4.6 Kružnice

① Napište rovnici kružnice v osovém tvaru o poloměru $r = 3$.

$x^2+y^2=r^2$ ... $\boxed{x^2+y^2=9}$

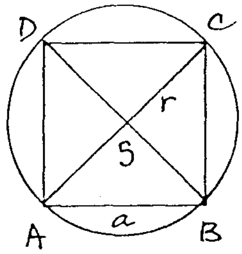
② Který z bodů $A[0;10]$, $B[8;-6]$, $C[7;5]$ leží na kružnici k: $x^2+y^2=100$

A... $L = 0^2+10^2 = 100$, $P=100$, $L=P \Rightarrow \boxed{A \in k}$

B... $L = 8^2+(-6)^2 = 64+36=100$, $P=100$, $L=P \Rightarrow \boxed{B \in k}$

C... $L = 7^2+5^2 = 49+25=74$, $P=100$, $L \neq P \Rightarrow C \notin k$

③ Určete rovnici kružnice v osovém tvaru, která je opsána čtverci o obvodu 16 cm.



$a=(16:4)\,cm = 4\,cm$

$r = \frac{|AC|}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{4.\sqrt{2}}{2} = 2.\sqrt{2}$

$x^2+y^2=(2.\sqrt{2})^2$

$\boxed{x^2+y^2=8}$

④ Určete vzájemnou polohu přímky a kružnice:

a) $x^2+y^2=9$ $\quad 2x-3y+7=0$ (nevhodné zadání)

Musíme početně rozhodnout, kolik průsečíků má přímka s kružnicí:

a) Budou-li 2 průsečíky $\Rightarrow$ přímka je sečna.

b) Bude-li 1 průsečík $\Rightarrow$ " " tečna

c) Nebude-li žádný průsečík $\Rightarrow$ je to vnější přímka kružnice.

Řešení a)

$2x-3y+7=0$

$3y=2x+7$

$y=\frac{2}{3}x+\frac{7}{3}$

dosadit do rovnice kružnice

$x^2+y^2=9$

$x^2+\left(\frac{2}{3}x+\frac{7}{3}\right)^2=9$

$x^2+\frac{4}{9}x^2+\frac{28}{9}x+\frac{49}{9}=9 \quad | \cdot 9$

$9x^2+4x^2+28x+49=81$

$13x^2+28x-32=0$

$x_{1,2}=\frac{-28\pm\sqrt{2448}}{26}$

$x_{1,2} \doteq \frac{-28\pm 49,5}{26}$ = $x_1 \doteq 0,8...$, $x_2 \doteq -298$

Dál není třeba počítat, protože nejsou požadovány souřadnice průsečíků, ty jsou dva $\Rightarrow$

$\boxed{\text{Přímka je sečnou kružnice ....}}$ k domu

Stačí, že $D>0$

b) $x^2+y^2=16 \quad \dots \quad x+2y+13=0$

$x=-2y-13$

$(-2y-13)^2+y^2=16$

$4y^2+52y+169+y^2-16=0$

$5y^2+52y+153=0$

$y_{1,2}=\frac{-52\pm\sqrt{-356}}{10}$ Protože diskriminant je záporný, tak kvadr. rovnice nemá řešení. Neexistuje proto průsečík přímky a kružnice $\Rightarrow$ Přímka $x+2y+13$ je vnější přímkou kružnice $x^2+y^2=16$.

---

c) $x^2+y^2=65 \qquad 2x+3y+13\sqrt{5}=0$

$2x=-3y-13\sqrt{5}$

$x=-\frac{3}{2}y-\frac{13}{2}\sqrt{5}$

$\left(-\frac{3}{2}y-\frac{13}{2}\sqrt{5}\right)^2+y^2=65$

$\frac{9}{4}y^2+\frac{39}{2}y+\frac{169}{4}\cdot 5+y^2-65=0 \quad |\cdot 4$

$9y^2+78y+845+4y^2-260=0$

$13y^2+78y+585=0$

$y_{1,2}=\frac{-78\pm\sqrt{-24336}}{20} \quad | D<0 \Rightarrow$

neexistuje průsečík ... jde o vnější přímku kružnice.

