, o ktoré sa zaujíma Ivana. Ivana má 10 kníh, o ktoré sa zaujíma Peter. Koľko spôsobmi si Peter môže vymeniť 2 svoje knihy za 2 Ivanine knihy?

Riešenie: $\binom{7}{2}\cdot\binom{10}{2} = 21\cdot 45 = \boxed{945 \text{ spôsobov}}$

Příklad 39: Určte počet prvkov set, aby počet 4 členných kombinácií z nich vytvorených bol 20krát väčší než počet 2 členných kombinácií.

Riešenie:

$$\binom{n}{4} = \binom{n}{2}\cdot 20$$

$$\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)}{4\cdot3\cdot2\cdot1} = 20\,\frac{n\cdot(n-1)}{2\cdot1} \qquad \Big|\cdot\frac{1}{n(n-1)}$$

$$\frac{(n-2)\cdot(n-3)}{24} = 20\cdot\frac{1}{2}$$

$$\frac{n^2-5n+6}{24} = 10 \qquad |\cdot 24$$

$$n^2-5n+6 = 240$$

$$n^2-5n-234=0$$

$$n_{1,2} = \frac{5\pm\sqrt{25+936}}{2}$$

$$n_{1,2} = \frac{5\pm 31}{2} = \begin{cases} \boxed{18} \\ -13 \end{cases}$$

-13 nevyhovuje, nebo ide o počet prvkov

Zkouška: $\binom{18}{4} = 3060 \;\ldots\; \binom{18}{2} = 153 \ldots\; 3060 : 153 = 20$

Hľadaný počet prvkov je 18.

Příklad 40: Riešte rovnici:

a) $\binom{n}{2} + \binom{n-1}{2} = 4$

$$\frac{n\cdot(n-1)}{2\cdot1} + \frac{(n-1)\cdot(n-2)}{2\cdot1} = 4 \qquad |\cdot 2$$

$$n(n-1) + (n-1)\cdot(n-2) = 8$$

$$n^2-n+n^2-3n+2 = 8$$

$$2n^2-4n-6=0 \qquad |:2$$

$$n^2-2n-3=0$$

$$n_{1,2} = \frac{2\pm\sqrt{4+12}}{2} = \frac{2\pm\sqrt{16}}{2}$$

$$= \begin{cases} \boxed{3} \\ -1 \end{cases}$$

-1 nevyhovuje (ide o počet prvkov).

Zkouška: str. 21

$L = \binom{3}{2} + \binom{3-1}{2} = \binom{3}{2} + \binom{2}{2} = 3+1 = 4\ ;\ P = 4,\ L = P$ $\boxed{n=3}$

---

b) $\binom{9}{4} x = \binom{10}{5}$

$126x = 252$

$\boxed{x = 2}$

Zkouška:

$L = \binom{9}{4} \cdot 2 = 126 \cdot 2 = 252$

$P = \binom{10}{5} = 252;\ L = P$

c) $\binom{x}{2} + \binom{x-1}{2} = 4$

$\frac{x \cdot (x-1)}{2 \cdot 1} + \frac{(x-1) \cdot (x-2)}{2 \cdot 1} = 4 \quad | \cdot 2$

$x^2 - x + x^2 - 3x + 2 = 8$

$2x^2 - 4x - 6 = 0 \quad | : 2$

$x^2 - 2x - 3 = 0$

$x_{1,2} = \frac{2 \pm 16}{2} = \begin{cases} 3 \\ -1 \end{cases}$

nevyhovuje, počet kombinací lze využít pouze v N

Zkouška:

$L = \binom{3}{1} + \binom{2}{2} = 3 + 1 = 4,\ P = 4$

$L = P$ $\boxed{x = 3}$

---

d) $\binom{x}{2} + \binom{x+3}{2} = 4$

$\frac{x \cdot (x-1)}{2 \cdot 1} + \frac{(x+3) \cdot (x+2)}{2 \cdot 1} = 4 \quad | \cdot 2$

$x^2 - x + x^2 + 5x + 6 = 8$

$2x^2 + 4x - 2 = 0 \quad | \cdot \frac{1}{2}$

$x^2 + 2x - 1 = 0$

$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{8}}{2}$

Protože $\frac{-2 \pm \sqrt{8}}{2} \notin N$,

tak $x \in \emptyset$, rovnice nemá řešení.

e) $\binom{x-1}{x-3} + \binom{x-2}{x-4} = 9$ VZOREC $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

$\binom{x-1}{x-1-(x-3)} + \binom{x-2}{x-2-(x-4)} = 9$

$\binom{x-1}{2} + \binom{x-2}{2} = 9$

$\frac{(x-1) \cdot (x-2)}{2} + \frac{(x-2) \cdot (x-3)}{2} = 9 \quad | \cdot 2$

$x^2 - 3x + 2 + x^2 - 5x + 6 = 18$

$2x^2 - 8x - 10 = 0 \quad | : 2$

$x^2 - 4x - 5 = 0$ $\boxed{x = 5}$

$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{36}}{2} = \begin{cases} 5 \\ -1 \end{cases}$ nevyhovuje

Zkouška:

$L = \binom{4}{2} + \binom{3}{1} = 6 + 3 = 9,\ P = 9,\ L = P$

f) $\binom{x-1}{x-2} + \binom{x-2}{x-4} = 4$

$\binom{x-1}{x-1-(x-2)} + \binom{x-2}{x-2-(x-4)} = 4$

$\binom{x-1}{1} + \binom{x-2}{2} = 4$

$x - 1 + \frac{(x-2) \cdot (x-3)}{2} = 4 \quad | \cdot 2$

$2x - 2 + x^2 - 5x + 6 - 8 = 0$

$x^2 - 3x - 4 = 0$

$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2} = \begin{cases} 4 \\ -1 \end{cases}$ nevyhovuje

Zk.

