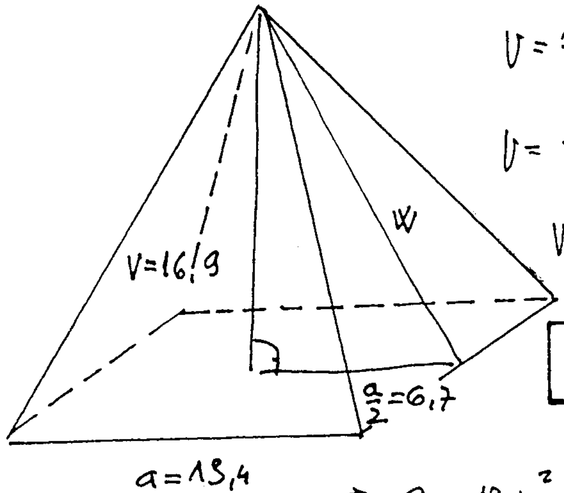
4.3 Jehlan a komolý jehlan

① Určete objem a povrch pravidelného čtyřbokého jehlanu o podstavné hraně $a = 13{,}4\,cm$ a výšce $v = 16{,}9\,cm$.



$V = \frac{1}{3} S_p \cdot v$

$V = \frac{1}{3} a^2 v$

$V = \frac{1}{3}\, 13{,}4^2 \cdot 16{,}9$

$\boxed{V \doteq 1011{,}521\ cm^3}$

$w = \sqrt{v^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}$

$w = \sqrt{16{,}9^2 + 6{,}7^2}$

$\underline{w = 18{,}17965896}$

$S = S_p + S_{pl}$

$S = a^2 + \frac{a \cdot w}{2} \cdot 4$

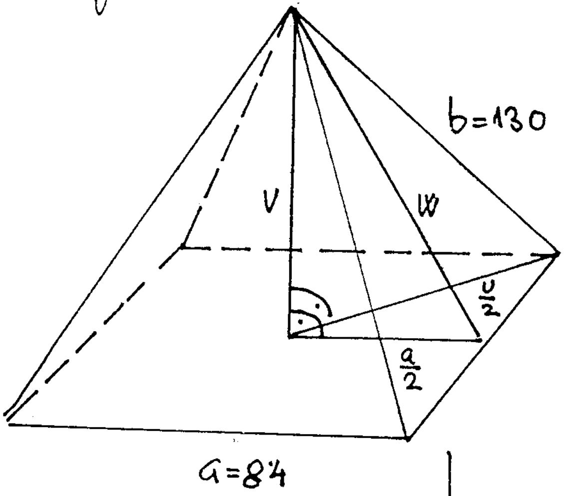
$S = a^2 + 2aw$

$S = 13{,}4^2 + 2 \cdot 13{,}4 \cdot 18{,}17965896$

$\boxed{S \doteq 666{,}775\ cm^2}$

---

② Určete objem a povrch pravidelného čtyřbokého jehlanu o podstavné hraně $a = 84\,m$ a boční hraně $b = 130\,m$.



$u = a\sqrt{2}$

$\frac{u}{2} = \frac{a \cdot \sqrt{2}}{2} = \frac{84 \cdot \sqrt{2}}{2} = 42 \cdot \sqrt{2}$

$\frac{u}{2} = 59{,}39696962$

$v = \sqrt{b^2 - \left(\frac{u}{2}\right)^2}$

$v = \sqrt{130^2 - 59{,}3969696^2}$

$\underline{v = 115{,}6373642}$

$V = \frac{1}{3} a^2 v$

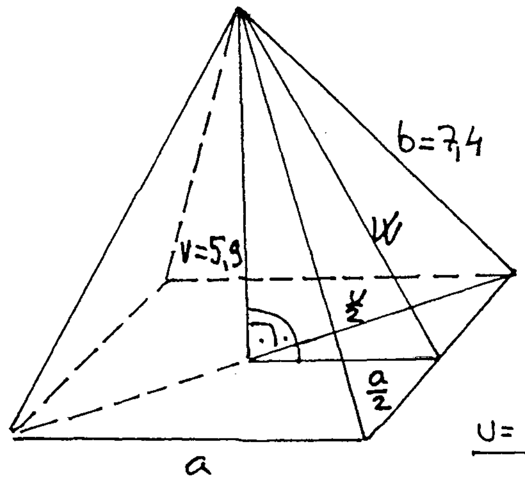
$V = \frac{1}{3} \cdot 84^2 \cdot 115{,}6373642$

