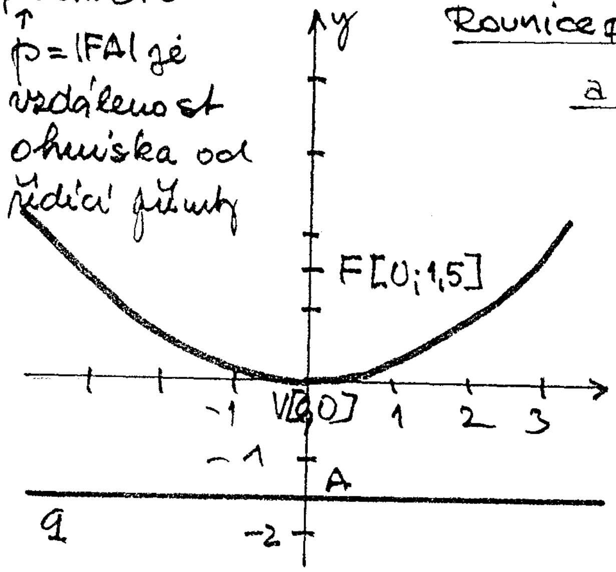
15b) PARABOLA V ANALYTICKÉ GEOMETRII

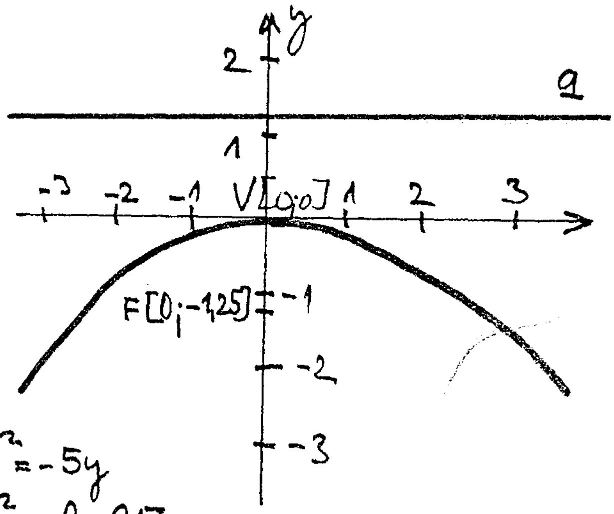
Definice: $x^2=2py$ $(p>0)$ je rovnicí paraboly s ohniskem $F[0;\frac{p}{2}]$, řídicí přímkou $q: y=-\frac{p}{2}$ a vrcholem $V[0;0]$. Osa y soustavy souřadnic je pak osou paraboly. Parabola leží celá v polorovině $y\geq 0$ (viz příklad vlevo níže).

Parabolu pokládáme za množinu všech bodů v rovině, které mají od bodu F stejnou vzdálenost jako od přímky q.

Rovnice parabol s vrcholem V[0;0] a jejich tečen

parametr
↑
$p=|FA|$ je vzdálenost ohniska od řídicí přímky





$x^2=6y$

$x^2=2\cdot\underbrace{3}_{\downarrow}y$

$p=3,\ \frac{p}{2}=1{,}5$

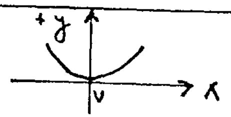
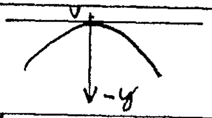
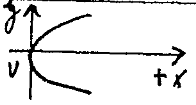
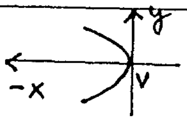
Obecně: $\boxed{x^2=2py}$

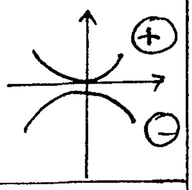
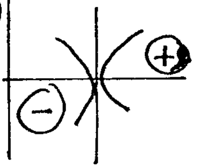
$x^2=-5y$

$x^2=-2\cdot\underbrace{2{,}5}_{\downarrow}$

$p=2{,}5\ ;\ \frac{p}{2}=1{,}25$

Obecně: $\boxed{x^2=-2py}$

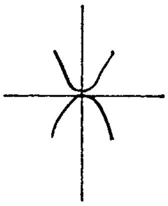
Rovnice paraboly s vrcholem V[0;0]	Rovnice tečen paraboly s vrcholem V[0;0]	Orientace grafu paraboly s vrcholem V[0;0]	
$x^2=2py$	$t: xx_0=p(y+y_0)$		$+y$
$x^2=-2py$	$t: xx_0=-p(y+y_0)$		$-y$
$y^2=2px$	$t: yy_0=p(x+x_0)$		$+x$
$y^2=-2px$	$t: yy_0=-p(x+x_0)$		$-x$

Rovnice paraboly s vrcholem V[m;n]	Její tečna v bodě T[x0;y0]	Orientace
$(x-m)^2 = \pm 2p(y-n) \dots p>0$ $x^2 + Ax + By + C = 0$	$(x_0-m).(x-m) = p(y_0-n) + p(y-n)$	
$(y-n)^2 = \pm 2p(x-m) \dots \quad p>0$ $y^2 + Ax + By + C = 0$	$(y_0-m).(y-m) = p(x_0-m) + p(x-m)$	

Tečka
[illegible]

Souřadnice vrcholů paraboly V[x0, y0]:

$x_0 = -\frac{b}{2a}$, $y_0 = C - \frac{b^2}{4a^2}$, ale jen pro



Příklad 1: Určete osu, vrchol, parametr a ohnisko paraboly dané rovnicí:

a) $y^2 = 8x$ → $2p = 8$, $p = 4$

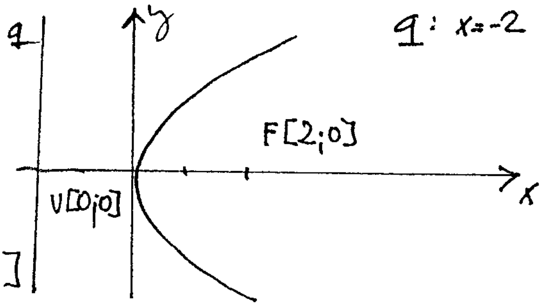
$y^2 = 2.4x$ → orientace (+x)

↓

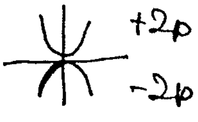
$p = 4$

Osou paraboly je osa x; $F[\frac{p}{2};0]$

$F[2;0]$

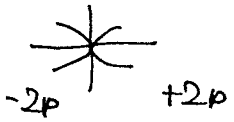


Poznámka: Začíná-li rovnice x^2, je



.

Začíná-li rovnice y^2, je



---

b) $y^2 = -4x$

$y^2 = -2.2x$

↓

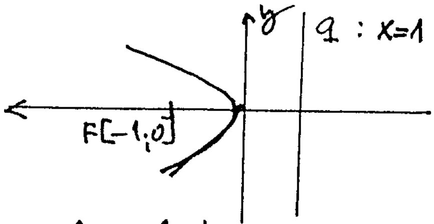
$p=2$

→ orientace (−x)

V[0;0]

$2p = -4$

$p = -2$, $\frac{p}{2} = -1$



Osou paraboly je osa x.

c) $x^2=16y$ $\quad 2p=16$

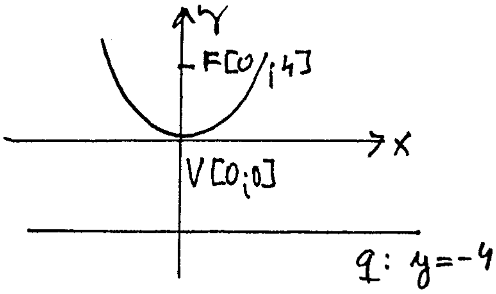
$p=8$

$x^2=2.8\,y \quad \frac{p}{2}=4$

↓

Orientace je +y

Osou paraboly je osa y



---

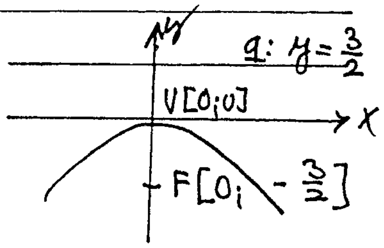
d) $x^2=-6y \rightarrow$ orientace je $-y$