Výsledek jsem si ověřil konstrukcí grafu. Výsledek ve sbírce, že jde o tečnu je špatný. Ostatně celý příklad je číselně naprosto nevyhovující.

---

d) $x^2+y^2=25 \qquad x+y+53=0$

$y=-x-53$

$x^2+(-x-53)^2=25$

$x^2+x^2-106x+2809-25=0$

$2x^2-106x+2784=0$

$x^2-53x+1392=0$

$x_{1,2}=\frac{53\pm\sqrt{-2759}}{2} \qquad D<0 \Rightarrow$

Rovnice nemá řešení ... opět jde o vnější přímku kružnice.

---

(5) Určete délku tětivy, kterou vytíná daná kružnice na dané přímce:

a) $x^2+y^2=16 \qquad x-y+4=0$

$y=x+4$

$x^2+(x+4)^2=16$

$x^2+x^2+8x+16=16$

$2x^2+8x=0 \quad |:2$

$x^2+4x=0$

$x(x+4)=0 \quad \begin{cases} x_1=0 \\ x_2=-4 \end{cases}$

$y_1=0+4 \qquad y_2=-4+4$

$y_1=4 \qquad y_2=0$

$A[0;4]$ ($a_1\ a_2$) $\qquad B[-4;0]$ ($b_1\ b_2$)

$|AB|=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2}$

$$|AB| = \sqrt{(-4-0)^2+(0-4)^2} = \sqrt{16+16} = \sqrt{32} = \sqrt{16 \cdot 2} = \boxed{4 \cdot \sqrt{2}}$$

b) $x^2+y^2=85$ $\quad 2x-y-5=0$

$y = 2x-5$

$x^2+(2x-5)^2=85$

$x^2+4x^2-20x+25-85=0$

$5x^2-20x-60=0 \quad | :5$

$x^2-4x-12=0$

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{4 \pm 8}{2} \quad x_1 = 6, \quad x_2 = -2$$

$y_1 = 2 \cdot 6 - 5$ $\quad y_2 = 2 \cdot (-2) - 5$

$y_1 = 7$ $\quad y_2 = -9$

$A[6;7]$ $\quad B[-2;-9]$

$$|AB| = \sqrt{(-2-6)^2+(-9-7)^2} = \sqrt{(-8)^2+(-16)^2} = \sqrt{320} = \sqrt{64 \cdot 5} = \boxed{8 \cdot \sqrt{5}}$$

⑥ Určete číslo c tak, aby přímka $2x-5y+c=0$ byla tečnou kružnice $x^2+y^2=64$. (Volba $\underline{c}$ není vhodná, položíme $\leftarrow c=z$

$5y = 2x+c$

$5y = 2x+z$

$y = \frac{2}{5}x + \frac{z}{5}$

Dosadíme do rovnice kružnice: $x^2+y^2=64$

$x^2+\left(\frac{2}{5}x+\frac{z}{5}\right)^2=64$

$\underbrace{x^2+\frac{4}{25}x^2}+\left(\frac{4}{25}z\right)x+\frac{z^2}{25}=64 \quad | \cdot 25$

$\frac{29}{25}x^2+\left(\frac{4}{25}z\right)x+\frac{z^2}{25}-64=0 \quad | \cdot 25$

$29x^2 \; 4z \cdot x + (z^2-1600)=0$

$a \quad b \quad c$ (proto volba $\underline{z}$)

Jde o kvadratickou rovnici.

Určíme D. Bude-li $D=0$, pak bude mít kvadr. rovnice jedno řešení - získáme $\underline{x}$ a s jeho pomocí y. Bod dotyku: $T[x;y]$ - není třeba ho specifikovat.

$D = b^2-4ac$

$D = (4z)^2-4 \cdot 29 \cdot (z^2-1600) =$

$= 16z^2-116z^2+185\,600 = -100z^2+$

$+185\,600$

$D=0 \; \dots \; -100z^2+185600=0$

$100z^2 = 185600 \quad | :100$

$z_{1,2} = \pm\sqrt{1856}$

$$\boxed{c_{1,2} = \pm\sqrt{1856}}$$

(7) Určete číslo b tak, aby přímka $2x + by + 5 = 0$ byla sečnou kružnice $x^2 + y^2 = 100$.

