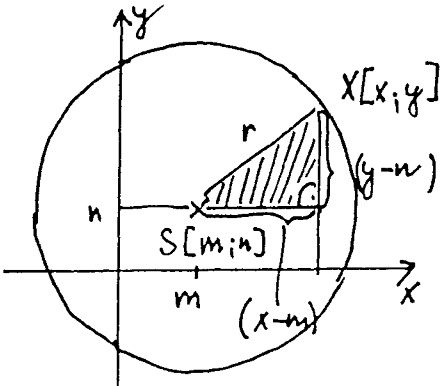
14 a) KRUŽNICE V ANALYTICKÉ GEOMETRII



$\boxed{(x-m)^2+(y-n)^2=r^2}$ středová rovnice kruž.

$x^2+y^2\underbrace{-2m}x\;\underbrace{-2n}y+p=0$

$x^2+y^2+Ax+By+C=0$

obecné rovnice kružnice

$p=m^2+n^2-r^2 \qquad r^2=m^2+n^2-p$

Příklad 1: Napište středovou a obecnou rovnici kružnice se středem $S[\sqrt{2};-1]$ a poloměrem $\sqrt{3}$. Zjistěte, zda na ní leží bod $A[2.\sqrt{2};0]$.

Řešení:

$(x-m)^2+(y-n)^2=r^2$

$\boxed{(x-\sqrt{2})^2+(y+1)^2=3}$

$x^2-2x\sqrt{2}+2+y^2+2y+1-3=0$

$\boxed{x^2+y^2-2x\sqrt{2}+2y=0}$

$A[\underbrace{2\sqrt{2}}_{x};\underbrace{0}_{y}]\ldots L=(2\sqrt{2})^2+0^2-2.2\sqrt{2}.\sqrt{2}+2.0=4.2-4.2=0$

$P=0,\ L=P \Rightarrow \boxed{A\in k}$

Příklad 2: Napište středovou a obecnou rovnici kružnice se středem $S[-4;3]$ a poloměrem $r=6$. Leží na ní bod $M[3;2]$?

$(x-m)^2+(y-n)^2=r^2$

$\boxed{(x+4)^2+(y-3)^2=36}$

$x^2+8x+16+y^2-6y+9-36=0$

$\boxed{x^2+y^2+2x-6y-11=0}$

$M[3;2]\ldots L=3^2+4^2+2.3-6.2-11=19,\ P=0,\ L\neq P \Rightarrow \boxed{M\notin k}$

Příklad 3: Určete souřadnice středu S a poloměr r kružnice s danou rovnicí:

a) $(x-3)^2+(y+1{,}5)^2=2 \ \ldots \boxed{S[3;-1{,}5],\ r=\sqrt{2}}$

---

b) $x^2+y^2-6x+4y-23=0 \ \ldots \left(\frac{6}{2}\right)^2=9 \ldots \left(\frac{4}{2}\right)^2=4$

$\underline{x^2-6x+9}+\underline{y^2+4y+4}-23-9-4=0$

$(x-3)^2+(y+2)^2=36 \Rightarrow \boxed{S[3;-2],\ r=6}$

---

c) $x^2+y^2+2x=5$

$x^2+2x \;+ (y+0)^2=5$

$\underline{x^2+2x+1} \;+ (y+0)^2-1=5$

$(x+1)^2+(y+0)^2=6$

$\boxed{S[-1;0],\ r=\sqrt{6}}$

d) $x^2+y^2+6x-8y+13=0$

$x^2+6x \;+ y^2-8y \;+13=0$

$\underline{x^2+6x+9} + \underline{y^2-8y+16} -9-16+13=0$

$(x+3)^2+(y-4)^2=12$

$\boxed{S[-3;4],\ r=\sqrt{12}}$

---

e) $x^2+y^2+\sqrt{8}\,x-\sqrt{12}\,y=9 \quad \dots \quad \left(\frac{\sqrt{8}}{2}\right)^2=\frac{8}{4}=2\ ;\ \left(\frac{\sqrt{12}}{2}\right)^2=\frac{12}{4}=3$

$x^2+\sqrt{8}x+y^2-\sqrt{12}y=9$

$x^2+2\sqrt{2}x+y^2-2\sqrt{3}y=9$

$\underline{x^2+2\sqrt{2}x+2} + \underline{y^2-2\sqrt{3}y+3} -2-3=9$

$(x+\sqrt{2})^2+(y-\sqrt{3})^2=14 \implies \boxed{S[-\sqrt{2};\sqrt{3}],\ r=\sqrt{14}}$

Příklad 4: Pomocí výpočtu rozhodněte, které z následujících rovnic je rovnicí kružnice.

a) $x^2+y^2-3x+5y-7=0$

$x^2-3x+y^2+5y=7$

$\underbrace{x^2-3x+\frac{9}{4}}\ \underbrace{+y^2+5y+\frac{25}{4}}-\frac{9}{4}-\frac{25}{4}=7$

$\to (x-\frac{3}{2})^2+(y+\frac{5}{2})^2=\frac{31}{2}$

$S[\frac{3}{2};-\frac{5}{2}],\ r=\sqrt{\frac{31}{2}}$ Daná rovnice je rovnicí kružnice.

---

b) $x^2+y^2-8x+25=0$

$x^2-8x+(y+0)^2=-25$

$\underline{x^2-8x+16}+(y+0)^2=-25+16$

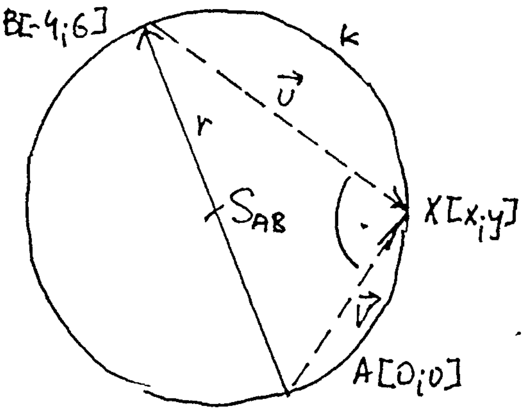
$\to (x-4)^2+(y+0)^2=\boxed{-9}$

není poloměr, $\sqrt{-9}$ neexistuje v R

Daná rovnice není rovnicí kružnice.

Příklad 5: Napište středovou rovnici kružnice s průměrem AB, je-li

a) $A[0;0], B[-4;6]$



1. postup: $S_{AB}[-2;3]$

$\vec{r}=B-S_{AB}=(-2;3)\ ,\ |\vec{r}|=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}$

$\boxed{(x+2)^2+(y-3)^2=13}$

2. postup: na kružnici k zvolíme bod $X[x;y]$ různý od bodů A, B; $\vec{u}=X-B$, $\vec{v}=X-A$.