$x^2=-2\cdot 3x$

$2p=-6$

$p=-3$

$\frac{p}{2}=-\frac{3}{2}$



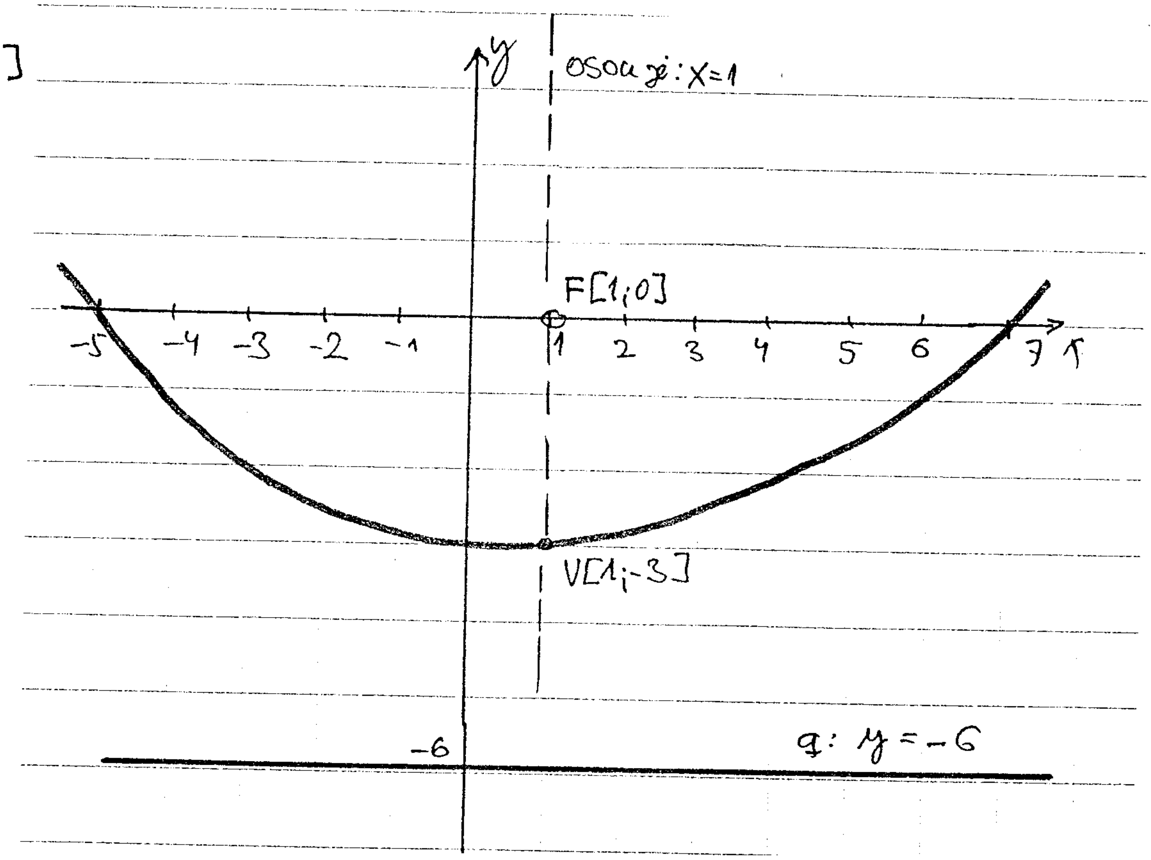
---

e) $\underset{m}{(x-1)}^2=\underset{\downarrow}{12}\underset{n}{(y+3)}$ ... viz tabulka na str ②

orientace +y $\leftarrow$ $2p=12$

$p=6$, $\frac{p}{2}=3$

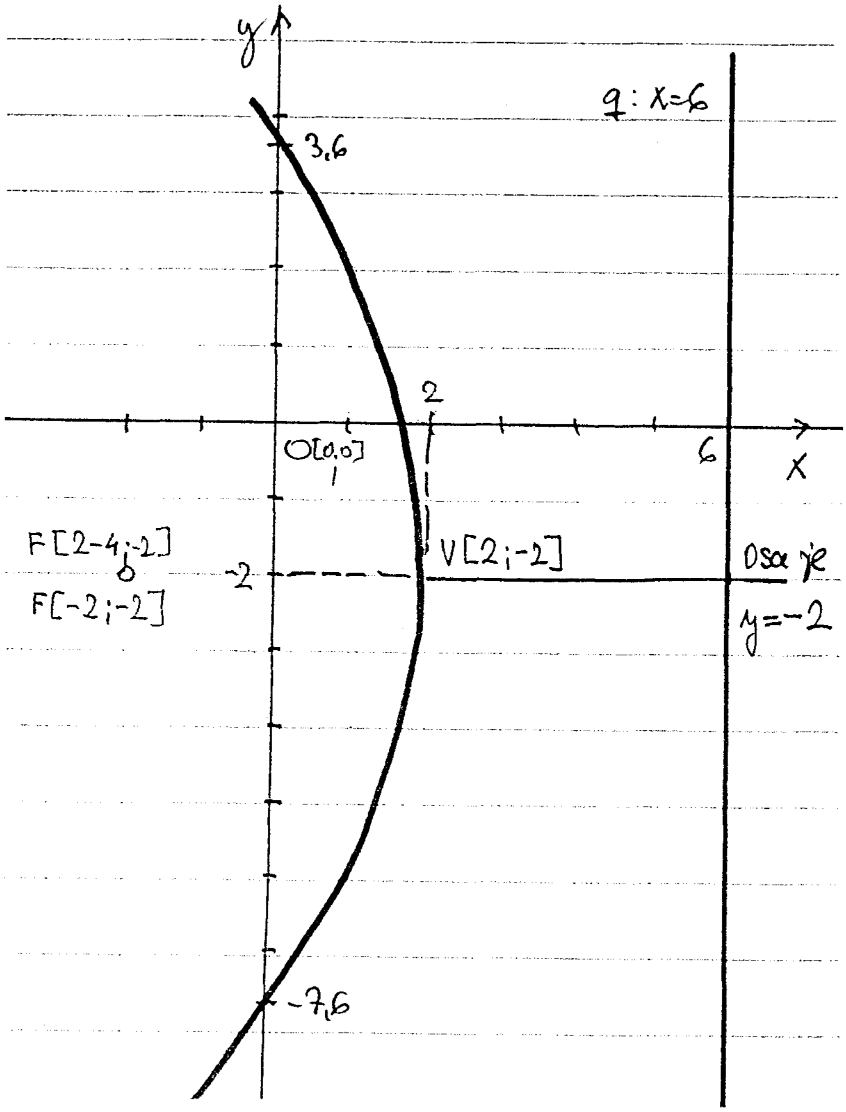
V[1;-3]



---

f) $\underset{n}{(y+2)}^2=-16\underset{m}{(x-2)}$ $\quad 2p=-16$ $\quad$ V[2;-2]

$p=-8$, $\frac{p}{2}=-4$



Doplňkový požadavek: Určete souřadnice průsečíků paraboly s osou y.