$$by = -2x - 5$$

$$y = -\frac{2}{b}x - \frac{5}{b}$$

$$x^2 + \left(-\frac{2}{b}x - \frac{5}{b}\right)^2 = 100$$

$$x^2 + \frac{4}{b^2}x^2 + \frac{20}{b^2}x + \frac{25}{b^2} - 100 = 0 \quad | \cdot b^2$$

$$b^2x^2 + 4x^2 + 20x - 25 - 100b^2 = 0$$

$$\underbrace{(b^2+4)}_{a} \cdot x^2 + \underbrace{20}_{b}x - \underbrace{(25 + 100b^2)}_{c} = 0$$

$$D = b^2 - 4ac$$

$$D = 400 + 4(b^2+4) \cdot (25 + 100b^2)$$

$$D = 400 + (4b^2 + 16) \cdot (25 + 100b^2)$$

$$D = 400 + 100b^2 + 400 + 400b^4 + 1600b^2$$

$$400b^4 + 1700b^2 + 800 = 0 \quad | : 100$$

$4b^4 + 17b^2 + 8 = 0$, substituce: $b^2 = m$

$$4m^2 + 17m + 8 = 0$$

$$m_{1,2} = \frac{-17 \pm \sqrt{144}}{2} = \frac{-17 \pm 12}{8} = \begin{cases} m_1 = -\frac{5}{8} \\ m_2 = -\frac{29}{8} \end{cases}$$

$b_1^2 = -\frac{5}{8}$

$b_1 = \pm\sqrt{-\frac{5}{8}}$ nemá řešení

$b_2^2 = -\frac{29}{8}$ ... $(b_2) = \pm\sqrt{-\frac{29}{8}}$ ... nemá řešení

Daná úloha <u>nemá řešení</u>.

---

(8) Určete číslo a tak, aby přímka $ax + 2y - 10 = 0$ byla sečnou kružnice $x^2 + y^2 = 20$.

$$2y = -ax + 10$$
$$y = -\frac{a}{2}x + 5$$

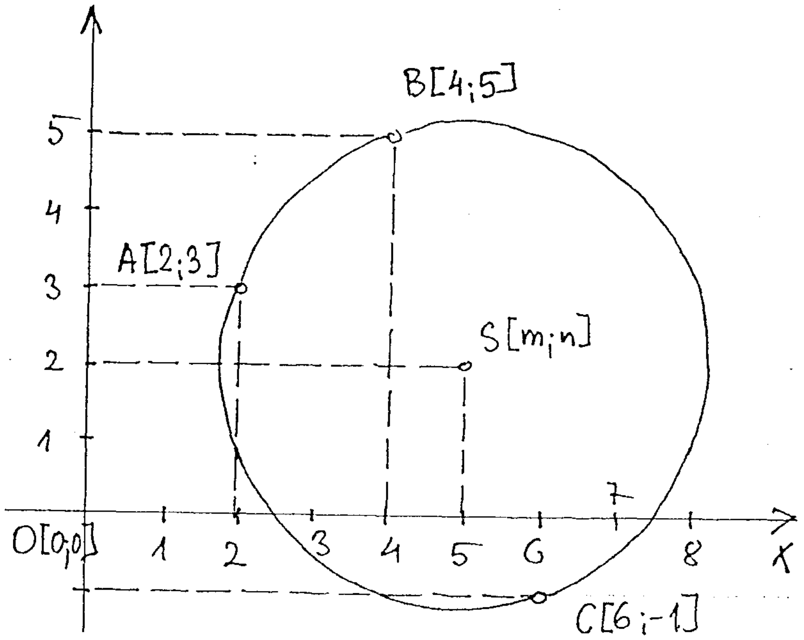
$$x^2 + \left(-\frac{a}{2}x + 5\right)^2 = 20$$
$$x^2 + \frac{a^2}{4}x - 5ax + 25 - 20 = 0$$
$$\underbrace{\left(1 + \frac{a^2}{4}\right)x}_{a} \underbrace{- 5ax}_{b} \underbrace{+ 5}_{c} = 0$$

$$D = b^2 - 4ac$$
$$D = (-5a)^2 - 20\left(1 + \frac{a^2}{4}\right) = 25a^2 - 20 - 5a^2 = 20a^2 - 20$$
$$20a^2 - 20 = 0$$
$$20a^2 = 20$$
$$a^2 = 1$$
$$a_{1,2} = \pm\sqrt{1} \quad .. \quad \boxed{a_{1,2} = \pm 1}$$