$\vec{u}=(x+4, y-6)$, $\vec{v}=(x;y)$, musí platit $\vec{u}\perp\vec{v}$ (Thaletova v.)

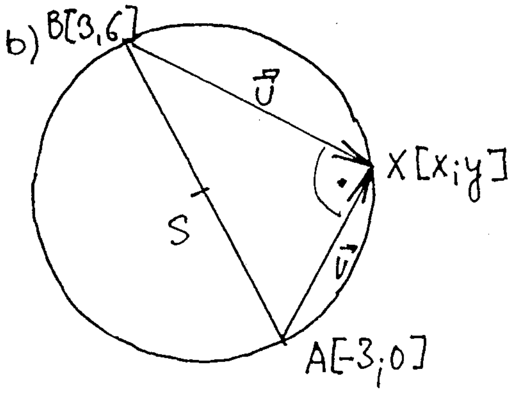
$\Rightarrow \vec{u}\cdot\vec{v}=0$

$(x+4, y-6).(x,y)=0$

$\underline{x^2+4x}+\underline{y^2-6y}=0$

$(x+2)^2+(y-3)^2-4-9=0$

$$\boxed{(x+2)^2+(y-3)^2=13}$$

b) 

$\vec{u}=X-B=(x-3, y-6)$

$\vec{v}=X-A=(x+3, y)$

$(x-3, y-6).(x+3, y)=0$

$(x-3).(x+3)+(y-6).y=0$

$x^2-9+y^2-6y=0$

$(x+0)^2-9+\underline{y^2-6y+9}-9=0$

$$\boxed{x^2+(y-3)^2=18} \leftarrow (x+0)^2+(y-3)^2-18=0$$

Příklad 6: Zjistěte, pro které hodnoty parametru p je daná rovnice $x^2+y^2+4x-6y+p=0$ rovnicí kružnice. Určete souřadnice jejího středu a její poloměr.

$\underline{x^2+4x}+\underline{y^2-6y}+p=0$

$\underline{x^2+4x+4}+\underline{y^2-6y+9}-4-9+p=0$

$(x+2)^2+(y-3)^2+p=13$

$(x+2)^2+(y-3)^2=13-p$

$\boxed{r=\sqrt{13-p}}$

$13-p>0$

$\boxed{p<13}$

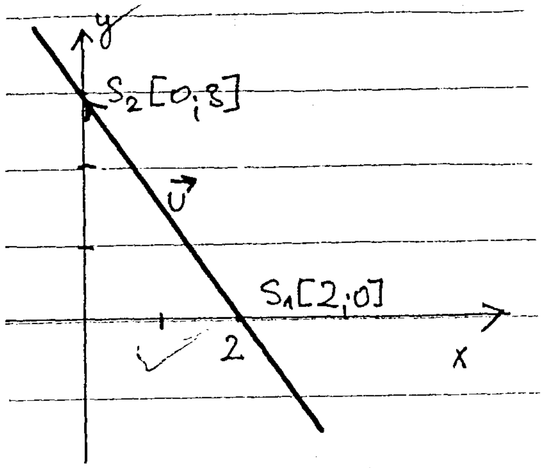
$\boxed{S[-2;3]}$

Příklad 7: Napište rovnici přímky, která prochází středy kružnic s rovnicemi:

$(x-2)^2+y^2=16$ $\qquad$ $x^2+(y-3)^2=9$

$(x-2)^2+(y+0)^2=16$ $\qquad$ $(x+0)^2+(y-3)^2=9$

$S_1[2;0]$ $\qquad$ $S[0;3]$



$\vec{u} = S_2 - S_1 = (-2;3) \rightarrow 3x+2y=6$

$x = 2-2t \quad |\cdot 3$

$y = 3t \quad |\cdot 2$

$3x = 6-6t$

$2y = 6t$

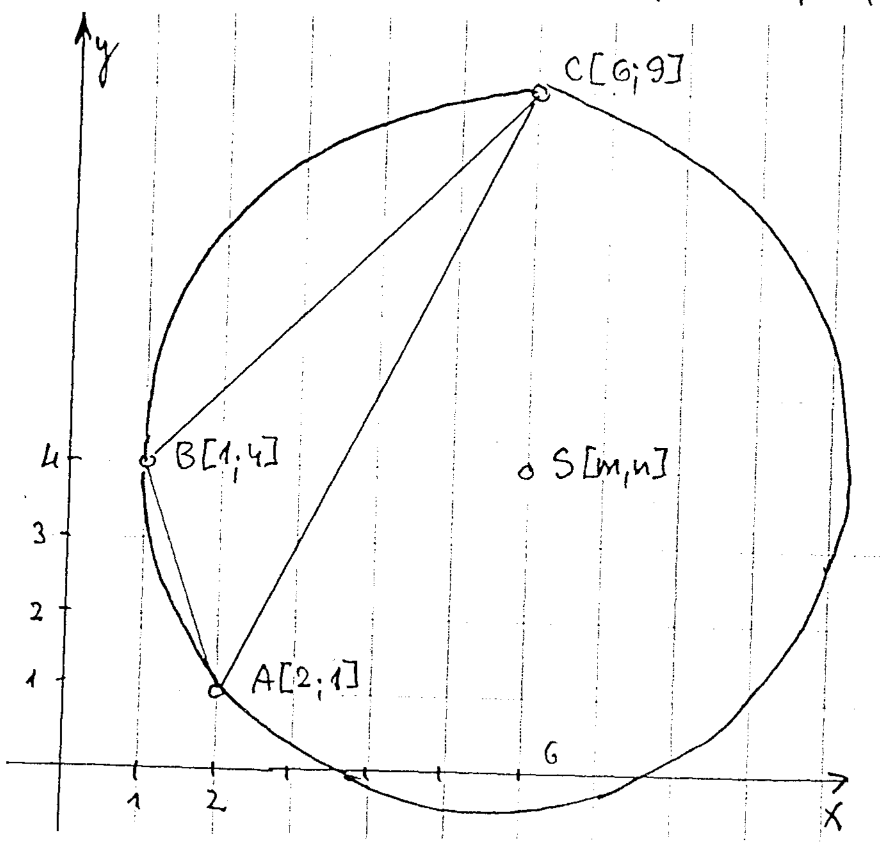
$\boxed{3x+2y-6=0}$

nebo

$2y = -3x+6 \quad |:2$

$\boxed{y = -\frac{3}{2}x+3}$

Příklad 8: Napište rovnici kružnice, která je opsána trojúhelníku ABC, je-li $A[2;1]$, $B[1;4]$, $C[6;9]$; určete S.