Řešení: $x=0$

$(y+2)^2=-16(0-2)$

$y^2+4y+4-32=0$

$y^2+4y-28=0$

$y_{1,2}=\frac{-4\pm\sqrt{128}}{2}\doteq\begin{cases}3{,}6\\-7{,}6\end{cases}$

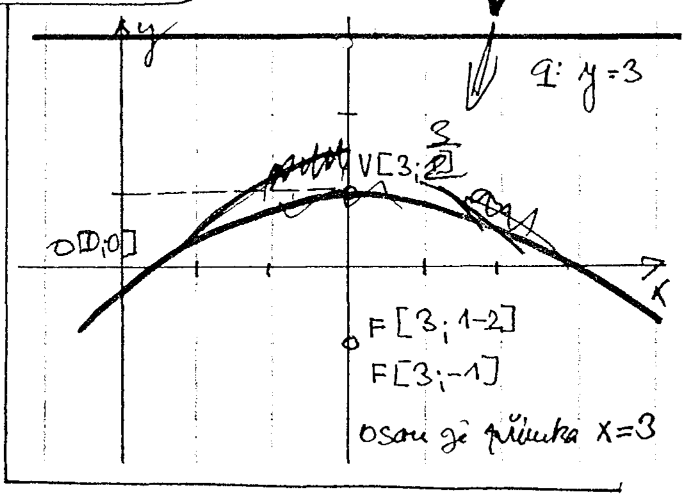
$[0;3{,}6]$, $[0;-7{,}6]$

g) $(\underset{m}{x-3})^2=-8(y-\underset{n}{1})$

$2p=-8$

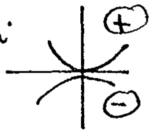
$p=-4$, $\frac{p}{2}=-2$

$V[3;1]$



Příklad 2: Popište parabolu a načrtněte obrázek, je-li její rovnice $x^2+4y-6x+3=0$

Úvodní poznámka: Je-li dáno x^2, má graf orientaci ⊕ nebo ⊖y



$x^2-6x=-4y-3$

$x^2-6x+9-9=-4y-3$

$(x-3)^2=-4y-3+9$

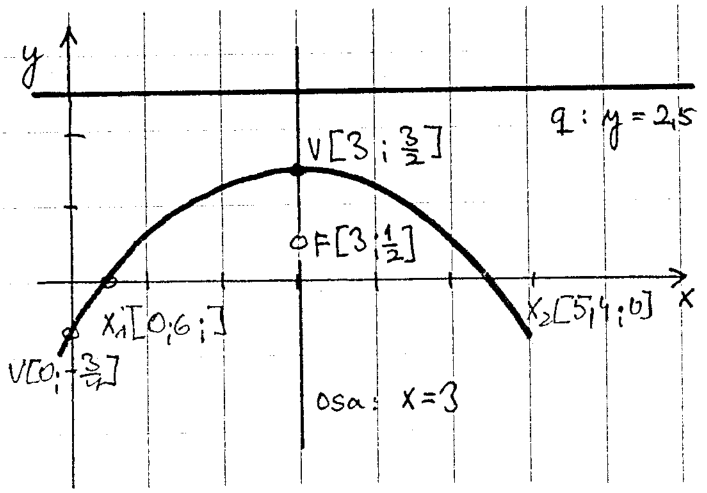
$(x-3)^2=-4y+6$

$\boxed{(\underset{m}{x-3})^2=-4(y-\underset{n}{\tfrac{3}{2}})}$

Je třeba „čisté" y, proto vytknu číslo (−4) ... oba členy dělím číslem 4.

orientace grafu −y

④ $2p=-4$, $p=-2$; $\frac{p}{2}=-1$ .. $V[3;\frac{3}{2}]$



Graf protne osu x:

$y = 0$

$x^2 - 6x + 3 = 0$

$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{24}}{2} \doteq \left\langle \begin{matrix} 5,4 \\ 0,6 \end{matrix} \right.$

Graf protne osu y:

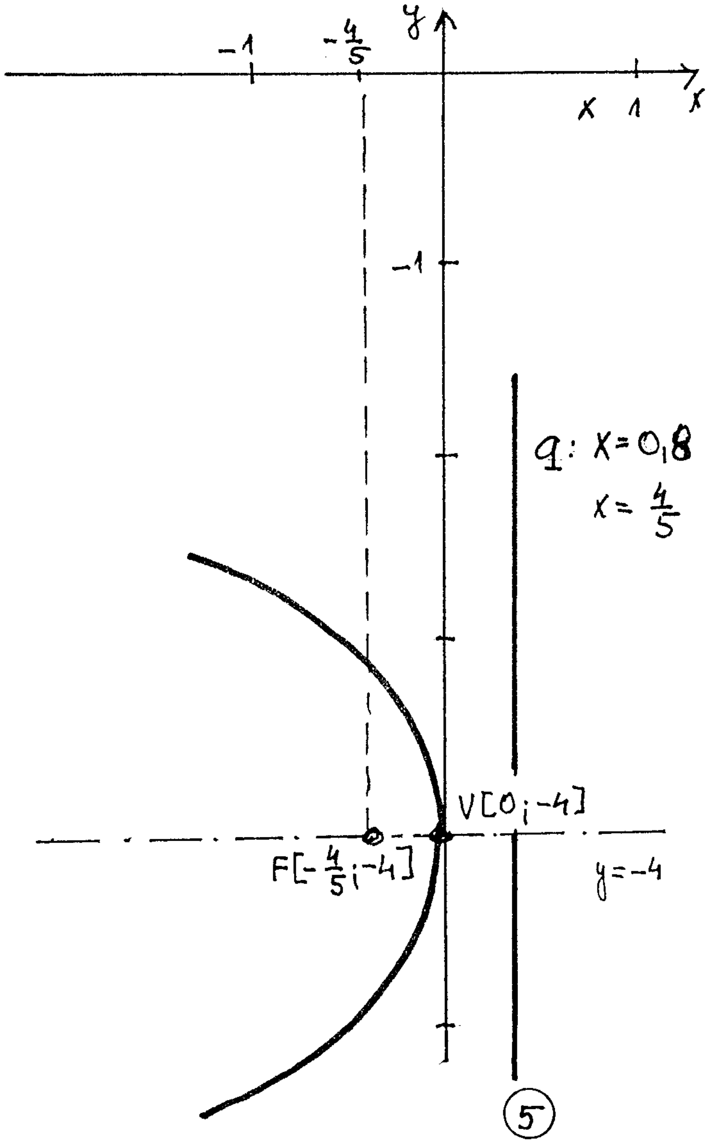
$x = 0$

$4y + 3 = 0 \rightarrow y = -\frac{3}{4}$

Výsledek: $V[3; \frac{3}{2}]$, $F[3; \frac{1}{2}]$, $p = -2$, $\frac{p}{2} = -1$

osa paraboly je přímka $x = 3$, řídicí přímka : $q = 2,5$.

Příklad 3: Popište parabolu s rovnicí $3,2x = -(y+4)^2$ a načrtněte obrázek.