---

*(9) Napište rovnice kružnice, která prochází body:

a) A[2;3], B[4;5], C[6;-1]



Jde o určení středové rovnice kružnice $(x-m)^2 + (y-n)^2 = r^2$ se středem S[m;n], poloměrem r a bodem X[x;y] ležícím na kružnici. V našem případě X = A, B, C

Úlohu budeme řešit pomocí obecné rovnice kružnice

$$x^2 + y^2 \boxed{-2m}\,x \boxed{-2n}\,y + \boxed{p} = 0$$, kde $p = m^2 + n^2 - r^2$ $(r^2 = m^2 + n^2 - p)$

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

Provedeme substituci naznačenou šipkami

Dosadíme A[2;3]
x y

$$2^2 + 3^2 + 2A + 3B + C = 0$$

$$\boxed{13 + 2A + 3B + C = 0}$$ 1. rovnice následné soustavy rovnic

Dosadíme B[4;5]

$16 + 25 + 4A + 5B + C = 0$

$\boxed{41 + 4A + 5B + C = 0}$ 2. rovnice....

Dosadíme C[6;−1]

$36 + 1 + 6A - B + C = 0$

$\boxed{37 + 6A - B + C = 0}$ 3. rovnice

Dostáváme soustavu tří rovnic se třemi neznámými, kterou vyřešíme:

$13 + 2A + 3B + C = 0$

$41 + 4A + 5B + C = 0$

$37 + 6A - B + C = 0 \quad |\cdot 3 \quad |\cdot 5$

① a ③ po úpravě

$13 + 2A + 3B + C = 0$

$111 + 18A - 3B + 3C = 0$

$124 + 20A + 4C = 0 \quad |:4$

$\boxed{31 + 5A + C = 0}$

② a ③ po úpravě

$41 + 4A + 5B + C = 0$

$185 + 30A - 5B + 5C = 0$

$\boxed{113 + 17A + 3C = 0}$

$31 + 5A + C = 0 \quad |\cdot(-3)$

$113 + 17A + 3C = 0$

$-93 - 15A - 3C = 0$

$20 + 2A = 0$

$2A = -20$

$\boxed{A = -10}$

$31 + 5\cdot(-10) + C = 0$

$\boxed{C = 19}$

$41 + 4\cdot(-10) + 5B + 19 = 0$

$5B = -20$

$\boxed{B = -4}$

$-2m = A \qquad -2n = B$

$-2m = -10 \qquad -2n = -4$

$\boxed{m = 5} \qquad \boxed{n = 2}$

$p = C$ (viz substituce)

$p = 19$

$r^2 = m^2 + n^2 - p$

$r^2 = 5^2 + 4^2 - 19$

$r^2 = 10 \quad \ldots \quad r = \sqrt{10}$

$(x-m)^2 + (y-n)^2 = r^2$

$\boxed{(x-5)^2 + (y-2)^2 = 10}$ je to středová rovnice kruž.

---

b) A[2;−2], B[5;−1], C[3;5]

$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$

Bod A: $4 + 4 + 2A - 2B + C = 0$

$\boxed{8 + 2A - 2B + C = 0}$

Bod B: $25 + 1 + 5A - B + C = 0$

$\boxed{26 + 5A - B + C = 0}$

Bod C: $9+25+3A+5B+C=0$

$$\boxed{34+3A+5B+C=0}$$

$8+2A-2B+C=0$ (1)

$26+5A-B+C=0$ (2) $|\cdot(-1)$

$34+3A+5B+C=0$ (3)