Rovnici kružnice budeme hledat v obecném tvaru

$x^2+y^2-2mx-2ny+p=0$

$x^2+y^2+Ax+By+C=0$

Rovnice $x^2+y^2+Ax+By+C=0$

Pro $A[2;1]$ … $2^2+1^2+2A+1B+C=0 \Rightarrow 2A+B+C=-5$

Pro $B[1;4]$ … $1^2+4^2+1A+4B+C=0 \Rightarrow A+4B+C=-17 \quad |\cdot(-2), |\cdot(-6)$

Pro $C[6;9]$ … $6^2+9^2+6A+9B+C=0 \Rightarrow 6A+9B+C=-117$

soustava rovnic

$$2A + B + C = -5$$
$$-2A - 8B - 2C = 34$$

$$-6A - 24B - 6C = 102$$
$$6A + 9B + C = -117$$

$$-15B - 5C = -15 \quad | : (-5)$$
$$3B + C = 3$$

soustava
$$\begin{cases} -7B - C = 29 \\ 3B + C = 3 \end{cases}$$

$$-4B = 32$$
$$\boxed{B = -8}$$

$$3\cdot(-8) + C = 3$$
$$\boxed{C = 27}$$

$$r^2 = m^2 + n^2 - p \text{ (str. 1)}$$

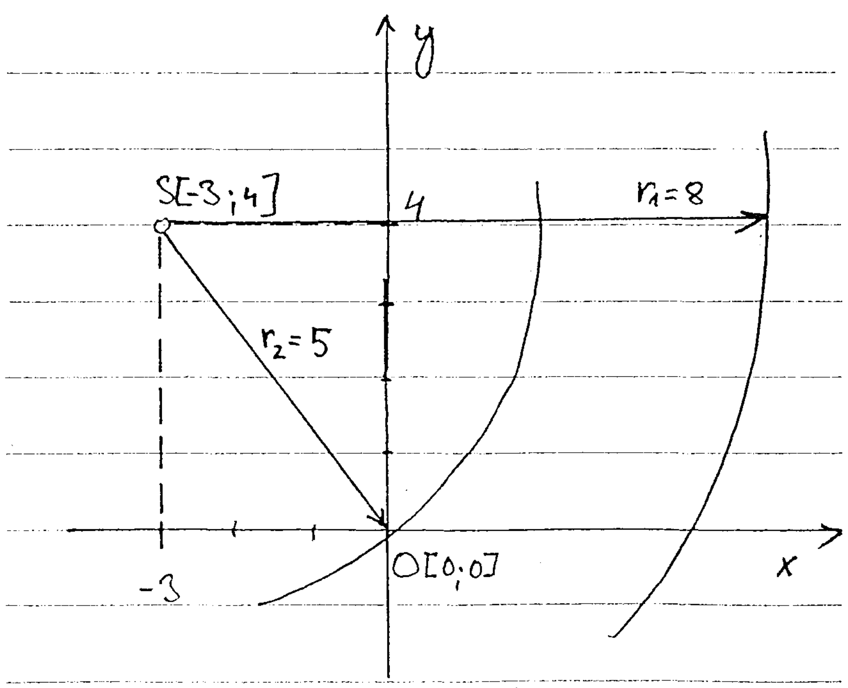
$$2A - 8 + 27 = -5$$
$$2A = -24$$
$$\boxed{A = -12}$$

$$A = -2m \qquad -12 = -2m \qquad \boxed{m = 6}$$

$$B = -2n \qquad -8 = -2n \qquad \boxed{n = 4}$$

$$r^2 = 36 + 16 - 27$$
$$\boxed{r^2 = 25}$$

$$\boxed{(x-6)^2 + (y-4)^2 = 25} \qquad S[6;4]$$



Příklad 9: Zdůvodněte, proč rovnice $x^2 + y^2 + 6x - 8y - 39 = 0$ je dána kružnice. Napište rovnici kružnice soustředné, která prochází počátkem soustavy souřadnic.

$$x^2 + 6x + y^2 - 8y = 39$$
$$x^2 + 6x + 9 + y^2 - 8y + 16 - 9 - 16 = 39$$
$$\boxed{(x+3)^2 + (y-4)^2 = 64}$$

což je rovnice kružnice se středem S[-3;4] a poloměrem $r_1 = 8$ (obr.)

Soustředná kružnice: $r_2 = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$ $\quad \boxed{(x+3)^2 + (y-4)^2 = 25}$

Příklad 10: Napište rovnici kružnice se středem S[2;3], která prochází bodem A[-1;7].

A, S dosadíme do rovnice k.

$$(x-m)^2 + (y-n)^2 = r^2$$
$$(-1-2)^2 + (7-3)^2 = r^2 \Rightarrow r^2 = 25$$

$$\boxed{(x-2)^2 + (y-3)^2 = 25}$$

Kružnice a přímka

Příklad 11: Určete vzájemnou polohu přímky p a kružnice k: je-li to sečna, určete délku příslušné tětivy.

a) $p: 2x-y-6=0$

$k: x^2+y^2-4x-5y-1=0$

$y=2x-6$

$x^2+(2x-6)^2-4x-5(2x-6)-1=0$

$x^2+4x^2-24x+36-4x-10x+30-1=0$

$5x^2-38x+65=0$

$$x_{1,2}=\frac{38\pm\sqrt{38^2-20\cdot 65}}{10}=\frac{38\pm 12}{10}$$

$\boxed{x_1=5}$ $\boxed{x_2=2{,}6}$

$y_1=2\cdot 5-6=4$, $y_2=2\cdot 2{,}6-6=-0{,}8$

$A[5;4]$ $B[2{,}6;-0{,}8]$

$B[\frac{13}{5};-\frac{4}{5}]$

$\vec{u}=B-A=\left(-\frac{12}{5};-\frac{24}{5}\right)$

$$|\vec{u}|=\sqrt{\left(\frac{12}{5}\right)^2+\left(\frac{24}{5}\right)^2}=\sqrt{\frac{144}{5}}$$

$$=\frac{12}{\sqrt5}=\frac{12\sqrt5}{5}=2{,}4\cdot\sqrt5$$

Přímka p je sečnou, $p\cap k=\{A,B\}$. Tětiva má délku $2{,}4\cdot\sqrt5$.

b) $p: x+y-8=0$

$k: x^2+y^2+18x+14y+144=0$

$y=-x+8$

$x^2+(8-x)^2+18x+14(8-x)+144=0$

$x^2+64-16x+x^2+18x+112-14x+144=0$

$2x^2-12x+320=0 \quad |:2$

$x^2-6x+160=0$ nelze odmocnit

$$x_{1,2}=\frac{6\pm\sqrt{36-640}}{2}=\frac{6\pm\sqrt{-604}}{2}$$

$p\cap k=\emptyset \Rightarrow$ Přímka p je vnější přímkou kružnice.