$3,2x = -(y+4)^2$

$(y+4)^2 = -3,2x$

$(y+4)^2 = -3,2(x+0)$

$V[0; -4]$

$2p = -3,2$

$p = -1,6$

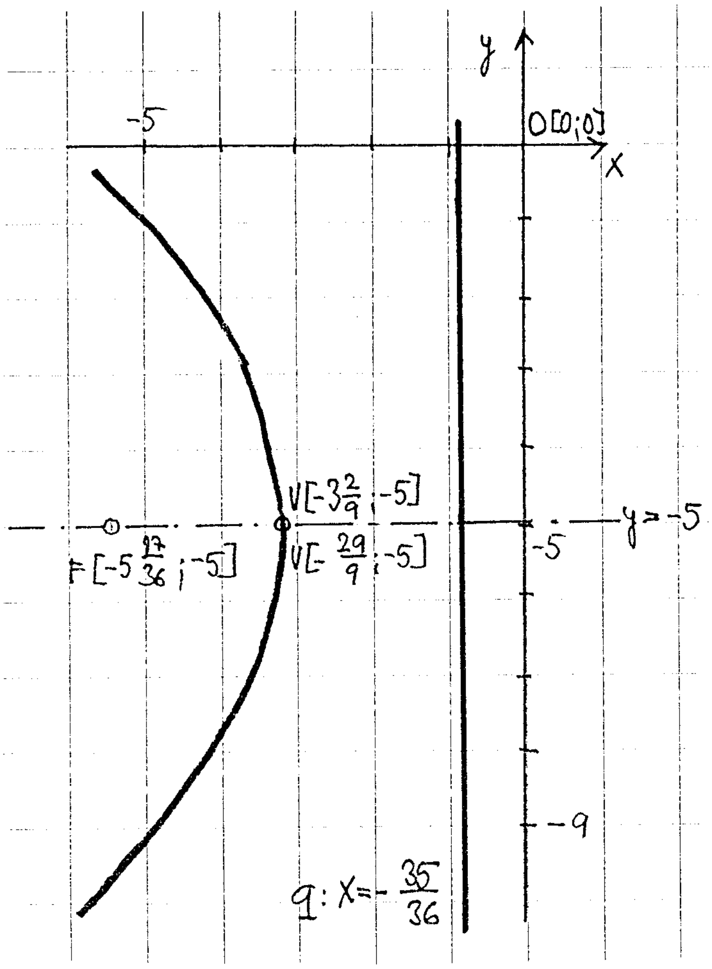
$\frac{p}{2} = -0,8 \left(-\frac{4}{5}\right)$

$F[-\frac{4}{5}; -4]$

Osa paraboly je přímka $y = -4$.

Řídicí přímkou je $x = 0,8$.

Příklad 4: Popište parabolu danou rovnicí $y^2+10y+9x+54=0$ a načrtněte obrázek



$\underline{y^2+10y+25}-25+9x+54=0$

$(y+5)^2=-9x-29$

$(\underset{n}{y+5})^2=-9(x+\underset{m}{\frac{29}{9}})$

↳ orientace grafu (−x)

$2p=-9$

$p=-\frac{9}{2}=-4{,}5$

$\frac{p}{2}=-\frac{9}{4}=-2{,}25$

$F[-\frac{29}{9}-\frac{9}{4};-5]$

$F[-\frac{197}{36};-5]\ldots[-5\frac{17}{36};-5]$

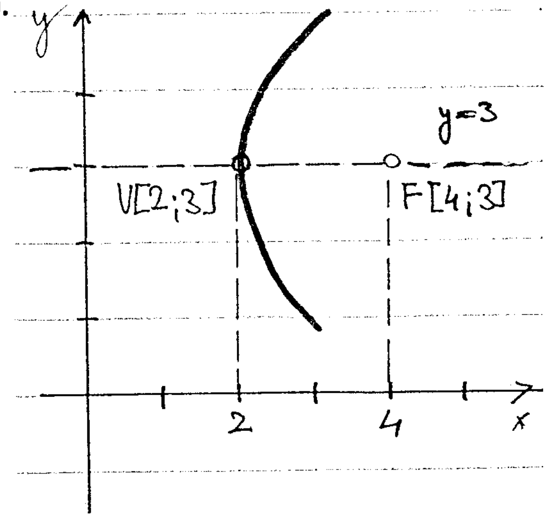
$q\ldots -\frac{29}{9}+\frac{9}{4}=-\frac{35}{36}$

Řídící přímka $q: x=-\frac{35}{36}$.

Osa paraboly: $y=-5$.

Příklad 5: Napište rovnici paraboly s vrcholem a) V[2;3] a ohniskem F[4;3]. Určete její osu.

Situaci nejdříve načrtneme, abychom zjistili orientaci grafu a mohli použít příslušnou rovnici.



Určíme $|FV|=\frac{p}{2}=2 \Rightarrow p=4$

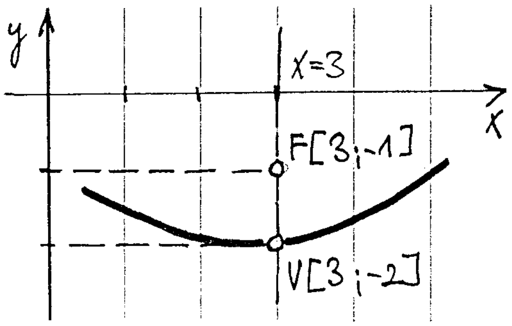
Orientace grafu je (+x).

Použijeme proto ve smyslu tabulky na str. 2 rovnici

$(y-m)^2=2p(x-m)$

$\boxed{(y-3)^2=8(x-2)}$; osou paraboly je přímka $y=3$

b) V[3;−2], F[3;−1]



Orientace (+y)

$|FV| = \frac{p}{2} = 1 \Rightarrow p = 2$

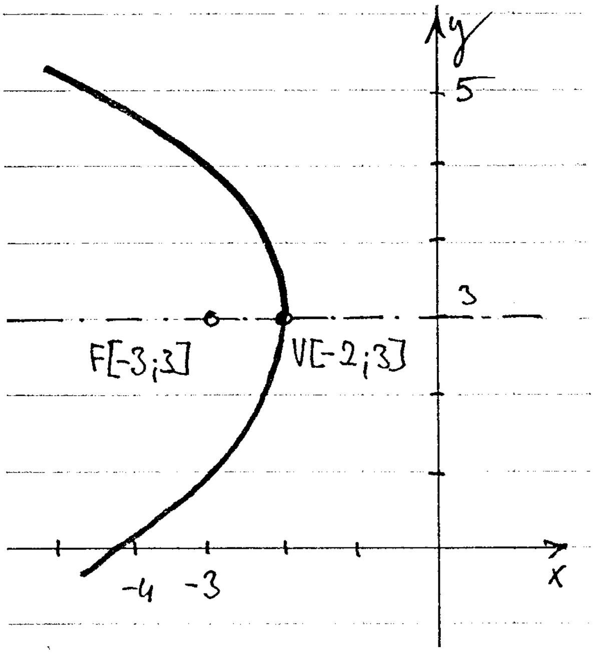
$(x-m)^2 = 2p(y-n)$

$(x-3)^2 = 4(y+2)$

Osou je přímka $x=3$.

---

c) V[−2;3], F[−3;3]



$\frac{p}{2} = 1$ Orientace (−x)

$p = 2$ $(y-n)^2 = -2p(x-m)$

$$\boxed{(y-3)^2 = -4(x+2)}$$

Osa: $y=3$

Ověření správnosti grafu:

Např. pro $x=-4$:

$(y-3)^2 = -4(-4+2)$

$(y-3)^2 = 8$

$y^2 - 6y + 9 - 8 = 0$

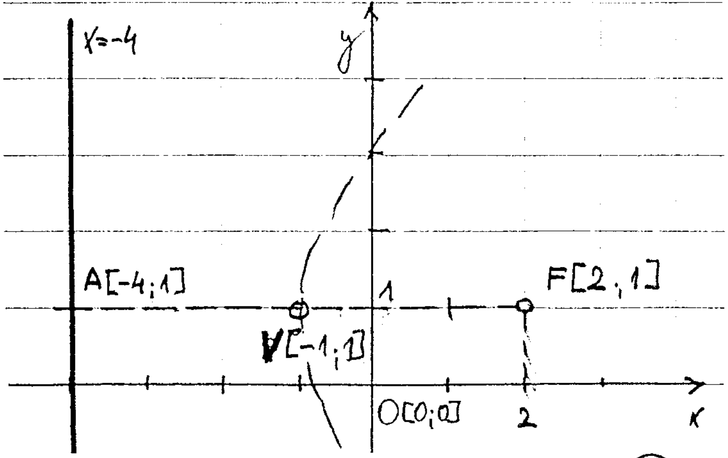
$y^2 - 6y + 1 = 0$

$y_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{32}}{2} \doteq$ 5,8 ; 0,17

Pro $y=0$: $(0-3)^2 = -4(x+2)$

$9 = -4x - 8 \; \ldots \; 4x = -17 \rightarrow x = -\frac{17}{4} = -4{,}25$

Příklad 6 (5.42/180-uč.): Napište rovnici paraboly s ohniskem F[2;1] a řídicí přímkou q: x = −4. Určete též souřadnice vrcholu V.