$L = \binom{3}{2} + \binom{2}{0} = 3 + 1 = 4,\ P = 4;\ L = P$

$\boxed{x = 4}$

Příklad 41: Určete počet prvků, z nichž lze vytvořit 66 dvoučlenných kombinací:

$$\binom{x}{2} = 66$$

$$\frac{x.(x-1)}{2} = 66$$

$$x^2 - x = 132 \longrightarrow x^2 - x - 132 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{529}}{2} = \begin{cases} 12 \\ -11 \text{ ne} \end{cases}$$

Zkouška: $\binom{12}{2} = 66$

Množina musí mít 12 prvků.

Příklad 42: Zvětší-li se počet prvků o 1, zvětší se počet tříčlenných kombinací z nich vytvořených o 21. Kolik je dáno prvků?

Nechť je dáno n prvků.

$$\binom{n+1}{3} > \binom{n}{3} \text{ o } 21$$

$$\binom{n+1}{3} - \binom{n}{3} = 21$$

$$\frac{(n+1).n(n-1)}{3.2.1} - \frac{n(n-1).(n-2)}{3.2.1} = 21 \quad |\cdot 6$$

$$(n+1).n(n-1) - n(n-1).(n-2) = 126$$

$$n(n-1).[(n+1)-(n-2)] = 126$$

$$n(n-1).\,3 = 126 \quad |:3$$

$$n(n-1) = 42$$

$$n^2 - n - 42 = 0$$

$$n_{1,2} = \frac{1 \pm 13}{2} = \begin{cases} 7 \\ -6 \text{ (nevyhovuje)} \end{cases}$$

Zkouška:

$$\binom{7}{3} = 35, \quad \binom{8}{3} = 56, \quad 56 - 35 = 21$$

Bylo dáno 7 prvků.

Příklad 43: Ve skladu je 10 výrobků, mezi nimi 3 poškozené. Kolika způsoby z nich můžeme vybrat kolekci 5 výrobků, aby

a) všechny byly dobré

Řešení: Dobrých výrobků je 7 (10−3)

$$\binom{7}{5} = \boxed{21 \text{ způsobů}}$$

b) byl právě 1 poškozený?

Řešení: Právě 1 poškozený lze vybrat 1 ze 3 $\binom{3}{1}$. Zbytek 4 dobrých lze vybrat ze 7 prvků $\binom{7}{4}$. Podle kombinatorického pravidla součinu platí:

$$\binom{3}{1} \cdot \binom{7}{4} = 3.35 = \boxed{105 \text{ způsobů}}$$

Příklad 44: Učitel má k dispozici 20 příkladů z geometrie a 30 příkladů z algebry. Kolik možností (kombinací) ze 3 příkladů aritmetických a 2 příkladů geometrických může vytvořit?

$$\binom{20}{2} \cdot \binom{30}{3} = 190 . 4060 = \boxed{771\,400 \text{ možností výběru}}$$

Příklad 45: Kolik hráčů se zúčastnilo turnaje ve stolním tenisu, jestliže bylo odehráno 21 zápasů a každý hráč hrál s každým hráčem?

$\binom{n}{2}=21$

$\frac{n(n-1)}{2}=21$

$n^2-n=42$

$n^2-n-42=0$

$n_{1,2}=\frac{1\pm 13}{2}=\begin{cases}7\\-6\end{cases}$ (nevyhovuje)

Zkouška $\binom{7}{2}=\frac{7\cdot 6}{2}=42$

<u>Zúčastnilo se 7 hráčů.</u>

<u>Příklad 46</u>: Pomocí vzorce $\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}$ vypočítejte

a) $\binom{5}{2}+\binom{5}{3}=\binom{6}{3}=\frac{6\cdot 5\cdot 4}{3\cdot 2\cdot 1}=\boxed{20}$

b) $\binom{10}{4}+\binom{10}{5}=\binom{11}{5}=\boxed{462}$

c) $\binom{13}{2}+\underbrace{\binom{13}{10}}=\binom{13}{2}+\binom{13}{3}=\binom{14}{3}=\boxed{364}$

úprava pomocí doplňkové kombinace.

d) $\underbrace{\binom{6}{3}+\binom{6}{4}}_{\text{nejdříve}}+\binom{7}{5}=\binom{7}{4}+\binom{7}{5}=\binom{8}{5}=\boxed{56}$

<u>Příklad 47</u>: Vypočítejte bez použití kalkulačky:

a) $\binom{121}{120}=\binom{121}{1}=\boxed{121}$

b) $\binom{130}{128}=\binom{130}{2}=\frac{130\cdot 129}{2\cdot 1}=\boxed{8385}$

c) $\binom{18}{15}=\binom{18}{3}=\frac{18\cdot 17\cdot 16}{3\cdot 2\cdot 1}=\boxed{816}$

Při výpočtu využijte znalost o doplňkových kombinacích.