Poznámka: Pojem „nesečna" matematika nezavádí!

c) $p: x-2y-1=0$

$k: (x-4)^2+(y+1)^2=5$

$2y=x-1$

$y=\frac12x-\frac12$

$$(x-4)^2+\left(\frac12x\overbrace{-\frac12+1}^{\frac12}\right)^2=5$$

$x^2-8x+16+\frac14x^2+\frac12x+\frac14=5$

$\frac54x^2-\frac{15}{2}x+\frac{45}{4}=0 \quad |\cdot 4$

$5x^2-30x+45=0 \quad |:5$

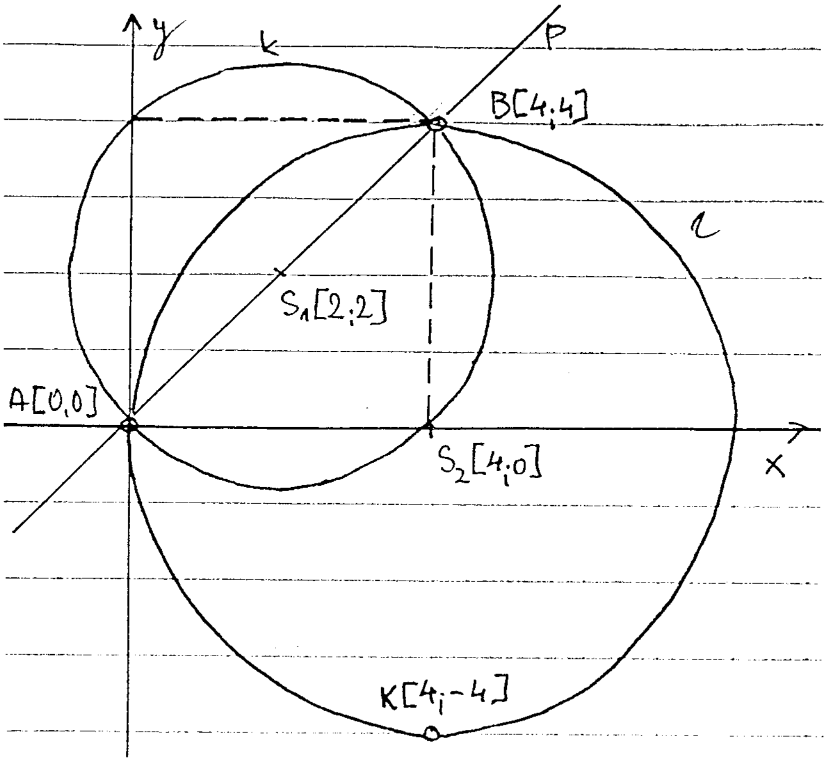
$x^2-6x+9=0$

$$x_{1,2}=\frac{6\pm\sqrt{36-36}}{2}=\frac{6\pm0}{2}=3$$

$y=\frac12\cdot3-\frac12=\frac32-\frac12=1$

$p\cap k=\{T\}$, kde $T[3;1]$

Přímka p je tečnou kružnice v bodě $T[3;1]$.



Příklad 12: Určete rovnici kružnice, která prochází bodem K[4;-4] a průsečíky kružnice $k: x^2+y^2-4x-4y=0$ s přímkou $p: y=x$.

$y=x$ dosadí do k,

$x^2+x^2-4x-4x=0$

$2x^2-8x=0 \quad |:2$

$x^2-4x=0$

$x(x-4)=0$ ⟨ $x_1=0;\ y_1=0$; $x_2=4,\ y_2=4$

A [0;0], B[4;4]

hledaná kružnice prochází body A[0;0], B[4;4] a K[4;-4]

Dále postupujeme jako v př. 8.

$$x^2+y^2+Ax+By+C=0$$

A[0;0]... $0^2+0^2+0.A+0.B+C=0$	... $C=0$		$4.(-8)-4B=-32$
B[4;4]... $4^2+4^2+4A+4B+C=0$	... $4A+4B=-32$		$-4B=0$
K[4;-4]... $4^2+(-4)^2+4A-4B+0=0$	.. $4A-4B=-32$		$B=0$
	$8A=-64$		$-2n=B$
	$A=-8$		$-2n=0$
	$-2m=A$		$\boxed{n=0}$
	$-2m=-8$		
	$\boxed{m=4}$		$C=0 \Rightarrow p=0$

$r^2=m^2+n^2-p$

$r^2=4^2+0^2-0$

$r^2=16$ $\qquad$ S[4;0]

$(x-m)^2+(y-n)^2=r^2$

$\boxed{(x-4)^2+(y-0)^2=16} \Rightarrow \boxed{(x-4)^2+y^2=16}$

Příklad 13: Vypočítejte rovnici tečny t kružnice k v bodech A, B, C. (A∈k).

a) $k: x^2+y^2=25$, A[3;4] $\Rightarrow r=5$

$[x_0, y_0]$

$$\boxed{(x_0-m)\cdot(x-m)+(y_0-n)\cdot(y-n)=r^2}$$ je rovnice tečny t kružnice $\underline{k}$ v bodě $[x_0;y_0]$.

$$(3-0)\cdot(x-0)+(4-0)\cdot(y-0)=r^2 \quad \dots \quad S[\underset{m}{0};\underset{n}{0}]$$

$$\boxed{3x+4y-25=0}$$

---

b) $k:\ x^2+y^2=13$, $B[2;y>0]$, dosaď do $\underline{k}$ za $x=2$, získáš y.