Znázornění pomocí obrázku.

Souřadnice x vrcholu V je středem úsečky AF ... $x = \frac{-4+2}{2} = -1$; $y = 1$ (jako u bodu F).

V[−1;1] ... orientace grafu (+x)

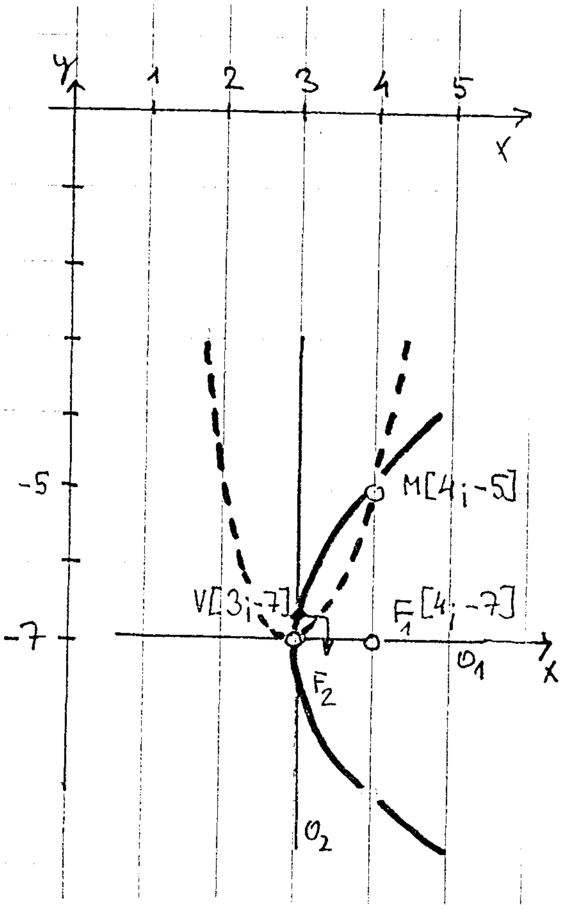
$(y-n)^2 = 2p(x-m)$, kde $p = |AF| = 6$

$$\boxed{(y-1)^2 = 12(x+1)}$$

Příklad 7: Napište rovnici paraboly p s vrcholem V[3;-7], která prochází bodem M[4;-5] a jejíž osa je rovnoběžná

a) s osou x   b) s osou y.

Řešení: a) Z hodnot m, n, x, y vypočítáme p; graf má orientaci (+x), proto použijeme



$(y-m)^2=2p(x-m)$

$(-5+7)^2=2p(4-3)$

$4=2p \quad \Rightarrow p=2\ ,\ \frac{p}{2}=1$

$$\boxed{(y+7)^2=4(x-3)}$$

$F_1[3+\frac{p}{2};n]\ldots[3+1;-7\ldots F[4;-7]$

b) Orientace (+y)

$(x-m)^2=2p(y-n)$

$(4-3)^2=2p(-5+7)$

$1=2p.2$

$4p=1$

$p=\frac{1}{4}\quad,\ \frac{p}{2}=\frac{1}{8}$

$(x-3)^2=2\cdot\frac{1}{4}(y+7)$

$$\boxed{(x-3)^2=\frac{1}{2}(y+7)}$$

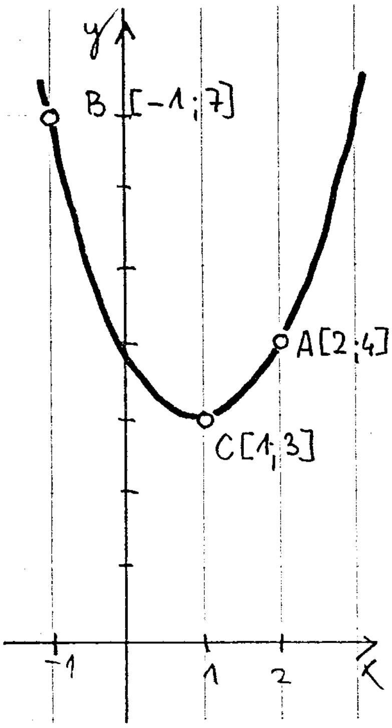
$F_2[3;-7+\frac{p}{2}]\ldots[3;-7+\frac{1}{8}]\ldots F[3;-6\frac{7}{8}]$

Příklad 8: Je dána trojice bodů: A[2;4], B[-1;7], C[1;3]. Určete rovnice všech parabol, které procházejí body A, B, C a mají osu rovnoběžnou s osou y.

Řešení: Na str. 2 jsou obecné rovnice parabol. Je-li osa paraboly rovnoběžná s osou y, má obecnou rovnici

$$\boxed{x^2+Ax+By+C=0}.$$

Do této rovnice dosadíme postupně souřadnice bodů A, B, C.



Řešení: Souřadnice bodů A, B, C dosadíme do uvedené rovnice $x^2+Ax+By+C=0$

$$\left.\begin{array}{ll} A: 2^2+2A+4B+C=0 \;\ldots\; 2A+4B+C=-4 & ① \\ B: (-1)^2-1.A+7B+C=0 \;\ldots\; -A+7B+C=-1 & ② \\ C: 1^2+1\cdot A+3B+C=0 \;\ldots\; A+3B+C=-1 & ③ \end{array}\right\} \begin{array}{l} 1.(-2) \\ \text{soustava} \\ \text{rovnic} \end{array}$$

$$\begin{aligned} 2A+4B+C&=-4 \\ \underline{-2A+14B+2C}&\underline{=-2} \\ 18B+3C&=-6 \quad /:3 \\ \boxed{6B+C=-2} \end{aligned}$$

②+③ $10B+2C=-2 \quad /:2$

$$\boxed{5B+C=-1}$$

$$\begin{aligned} 6B+C&=-2 \\ \underline{5B+C}&\underline{=-1} \quad /\cdot(-1) \\ 6B+C&=-2 \\ \underline{-5B-C}&\underline{=1} \\ \boxed{B=-1} \end{aligned}$$

$$6.(-1)+C=-2$$

$$\boxed{C=4}$$

$$2A+4.(-1)+4=-4$$

$$2A=-4$$

$$\boxed{A=-2}$$

$$x^2+(-2).x+(-1).y+4=0$$

$$x^2-2x-y+4=0$$

$$\underline{x^2-2x+1}-1=y-4$$

$$\boxed{(x-1)^2=y-3}$$ nebo

$$\boxed{(x-1)^2=1(y-3)}$$

Vrchol V[1;3]

Zkouška: $x=2$

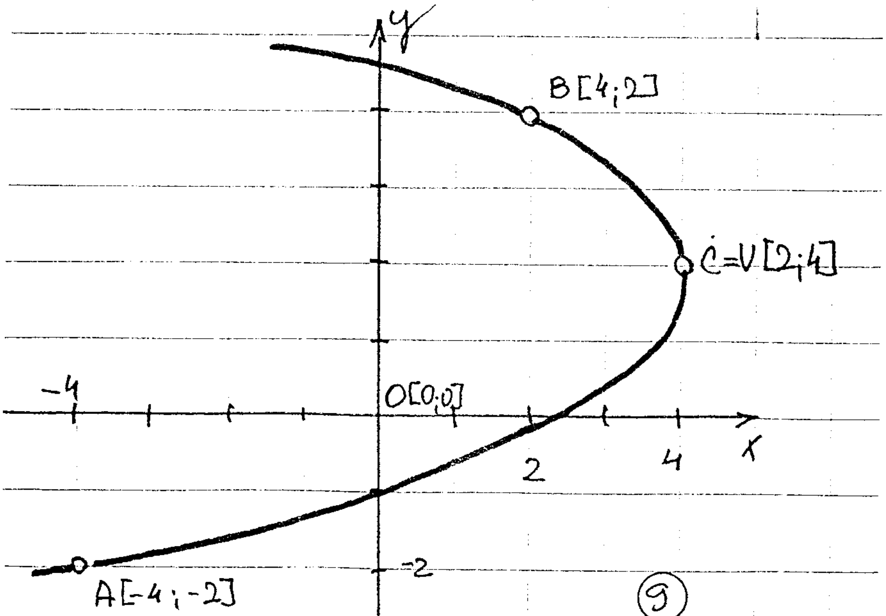
$A: (2-1)^2=y-3$

$1=y-3$

$y=4$

A[2;4] atd.