(1) a (2) po úpravě

$8+2A-2B+C=0$

$-26-5A+B-C=0$

$$\boxed{-18-3A-B=0}$$

(2) a (3) po úpravě

$-26-5A+B-C=0$

$34+3A+5B+C=0$

$$\boxed{8-2A+6B=0}$$

$-18-3A-B=0$ $|\cdot 6$

$8-2A+6B=0$

$-108-18A-6B=0$

$8-2A+6B=0$

$-100-20A=0$

$$\boxed{A=-5}$$

$8-2\cdot(-5)+6B=0$

$6B=-18$

$$\boxed{B=-3}$$

$8+2\cdot(-5)-2\cdot(-3)+C=0$

$\boxed{C=-4} \to p=-4$

$-2m=A \qquad -2n=B$

$-2m=-5 \qquad -2n=-3$

$m=\frac{5}{2} \qquad n=\frac{3}{2}$

$r^2=m^2+n^2-p$

$r^2=\frac{25}{4}+\frac{9}{4}+4$

$r^2=\frac{25}{2}$

$(x-m)^2+(y-n)^2=r^2$

$(x-\frac{5}{2})^2+(y-\frac{3}{2})^2=\frac{25}{2}$ $\cancel{|\cdot 2}$

$x^2-5x+\frac{25}{4}+y^2-3y+\frac{9}{4}=\frac{25}{2}$

$$\boxed{x^2+y^2-5x-3y-4=0}$$ je to obecný tvar rovnice

c) $A[3;7]$, $B[-1;5]$, $C[-5;3]$

$x^2+y^2+Ax+By+C=0$

A: $58+3A+7B+C=0$

B: $26-A+5B+C=0$

C: $34-5A+3B+C=0$

(1) a (2) po úpravě

$58+3A+7B+C=0$

$78-3A+15B+3C=0$

$$\boxed{136+22B+4C=0}$$

(2) a (3) po úpravě

$-130+5A-25B-5C=0$

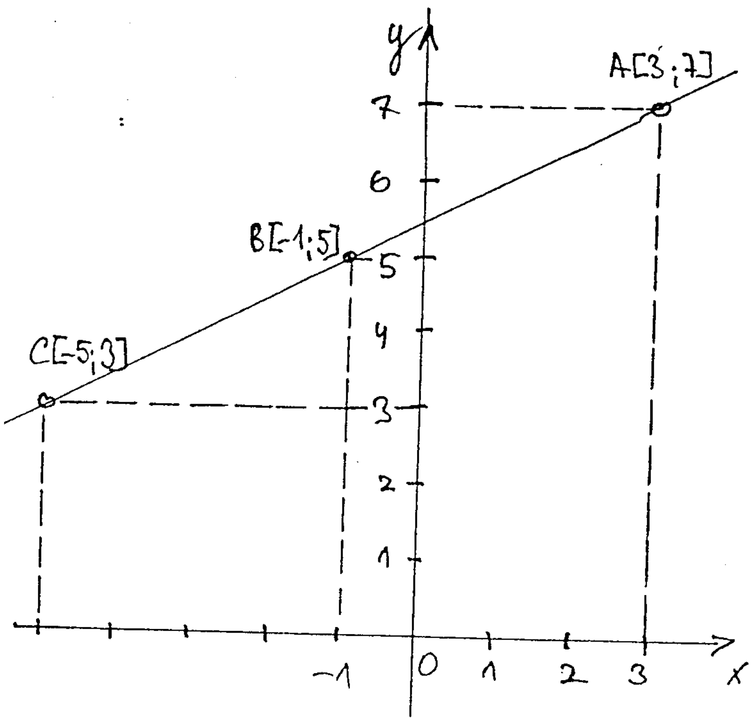
$34-5A+3B+C=0$

$$\boxed{-96-22B-4C=0}$$

$136+22B+4C=0$

$-96-22B-4C=0$

$40=0 \Rightarrow$ úloha nemá řešení – body A, B, C leží v téže přímce a kružnice jimi nemůže procházet (viz obr. na str. 8).



* (10) Napište rovnici kružnice, která prochází body A[5;3], B[6;2] a má střed na přímce $3x-4y-3=0$.

Označme:

$p: 3x-4y-3=0$

$p: y=\frac{3}{4}x-\frac{3}{4}$

o: osa úsečky AB,

$k=\frac{b_2-a_2}{b_1-a_1}$ je směrnice úsečky (resp. přímky) AB.