$2^2+y^2=13$

$y=9$

$y_{1,2}=\pm\sqrt{9}$ < $y_1=3$, kde je $y>0$; $y_2=-3$, nevyhovuje

$x^2+y^2=13 \dots B[2;3]$, $m=0$, $n=0$, $r^2=13$

$(x_0-m)\cdot(x-m)+(y_0-n)\cdot(y-n)=r^2$

$(2-0)\cdot(x-0)+(3-0)\cdot(y-0)=13$

$$\boxed{2x+3y-13=0}$$

---

c) $x^2+y^2-6x-10y+9=0$, $C[\underset{x_0}{-1};\underset{y_0}{2}]$

$-2m=-6$ $\quad$ $-2n=-10$

$\boxed{m=3}$ $\quad$ $\boxed{n=5}$ $\quad$ $\boxed{p=9}$

$r^2=m^2+n^2-p$

$r^2=3^2+5^2-9$

$r^2=25$

$(x_0-m)\cdot(x-m)+(y_0-n)\cdot(y-n)=r^2$

$(-1-3)\cdot(x-3)+(2-5)\cdot(y-5)=25$

$-4(x-3)-3\cdot(y-5)=25$

$-4x+12-3y+15=25$

$-4x-3y+2=0 \quad |\cdot(-1)$

$$\boxed{4x+3y-2=0}$$

<u>Příklad 14:</u> Bodem $A[\frac{4}{2};\frac{9}{2}]$ procházejí tečny t_1,t_2 ke kružnici $k:\ x^2+y^2-6x-4y+3=0$. Určete body dotyku T_1 a T_2 těchto tečen s kružnicí, a jejich rovnice a úhel tečen.

<u>Řešení:</u> Danou rovnici upravíme na středovou.

$x^2+y^2-6x-4y+3=0$ $\quad$ $r^2=m^2+n^2-p$ $\quad$ $S[3;2]$

$-2m=-6$ $\quad$ $-2n=-4$ $\quad$ $r^2=9+4-3$

$\boxed{m=3}$ $\quad$ $\boxed{n=2}$ $\quad$ $r^2=10$

$$\boxed{(x-3)^2+(y-2)^2=10}$$

Přímka, která prochází bodem $A[\underset{}{\overset{}{\frac{1}{2}}};\frac{9}{2}]$, kde $A\notin k$, se nazývá polára. Obecný tvar její rovnice je

$$(x_1-m)\cdot(x-m)+(y_1-n)\cdot(y-n)=r^2$$

$$\left(\tfrac{1}{2}-3\right)\cdot(x-3)+\left(\tfrac{9}{2}-2\right)\cdot(y-2)=10$$
$$-\tfrac{5}{2}(x-3)+\tfrac{5}{2}(y-2)=10$$
$$-\tfrac{5}{2}x+\tfrac{15}{2}+\tfrac{5}{2}y-5=10 \quad |\cdot 2$$
$$-5x+15+5y-10=20$$
$$-5x+5y-15=0 \quad |:(-5)$$
$$x-y+3=0$$
$$\boxed{y=x+3}$$

Body dotyku na přímce (poláře) $y=x+3$ s kružnicí získáme tak, že $y=x+3$ dosadíme do $(x-3)^2+(y-2)^2=10$

$$(x-3)^2+(x+3-2)^2=10$$
$$x^2-6x+9+(x+1)^2=10$$
$$x^2-6x+9+x^2+2x+1=10$$
$$2x^2-4x=0 \quad |:2$$
$$x^2-2x=0$$
$$x(x-2)=0$$
$x_1=0,\ y_1=0+3=3$

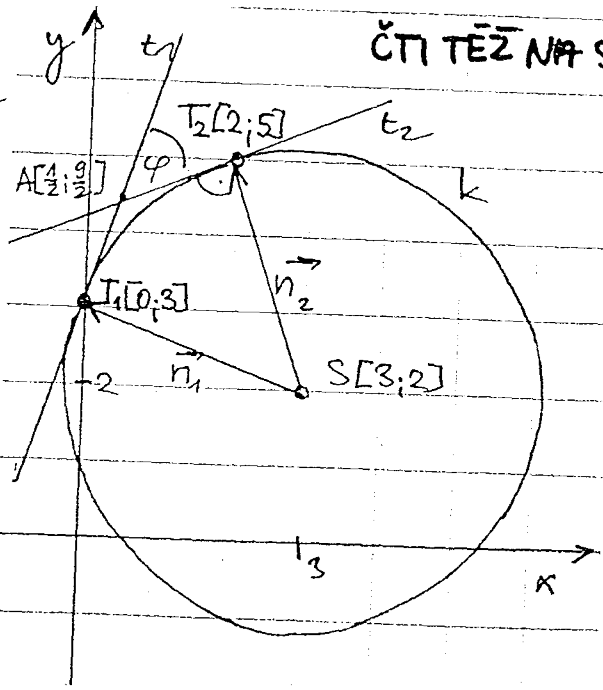
$x_2=2,\ y_2=2+3=5$

$$\boxed{T_1[0;3],\ T_2=[2;5]}$$
$x_0\ y_0 \qquad x_0\ y_0$

Tečna t_1 v bodě $T_1[0;3]$:
$$(x_0-m)\cdot(x-m)+(y_0-n)\cdot(y-n)=r^2$$
$$(0-3)\cdot(x-3)+(3-2)\cdot(y-2)=10$$
$$-3(x-3)+y-2=10$$
$$-3x+9+y-2=10$$
$$-3x+y-3=0 \quad |\cdot(-1)$$
$$\boxed{t_1:\ 3x-y+3=0}$$

Tečna t_2 v bodě $T_2[2;5]$
$$(x_0-m)\cdot(x-m)+(y_0-n)\cdot(y-n)=r^2$$
$$(2-3)\cdot(x-3)+(5-2)\cdot(y-2)=10$$
$$-1\cdot(x-3)+3(y-2)=10$$
$$-x+3+3y-6=10$$
$$-x+3y-13=0 \quad |\cdot(-1)$$
$$\boxed{t_2:\ x-3y+13=0}$$

ČTI TĚŽ NA STR. 14



Úhel tečen:
$$\vec{n_1}=T_1-S=(-3,1),\ \vec{n_2}=T_2-S=(-1,3)$$

$$\cos\varphi=\frac{|n_1\cdot n_2|}{|n_1|\cdot|n_2|}=\frac{|(-3;1)\cdot(-1;3)|}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{10}}=\frac{|6|}{10}=\frac{3}{5}\Rightarrow \boxed{\varphi=53^\circ 8'}$$

$\vec{n_1},\vec{n_2}$ lze určit přímo z rovnic

Příklad 15: a) Rozhodněte, zda rovnice $x^2+y^2-4x-6y-12=0$ je rovnicí kružnice.