Příklad 9: Určete rovnici paraboly, jejíž osa je rovnoběžná s osou $\underline{x}$ a prochází body A[-4;-2], B[4;2], C[2;4]



Jestliže je osa paraboly rovnoběžná s osou $\underline{x}$, má obecnou rovnici

$$\boxed{y^2+Ax+By+C=0}.$$

Do této rovnice dosadíme opět postupně souřadnice bodů A, B, C.

$y^2+Ax+By+C=0$

$A[-4;-2]$.. $4-4A-2B+C=0$ ... $-4A-2B+C=-4$ ①

$B[4;2]$... $4+4A+2B+C=0$ ... $4A+2B+C=-4$ ②

$C[2;4]$.. $16+2A+4B+C=0$ ... $2A+4B+C=-16$ ③

①+② $2C=-8$ $\qquad 4A+2B-4=4$

$\boxed{C=-4}$ $\qquad \boxed{4A+2B=0}$

$2A+4B-4=-16$

$\boxed{2A+4B=-12}$

$4A+2B=0$

$2A+4B=-12 \quad |\cdot(-2)$

$4A+2B=0$

$-4A-8B=24$

$-6B=24$

$\boxed{B=-4}$

③ $2A+4(-4)-4=-16$

$2A-16-4=-16$

$2A=4$

$\boxed{A=2}$

$A=2, B=-4, C=-4$ dosadíme do rovnice.

$y^2+Ax+By+C=0$

$\boxed{y^2+2x-4y-4=0}$ lze dále upravit:

$y^2-4y=-2x+4$

$\underline{y^2-4y}+4-4=-2x+4$

$(y-2)^2=-2x+8$

$\boxed{(y-2)^2=-2(x-4)} \Rightarrow S[4;2]$

Správnost rovnice si lze ověřit:

$A[-4;-2]$ .. pro $y=-2$

$(-2-2)^2=-2x+8$

$16=-2x+8$

$2x=-8$

$\boxed{x=-4}$, totéž lze zjistit pro body B, C. Opět se potvrdí správnost rovnice.

Příklad 10: Napište rovnici tečny paraboly s rovnicí

a) $y^2=18x$ v dotykovém bodě $T[2;y_0]$, kde $y_0>0$

Nejdříve určíme souřadnici y_0 bodu T:

$y^2=18.2$

$y^2=36$

$y_{1,2}=\pm\sqrt{36} < {6 \atop -6}$ (nevyhovuje podmínce $y_0>0$) ... $T[\underset{x_0}{2};\underset{y_0}{6}]$

Hodnoty x_0, y_0, p dosadíme do rovnice tečny.

$y^2 = 2 \cdot 9x$ – orientace grafu podle str. 1 je $\boxed{+x}$

$p = 9$

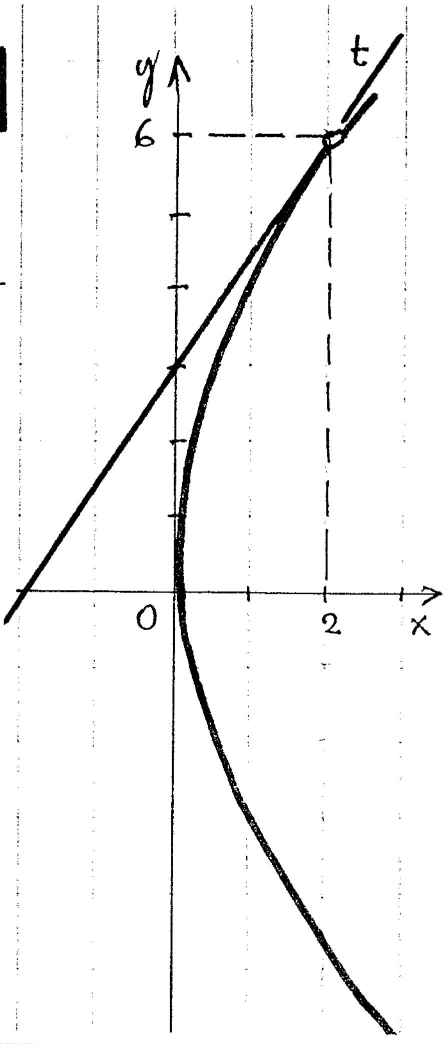
$t: \; yy_0 - p(x + x_0) = 0$

$6y - 9(x+2) = 0$

$6y - 9x - 18 = 0 \quad |:(-3)$

$t: \boxed{3x - 2y + 6 = 0}$

$t: \boxed{y = \frac{3}{2}x + 3}$



b) 5.81/56a) sbírka

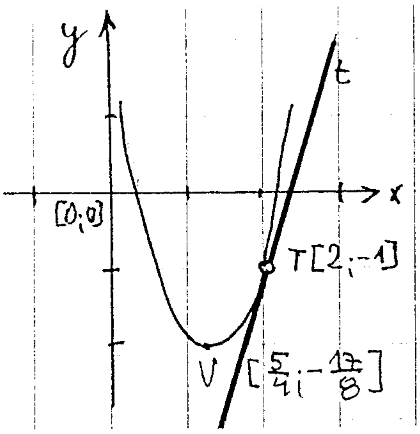
$y = 2x^2 - 5x + 1, \; T[2; y_0]$

↳ orientace $\boxed{+y}$

Pro $x=2$ je

$y = 2 \cdot 2^2 - 5 \cdot 2 + 1 = -1$

$T[2; -1]$



Danou rovnici paraboly upravíme na tvar

$(x-m)^2 = 2p(y-n)$

$2x^2 - 5x = y - 1$

$2(x^2 - \frac{5}{2}x) = y - 1$

$2[(\underline{x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{25}{16}}) - \frac{25}{16}] = y - 1$

$2(x - \frac{5}{4})^2 - \frac{25}{8} = y - 1$

$2(x - \frac{5}{4})^2 = y + \frac{17}{8} \quad | \cdot \frac{1}{2}$

$(x - \frac{5}{4})^2 = \frac{1}{2}(y + \frac{17}{8})$

$$\boxed{(x - \frac{5}{4})^2 = 2 \cdot \frac{1}{4}(y + \frac{17}{8})}$$

↓

$p = \frac{1}{4}$

$V[\frac{5}{4}; -\frac{17}{8}]$

m n

Tečna t:

$(x_0 - m) \cdot (x - m) = p(y_0 - n) + p(y - n)$

$(2 - \frac{5}{4}) \cdot (x - \frac{5}{4}) = \underbrace{\frac{1}{4}(-1 + \frac{17}{8})} + \frac{1}{4}(y + \frac{17}{8})$

$\frac{3}{4}(x - \frac{5}{4}) = \frac{9}{32} + \frac{1}{4}(y + \frac{17}{8}) \quad | \cdot 32$

$24(x - \frac{5}{4}) = 9 + 8(y + \frac{17}{8})$

$24x - 30 = 9 + 8y + 17$

$24x - 8y - 56 = 0 \quad |:8$

$\boxed{3x - y - 7 = 0}$ je rovnice tečny v bodě $T[2; -1]$.

c) 5a182 - Sb $\quad y^2 = 2x$, $A[2;-2]$, $A = T$ bod dotyku

$\qquad\qquad\qquad\qquad\quad x_0 \;\; y_0$

Protože jde o parabolu tvaru $y^2 = 2px$, použijeme rovnici tečny $t: y y_0 = p(x + x_0)$ ... $y \cdot (-2) = 1(x+2)$

$y^2 = 2 . 1\, x$

$\downarrow$

$p = 1$

$-2y = x + 2$

$t: \boxed{x + 2y + 2 = 0}$

---

d) 5b182 - Sb.