$k=\frac{2-3}{6-5}=\frac{-1}{1}=-1$

$o \perp AB$

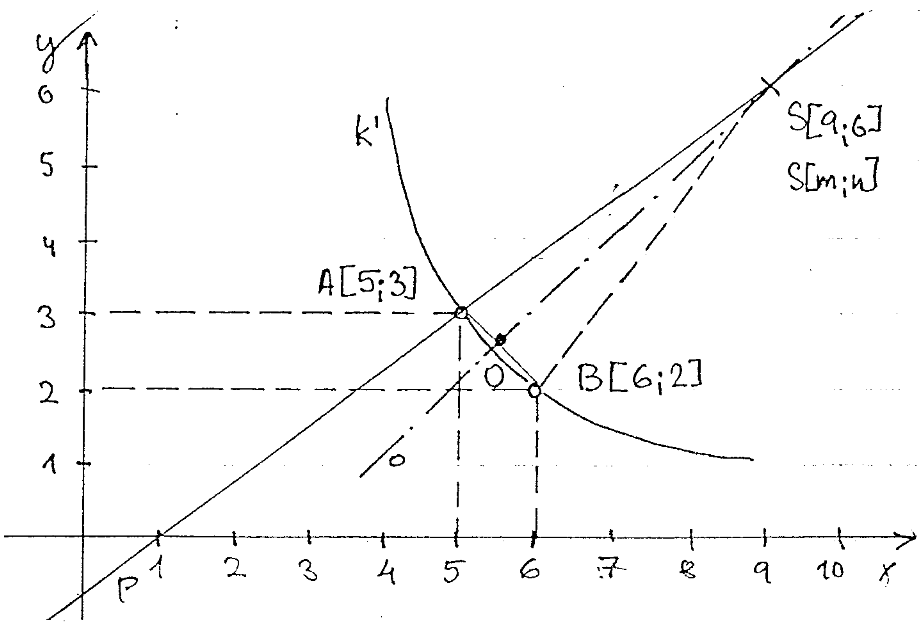
Směrnice osy: $-\frac{1}{k}=1$

O je střed úsečky AB ... $O[s_1, s_2]$

$s_1=\frac{6+5}{2}=\frac{11}{2}$

$s_2=\frac{2+3}{2}=\frac{5}{2}$

$O\left[\frac{11}{2};\frac{5}{2}\right]$



Rovnice osy o: $y=-\frac{1}{k}x+q$

$y=x+q$, dosaď $O\left[\frac{11}{2};\frac{5}{2}\right]$

$\frac{5}{2}=\frac{11}{2}+q$

$\boxed{q=-3}$ ... $o: y=x-3$

Pro střed S kružnice k' platí: $p \cap o=\{S\}$. Platí:

$y = \frac{3}{4}x - \frac{3}{4}$

$\underline{y = x - 3}$

$y = y$

$\frac{3}{4}x - \frac{3}{4} = x - 3 \quad | \cdot 4$

$3x - 3 = 4x - 12$

$\boxed{x = 9}$

$y = x - 3$

$y = 9 - 3$

$\boxed{y = 6}$

$\left.\right\} S[9;3] \Rightarrow$ (m n)