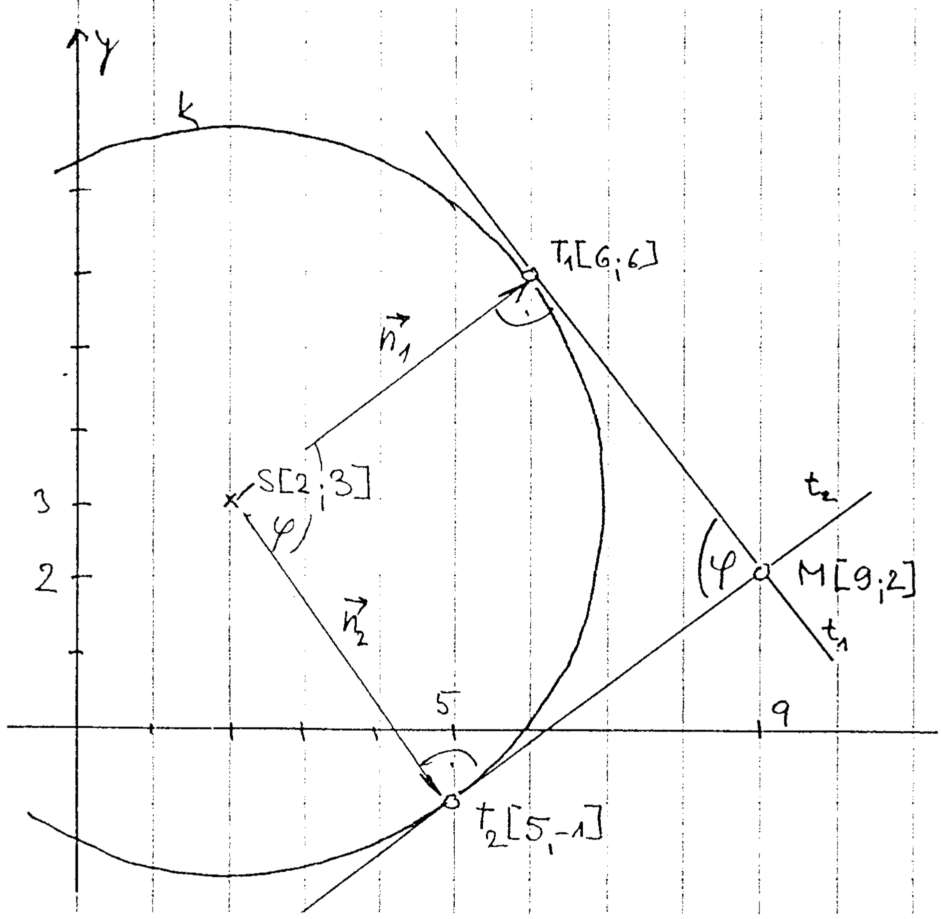
b) V kladném případě určete rovnice tečen kružnice z bodu $M[9;2]$.

c) Vypočítejte velikost úhlu, který tyto tečny svírají.

Řešení:

$$\left.\begin{aligned} &x^2-4x+y^2-6y=12\\ &\underline{x^2-4x+4}+\underline{y^2-6y+9}-4-9=12\\ &(x-2)^2+(y-3)^2=25 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

Daná rovnice je rovnicí kružnice se středem $S[2;3]$ a $r=5$.



Poznámka

$[x_0,y_0]$ jsou souřadnice bodu, který leží na kružnici;

$[x_1,y_1]$ jsou souřadnice bodu, který leží vně kružnice.

Někdy se pojem poláry vůbec nezavádí.

ČTI TÉŽ NA STR. 14

Polára: $(x_1-m)\cdot(x-m)+(y_1-n)\cdot(y-n)=r^2$

$M[9;2]$, x_1, y_1

$$(9-2)\cdot(x-2)+(2-3)\cdot(y-3)=25$$

$$7(x-2)-1\cdot(y-3)=25$$

$$7x-14-y+3=25$$

$$\boxed{7x-y-36=0}$$

$\Rightarrow y=7x-36$ dosadíme do rovnice kružnice.

$x^2+y^2-4x-6y-12=0$

$x^2+(7x-36)^2-4x-6(7x-36)-12=0$

$x^2+49x^2-504x+1296-4x-42x+216-12=0$

$50x^2-550x+1500=0 \quad |:50$

$x^2-11x+30=0$

$x_0 \ y_0$

$x_{1,2}=\frac{11\pm 1}{2}= \begin{cases} x_1=6, & y_1=7\cdot 6-36=6 \\ x_2=5, & y_2=35-36=-1 \end{cases}$ $\quad T_1[6;6] \quad T_2[5;-1]$

$x_0 \ y_0$

$t: (x_0-m)\cdot(x-m)+(y_0-n)\cdot(y-n)=r^2$

$t_1: (6-2)\cdot(x-2)+(6-3)(y-3)=25$

$4(x-2)+3(y-3)=25$

$4x-8+3y-9=25$

$\boxed{t_1: 4x+3y-42=0}$

$t_2: (5-2)\cdot(x-2)+(-1-3)(y-3)=25$

$3(x-2)-4(y-3)=25$

$3x-6-4y+12-25=0$

$\boxed{t_2: 3x-4y-19=0}$

$\vec{n_1}=T_1-S=(4;3)$ $\quad \vec{n_2}=T_2-S=(3;-4)$

$\cos\varphi=\frac{|\vec{n_1}\cdot n_2|}{|n_1|\cdot|n_2|}=\frac{|(4;3)\cdot(3;-4)|}{\sqrt{16+9}\cdot\sqrt{9+16}}=\frac{|12-12|}{\sqrt{625}}=\frac{0}{25}=0 \Rightarrow \boxed{\varphi=90°}$

<u>Příklad 16:</u> Je dána kružnice $k: (x-3)^2+(y+12)^2=100$. Určete rovnice tečen, které procházejí bodem a) $E[9;-4]$, $F[5;2]$.

a) Nejdříve zjistíme, zda $E\in k$.

$L=(9-3)^2+(-4+12)^2=6^2+8^2=100$, $P=100 \Rightarrow L=P \Rightarrow E\in k$. Existuje jediná tečna; $S[3;-12]$, $r^2=100$, $E[9;-4]$ $[x_0;y_0]$

$(x_0-m)\cdot(x-m)+(y_0-n)\cdot(y-n)=r^2$

$(9-3)\cdot(x-3)+(-4+12)\cdot(y+12)=100$

$6(x-3)+8(y+12)=100$

$6x-18+8y+96-100=0$

$6x+8y-22=0 \quad |:2$

$\boxed{t: 3x+4y-11=0}$ je rovnice tečny v bodě E.