$3y^2 + x - 12y + 14 = 0 \quad \dots \quad T[-2;2]$

$3y^2 - 12y = -x - 14$

$3(y^2 - 4y) = -x - 14$

$3(\underline{y^2 - 4y + 4} - 4) = -x - 14$

$3[(y-2)^2 - 4] = -x - 14$

$3(y-2)^2 - 12 = -x - 14$

$3(y-2)^2 = -x - 2 \quad | \cdot \frac{1}{3}$

$(y-2)^2 = -\frac{1}{3}(x+2)$

$(y-2)^2 = -2 \cdot \frac{1}{6}(x+2)$

Podle poučení v učebnici na str. 179: Je-li záporné (−2), musíme vzít opačné p, čili −p ... $p = -\frac{1}{6}$

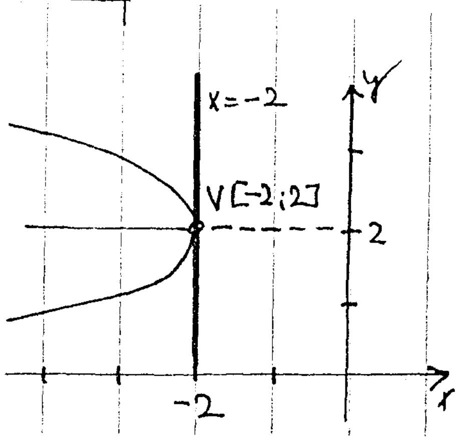
$V[-2;2]$

$(y_0 - n) . (y - n) = p(x_0 - m) + p(x - m)$

$\underbrace{(2-2) . (y-2)}_{0} = -\frac{1}{6}\underbrace{(-2+2)}_{0} - \frac{1}{6}(x+2)$

$\frac{1}{6}(x+2) = 0 \quad | \cdot 6$

$x + 2 = 0 \qquad \boxed{x = -2}$



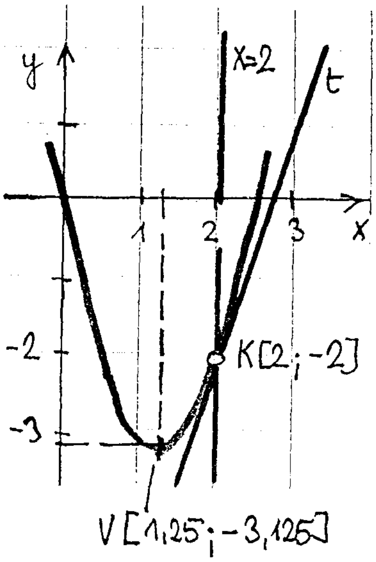
Příklad 11 (5.77/56-Sb):

Je dána parabola s rovnicí $y = 2x^2 - 5x$ a bod $K[2;-2]$. Určete rovnice všech přímek, které procházejí bodem K a mají s parabolou právě 1 společný bod.

Nejdříve si provedu pomocný výpočet, abych si mohl danou situaci graficky představit. Určíme průsečíky paraboly s osou x.

$2x^2-5x=0$

$x(2x-5)=0 \quad \begin{cases} x_1=0 \\ 2x-5=0 \rightarrow x_2 = 2{,}5 \end{cases}$



Mohu též určit vrchol V:

$y = ax^2+bx+c$

$y = 2x^2-5x+0$

$V\left[-\frac{b}{2a}\,;\, c-\frac{b^2}{4a}\right]$

$-\frac{b}{2a} = -\frac{-5}{2.2} = \frac{5}{4}$

$c-\frac{b^2}{4a} = 0-\frac{25}{8} - \frac{25}{8}$

$V\left[\frac{5}{4}; -\frac{25}{8}\right] \dots [1{,}25; -3{,}125]$

Nyní zjistíme, zda bod K je bodem paraboly.... $K[\underset{x_0}{2}; \underset{y_0}{-2}]$

$L=-2;\ P=2.2^2-5.2=8-10=-2 \dots \Rightarrow K \in$ paraboly

Tečna: $(x_0-m).(x-m)=p(y_0-n)+p(y-n)$

$(2-\frac{5}{4}).(x-\frac{5}{4})=\frac{1}{4}(-2+\frac{25}{8})+\frac{1}{4}(y+\frac{25}{8})$

$\frac{3}{4}.(x-\frac{5}{4})=-\frac{1}{2}+\frac{25}{32}+\frac{1}{4}y+\frac{25}{32}$

$\frac{3}{4}(x-\frac{5}{4})=\frac{1}{4}y+\frac{17}{16} \quad |.16$

$12(x-\frac{5}{4})=4y+17$

$12x-15=4y+17 \rightarrow 12x-4y-32=0 \;|\cdot\frac{1}{4} \rightarrow 3x-y-8=0$

$t: 3x-y-8=0$

Vý~~počet~~ p:

$(x-m)^2=2p(y-n)$

$(2-\frac{5}{4})^2=2p(-2+\frac{25}{8})$

$\frac{9}{16}=2p\cdot\frac{9}{8}$

$2p=\frac{8}{16} \rightarrow \boxed{p=\frac{1}{4}}$

Přímky procházející bodem K mají rovnice $x=2$, $3x-y-8=0$.

Příklad 12 (5.73 155 Sb.) Jak dlouhou tětivu vytíná přímka $x-y-2=0$ na parabole $y^2-8x=0$?

Určíme průsečíky P,Q přímky s parabolou, jejich vzdálenost je délka tětivy.