$\Rightarrow m = 9$

$n = 6$

$\vec{r} = S - A\ (m-5;\ n-3)$

$\vec{r} = S - B\ (m-6;\ n-2)$

$|\vec{r}| = \sqrt{(m-5)^2 + (n-3)^2}$

$|\vec{r}| = \sqrt{(9-5)^2 + (6-3)^2}$

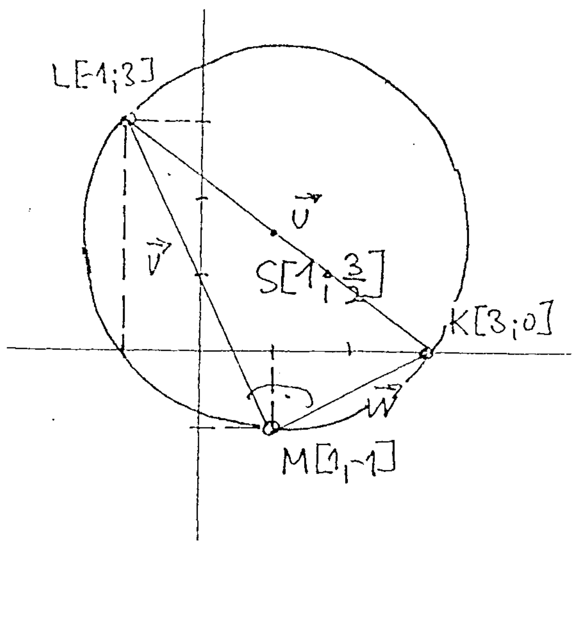
$r = 5;\ r^2 = 25$

$(x-m)^2 + (y-n)^2 = r^2$

$(x-9)^2 + (y-6)^2 = 25$

$x^2 - 18x + 81 + y^2 - 12y + 36 = 25$

$\boxed{x^2 + y^2 - 18x - 12y + 92 = 0}$



---

*(11) Určete vzájemnou polohu kružnice $x^2 + y^2 + 6x + 6y - 7 = 0$ a přímky určené body $A[1;0]$, $B[-3;-4]$.

$A[a_1, a_2]$, $B[b_1, b_2]$

$y = \frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1}(x - a_1) + a_2$

$y = \frac{-4-0}{-3-1} = \frac{-4}{-4} = 1 \ldots$

$y = 1(x-1) + 0$

$y = x - 1$

$\to x^2 + (x-1)^2 + 6x + 6(x-1) - 7 = 0$

$x^2 + x^2 - 2x + 6x + 6x - 6 - 7 = 0$

$2x^2 + 10x - 13 = 0$

$D = b^2 - 4ac$

$D = 100 + 104 = 204 \Rightarrow$ $\boxed{\text{sečna}}$

$\sqrt{204} > 0$

---

*(12) V rovině je dán $\triangle KLM$ o vrcholech $K[3;0]$, $L[-1;3]$, $M[1;-1]$.

a) Rozhodněte výpočtem, zda jde o pravoúhlý $\triangle$.

b) Napište rovnici kružnice opsané $\triangle KLM$.

Podle označení na obr. platí:

a) $\vec{u} = L - K = (-1-3;\ 3-0) = (-4;3)$

$|\vec{u}| = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25}$

$\vec{v} = M - L = (1+1;\ -1-3) = (2;-4)$

$|\vec{v}| = \sqrt{2^2 + (-4)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20}$

$\vec{w} = M - K = (1-3;\ -1-0) = (-2;-1)$

$|\vec{w}| = \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$

$|KL| = (\sqrt{25})^2 = 25$

$|LM|^2 + |KM|^2 = (\sqrt{20})^2 + (\sqrt{5})^2 = 20 + 5 = 25$

$|KL|^2 = |LM|^2 + |KM|^2$ .. Podle obrácené Pyth. věty (9) je $\triangle KLM$ pravoúhlý.

b) $x^2+y^2+Ax+By+C=0$

$K[3;0]\ldots\ 3^2+0^2+3A+0B+C=0$

$\boxed{9+3A+C=0}$

$L[-1;3]\ldots\ (-1)^2+3^2-A+3B+C=0$

$\boxed{10-A+3B+C=0}$

$M[1;-1]\ldots\ \boxed{2+A-B+C=0}$

$9+3A+C=0$ (1)
$10-A+3B+C=0$ (2) $|\cdot 3$
$2+A-B+C=0$ (3)

(2) a (3)

$12+2B+2C=0 \quad |:2$

$\boxed{6+B+C=0}$

(1) a (2) po úpravě

$9+3A+C=0$
$30-3A+9B+3C=0$
$\boxed{39+9B+4C=0}$

$6+B+C=0 \quad |\cdot -9$
$39+9B+4C=0$

$-\cancel{36}\ 54-9B-9C=0$
$39+9B+4C=0$

$-15-5C=0$

$\boxed{C=-3}$

$6+B-3=0$

$\boxed{B=-3}$

$2+A+3-3=0$

$\boxed{A=-2}$

$-2m=A$

$-2m=-2$

$\boxed{m=1}$

$-2n=-3$

$\boxed{n=\frac{3}{2}}$

$r=\frac{1}{2}|KL|=\frac{1}{2}|\vec{u}|=\frac{1}{2}\sqrt{25}=\frac{5}{2}$

$r^2=\frac{25}{4}$

$(x-m)^2+(y-n)^2=r^2$

$$\boxed{(x-1)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{25}{4}}$$

$x^2-2x+1+y^2-3y+\frac{9}{4}-\frac{25}{4}=0$

$$\boxed{x^2+y^2-2x-3y-3=0}$$

KONEC ČLÁNKU 4.6