---

b) F: $L=(5-3)^2+(2+12)^2=2^2+14^2=200$, $P=100$, $L\neq P \Rightarrow F\notin k$. Existují 2 tečny (Bylo by třeba ještě uvažovat o oblasti.)

$(x_1-m)\cdot(x-m)+(y_1-n)\cdot(y-n)=r^2$ ... F[5;2] S[3;-12]

[x_1; y_1] [m;n]

$(5-3)\cdot(x-3)+(2+12)\cdot(y+12)=100$

$2(x-3)+14(y+12)=100$

$2x-6+14y+168=100$

$2x+14y+62=0 \quad |:2$

$x+7y+31=0$

$\boxed{y=-\frac{1}{7}x-\frac{31}{7}}$

Dosadíme do rovnice kružnice.

$(x-3)^2+(y+12)^2=100$

$(x-3)^2+\left(-\frac{1}{7}x-\frac{31}{7}+12\right)^2=100$

$(x-3)^2+\left(-\frac{1}{7}x+\frac{53}{7}\right)^2=100$

$x^2-6x+9+\frac{1}{49}x^2-\frac{106}{49}x+\frac{2809}{49}=100$

$\frac{50}{49}x^2-\frac{400}{49}x-\frac{1650}{49}=0 \quad |\cdot 49$

$50x^2-400x-1650=0 \quad |:50$

$x^2-8x-33=0$

$x_{1,2}=\frac{8\pm 14}{2}= \begin{cases} x_1=11 \\ x_2=-3 \end{cases}$

$y_1=-\frac{1}{7}\cdot 11-\frac{31}{7}=-6$, $y_2=-\frac{1}{7}\cdot(-3)-\frac{31}{7}=-4$

$T_1[11;-6]$ $T_2[-3;-4]$

t_1 v bodě T_1:

$(11-3)\cdot(x-3)+(-6+12)\cdot(y+12)=100$

$8(x-3)+6(y+12)-100=0$

$8x-24+6y+72-100=0$

$8x+6y-52=0 \quad |:2$

$\boxed{t_1:\ 4x+3y-26=0}$ ... $T_1[11;-6]$

t_2 v bodě T_2:

$(-3-3)\cdot(x-3)+(-4+12)(y+12)=100$

$-6(x-3)+8(y+12)-100=0$

$-6x+18+8y+96-100=0$

$-6x+8y+14=0 \quad |:(-2)$

$\boxed{t_2:\ 3x-4y-7=0}$ ... $T_2[-3;-4]$

Příklad 17: Určete rovnice sečen kružnice $k: (x-2)^2+(y+6)^2=13$, které jsou rovnoběžné s přímkou $p: 2x-3y+5=0$.

Řešení: (viz obr. na str. 13).

Z rovnice přímky p určíme směrnici kolmice s, která prochází středem S a je kolmá k přímce p.

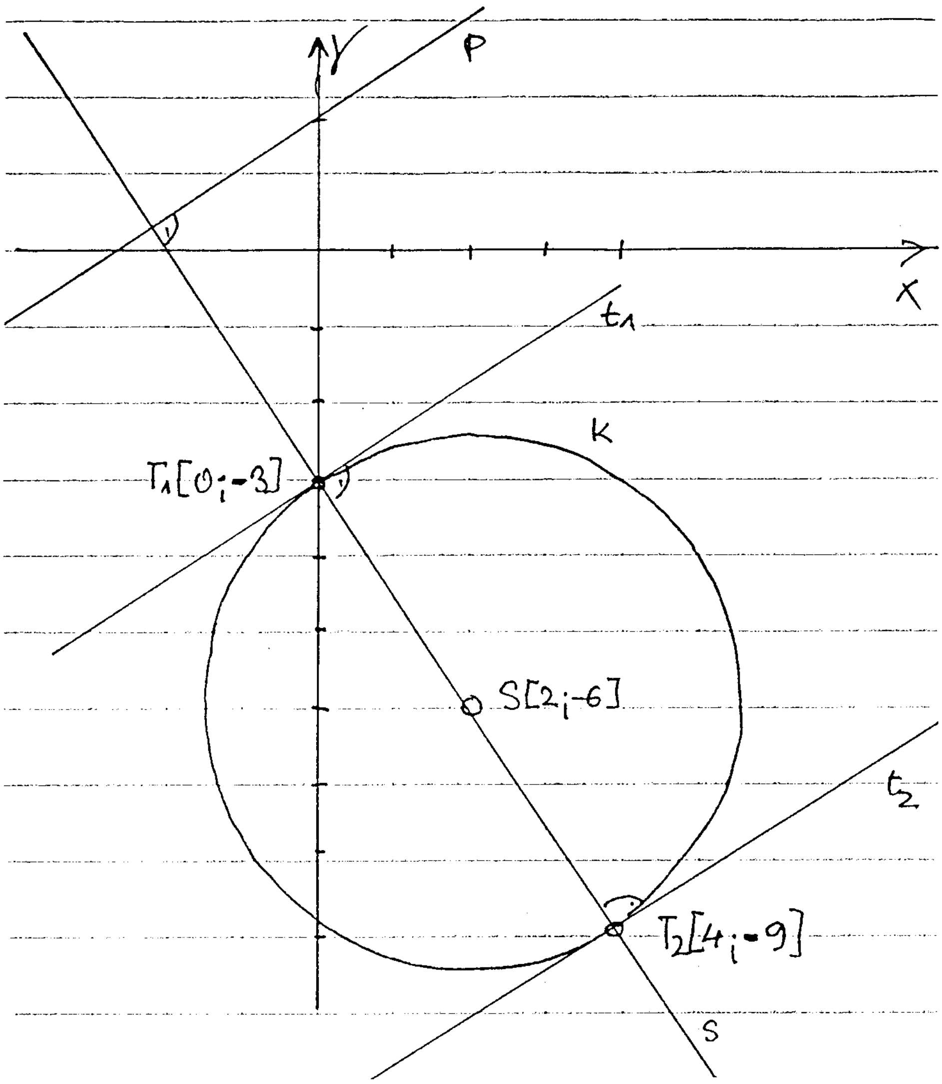
$2x-3y+5=0$

$3y=2x+5 \quad |:3$

$y=\frac{2}{3}x+\frac{5}{3}$

$k=\frac{2}{3}$ ... $-\frac{1}{k}=-\frac{3}{2}$ ... kolmice s má směrnici $-\frac{3}{2}$ a její rovnice je

$s: y=-\frac{3}{2}x+q$; dosaď S[2;-6]