$x-y-2=0$

$x=y+2$

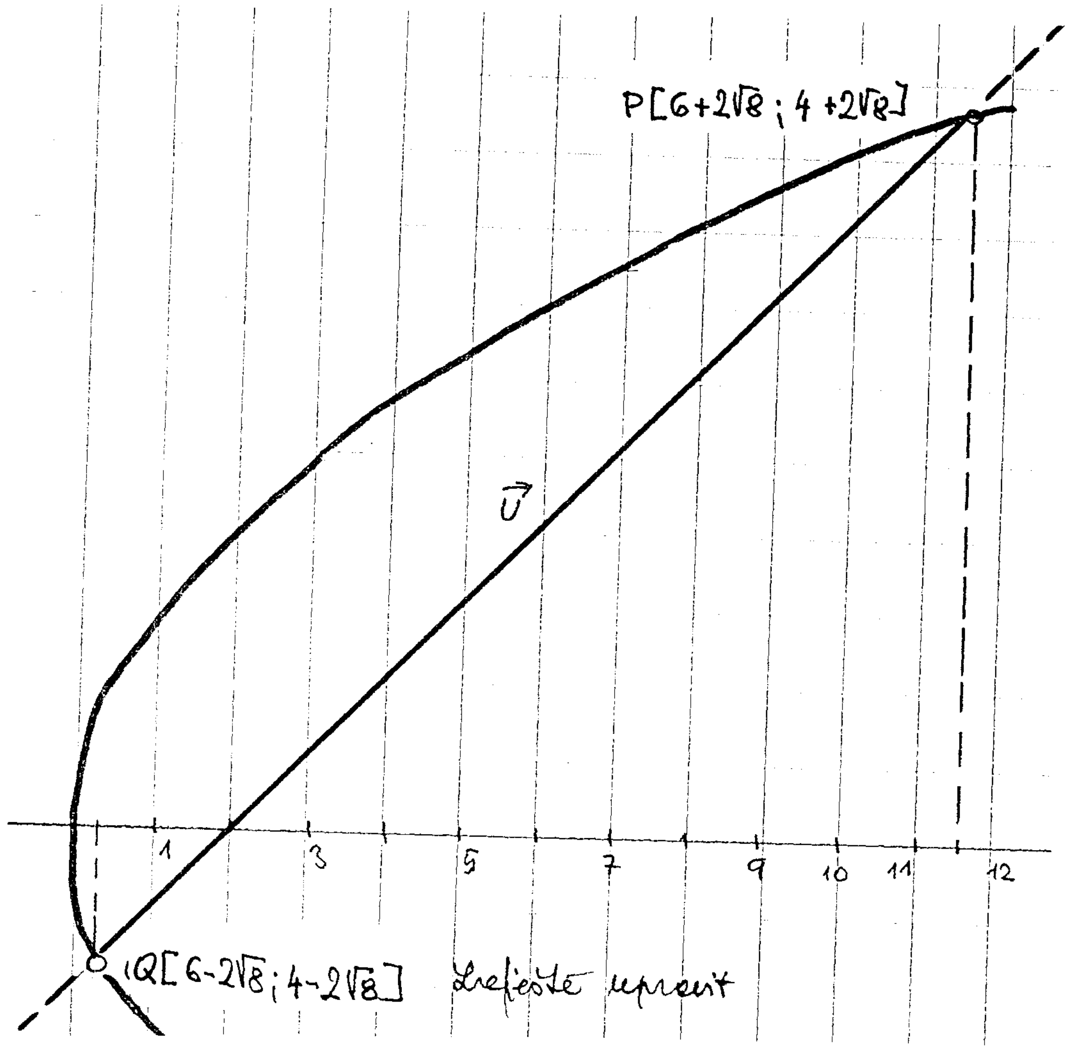
$y^2-8(y+2)=0$

$y^2-8y-16=0$

$\rightarrow y_{1,2}=\frac{8\pm\sqrt{128}}{2}=\frac{8\pm\sqrt{16.8}}{2}=\frac{8\pm4\sqrt{8}}{2}=4\pm2\sqrt{8}$

$x_1=4+2.\sqrt{8}+2=6+2\sqrt{8}$ | $P[6+2\sqrt{8}; 4+2\sqrt{8}]$

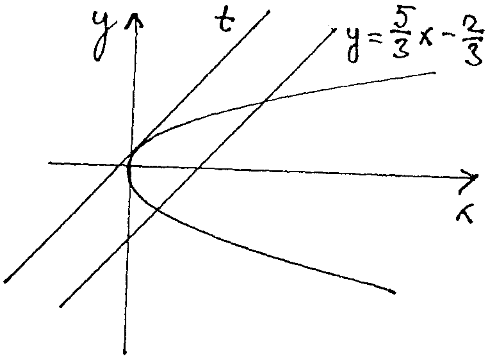
$x_2=4-2\sqrt{8}+2=6-2\sqrt{8}$ | $Q[6-2\sqrt{8}; 4-2\sqrt{8}]$



$$\vec{v} = P-Q = \left(6+2\sqrt{8}-(6-2\sqrt{8})\ ,\ 4+2\sqrt{8}-(4-2\sqrt{8})\right) = (4\cdot\sqrt{8}, 4\sqrt{8})$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{(4\sqrt{8})^2+(4\sqrt{8})^2} = \sqrt{256} = 16$$ **Délka tětivy je 16.**

Příklad 13 (5.84a/56-S6): Napište rovnici sečny paraboly $y^2 = 9x$ rovnoběžné s přímkou $5x-3y-2=0$



$$3y = 5x-2 \quad | \cdot \frac{1}{3}$$

$$y = \frac{5}{3}x - \frac{2}{3}$$

↳ Tuto směrnici musí mít sečna t

$y = \frac{5}{3}x + q$ dosadíme do rovnice paraboly

$$\left(\frac{5}{3}x+q\right)^2 = 9x$$

$$\frac{25}{9}x^2 + \frac{10}{3}qx \overset{+q^2}{} - 9x = 0 \quad | \cdot 9$$

$$25x^2 + 30qx + 9q^2 - 81x = 0$$

$$\underset{a}{\underset{\top}{25}}x^2 + \underset{b}{\underset{\top}{(30q-81)}}x + \underset{c}{\underset{\top}{9}}q^2 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{-(30q-81) \pm \sqrt{(30q-81)^2 - 900q^2}}{50}$$

Protože jde o tečnu, tak $D = 0$

$$(30q-81)^2 - 900q^2 = 0$$

$$\cancel{900q^2} - 4860q + 6561 - \cancel{900q^2} = 0$$

$$4860q = 6561$$

$$q = \frac{27}{20}$$

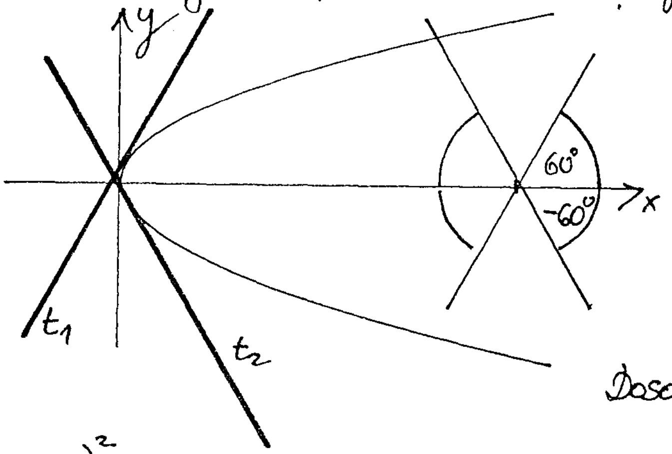
$$y = \frac{5}{3}x + \frac{27}{20} \quad |\cdot 60$$

$$60y = 100x + 81$$

$$100x - 60y + 81 = 0 \quad |:20$$

$$\boxed{5x - 3y + 4{,}05 = 0}$$ je tečna

Příklad 14 (5.85 a/57): Určete rovnici každé tečny paraboly o rovnici $y^2 = 6x$, která má od osy paraboly odchylku 60°.



Směrnice tečny t_1:

$\operatorname{tg} 60° = \sqrt{3}$, $\operatorname{tg}(-60)° = -\sqrt{3}$

t_1: $y = kx + q$

$y = \sqrt{3}x + q$

Dosadíme do $y^2 = 6x$

$$(\sqrt{3}x + q)^2 = 6x$$

$$3x^2 + 2\sqrt{3}qx + q^2 - 6x = 0$$

$$3x^2 + (2\sqrt{3}q - 6)x + q^2 = 0$$

$D = 0$

$$(2\sqrt{3}q - 6)^2 - 12q^2 = 0$$

$$\cancel{12q^2} - 24\sqrt{3}q + 36 - \cancel{12q^2} = 0$$

$$24\sqrt{3}q = 36$$

$$q = \frac{36}{24\sqrt{3}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Pro druhou tečnu je $q = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $k = -\sqrt{3}$

t_1: $y = \sqrt{3}x + \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\qquad$ t_2: $y = -\sqrt{3}x - \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\sqrt{3}x - y + \frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \quad |\cdot 2$$

$$\boxed{\begin{aligned} t_1&: 2\sqrt{3}x - 2y + \sqrt{3} = 0 \\ t_2&: 2\sqrt{3}x + 2y + \sqrt{3} = 0 \end{aligned}}$$