$-6 = -\frac{3}{2}\cdot 2 + q$

$q = -3$

$\boxed{s: y = -\frac{3}{2}x - 3}$

nyní určíme

$s \cap k = \{T_1; T_2\}$

$y = -\frac{3}{2}x - 3$ dosadíme do $\underline{k}$: (x)

(x) $(x-2)^2 + (-\frac{3}{2}x - 3 + 6)^2 = 13$

$(x-2)^2 + (-\frac{3}{2}x + 3)^2 - 13 = 0$

$x^2 - 4x + 4 + \frac{9}{4}x^2 - 9x + 9 - 13 = 0$

$\frac{13}{4}x^2 - 13x = 0 \quad | \cdot 4$

$13x^2 - 52x = 0$

$13x(x-4) = 0$

$13x = 0 \qquad x - 4 = 0$

$\boxed{x_1 = 0} \qquad \boxed{x_2 = 4}$

$y_1 = -\frac{3}{2}\cdot 0 - 3 = -3 \qquad T_1[0;-3]$

$y_2 = -\frac{3}{2}\cdot 4 - 3 = -9 \qquad T_2[4;-9]$

$S[2;-6]$

$t_1: (0-2)\cdot(x-2) + (-3+6)\cdot(y+6) = 13$

$-2(x-2) + 3(y+6) - 13 = 0$, po úpravě

$\boxed{t_1: 2x - 3y - 9 = 0}$

$t_2: (4-2)\cdot(x-2) + (-9+6)\cdot(y+6) = 13$,

po úpravě

$\boxed{t_2: 2x - 3y - 35 = 0}$

Příklad 18: Určete rovnice tečen kružnice k v jejím bodě T.

a) $k: x^2+y^2=25$, $T[3;y_0]$ b) $k: (x-3)^2+(y+5)^2=20$, $T[x_0;-3]$

Řešení: a) Pro $x_0=3$ je $3^2+y^2=25$

$y^2=16$ $\Rightarrow$ $y_{1,2}=\pm\sqrt{16}$ $\begin{cases}+4\\-4\end{cases}$ | $S[0;0]$, $r^2=25$

$T_1[3;4]$, $T_2[3;-4]$ $\Rightarrow$ úloha má 2 řešení.

$t_1: (3-0)\cdot(x-0)+(4-0)\cdot(y-0)=25$ $t_2: (3-0)\cdot(x-0)+(-4+0)\cdot(y-0)=25$

$\boxed{3x+4y-25=0}$ $\boxed{3x-4y-25=0}$

---

b) $k: (x-3)^2+(y+5)^2=20$, $T[x_0;-3]$, $S[3;-5]$, $r^2=20$

Pro $y_0=-3$ je $(x-3)^2+(-3+5)^2=20$

$x^2-6x+9+4-20=0$

$x^2-6x-7=0$ $\Rightarrow$ $x_{1,2}=\dfrac{6\pm\sqrt{64}}{2}$

$x_{1,2}=\dfrac{6\pm8}{2}$ $\begin{cases}7\\-1\end{cases}$

$t_1: (7-3)\cdot(x-3)+(-3+5)\cdot(y+5)=20$ ... $T_1[7;-3]$

$4(x-3)+2(y+5)-20=0$, upravené $\boxed{2x+y-11=0}$

$t_2: (-1-3)\cdot(x-3)+(-3+5)\cdot(y+5)=20$ ... $T_2[-1;-3]$, upravené

$\boxed{2x-y-1=0}$

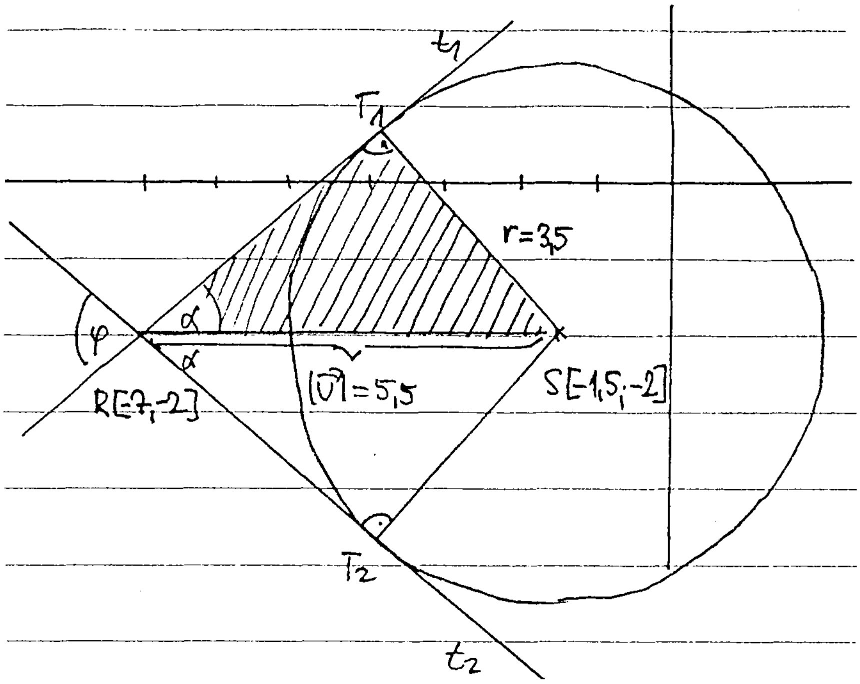
Příklad 19: Vypočítejte délku tečen z bodu $R[-7;-2]$ ke kružnici $k: x^2+y^2+3x+4y-6=0$

Řešení: Pokud jde jen o výpočet délky tečen, tak nemusíme vůbec rovnice tečen určovat.

$-2m=3$ $-2n=4$ $r^2=m^2+n^2-p$ $\vec{v}=S-R=(5{,}5;0)$

$\underbrace{m=-1{,}5 \quad n=-2}_{S[-1{,}5;-2]}$ $r^2=1{,}5^2+(-2)^2-(-6)$ $|\vec{v}|=\sqrt{5{,}5^2+0^2}=5{,}5$

$r^2=12{,}25$ $\Rightarrow$ $\boxed{r=3{,}5}$



$$\sin\alpha = \frac{|ST_1|}{|RS|}$$

$$\sin\alpha = \frac{r}{|\vec{v}|} = \frac{3{,}5}{5{,}5}$$

$$\Rightarrow \alpha = 39°31'16{,}2''$$

$$\varphi = 2\alpha = 79°3'$$

$\boxed{\text{Tečny svírají úhel s velikostí } 79°3'.}$