$\boxed{V \doteq 271\,979\ m^3}$

$w = \sqrt{v^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{115{,}0373642^2 + 42^2} \;\ldots\; w = 123{,}028452$

$S = a^2 + 2aw = 84^2 + 2 \cdot 84 \cdot 123{,}028452 \;\ldots\; \boxed{S \doteq 27\,724{,}78 \ m^2}$

③ Určete objem a povrch pravidelného čtyřbokého jehlanu o boční hraně $b = 7{,}4$ cm a výšce $v = 5{,}9$ cm.



$\frac{u}{2} = \sqrt{b^2 - v^2}$ $\qquad u = a \cdot \sqrt{2}$

$\frac{u}{2} = \sqrt{7{,}4^2 - 5{,}9^2}$ $\qquad a = \frac{u}{\sqrt{2}}$

$\frac{u}{2} = 4{,}466542287$ $\qquad a = \frac{8{,}933084574}{\sqrt{2}}$

$u = 8{,}933084574$ $\qquad a = 6{,}316644679$

$\frac{a}{2} = 3{,}158322339$

$w = \sqrt{v^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}$ $\qquad V = \frac{1}{3} a^2 v$

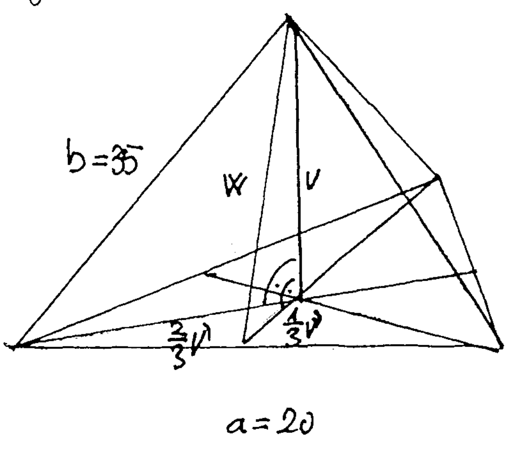
$w = \sqrt{5{,}9^2 + 3{,}158322339^2}$ $\qquad V = \frac{1}{3} \cdot 6{,}316644679^2 \cdot 5{,}9$

$w = 6{,}692159592$ $\qquad \boxed{V \doteq 78{,}47 \ cm^3}$

$S = a^2 + 2aw = 6{,}316644679^2 + 2 \cdot 6{,}316644679 \cdot 6{,}692159592$

$\boxed{S \doteq 124{,}444 \ cm^2}$

④ Určete objem a povrch pravidelného trojbokého jehlanu, jehož podstavná hrana $a = 20$ cm a boční hrana $b = 35$ cm.



$v' = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{20\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}$ $\qquad v = \sqrt{b^2 - \left(\frac{2}{3}v'\right)^2}$

$\frac{1}{3}v' = \frac{1}{3} \cdot 10\sqrt{3} = \frac{10}{3}\sqrt{3}$ $\qquad v = \sqrt{35^2 - \left(\frac{20\sqrt{3}}{2}\right)^2}$

$\frac{2}{3}v' = \frac{2}{3} \cdot 10\sqrt{3} = \frac{20}{3}\sqrt{3}$ $\qquad v \doteq 33{,}04037974$

$V = \frac{1}{3} S_p \cdot v$

$V = \frac{1}{3} \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot v$

$V = \frac{1}{3} \frac{20^2\sqrt{3}}{4} \cdot 33{,}04037974$

$\boxed{V \doteq 1907{,}587\ cm^3}$

$w = \sqrt{\left(\frac{1}{3}v'\right)^2 + v^2}$

$w = \sqrt{\left(\frac{10\sqrt{3}}{3}\right)^2 + 33{,}04037974^2}$

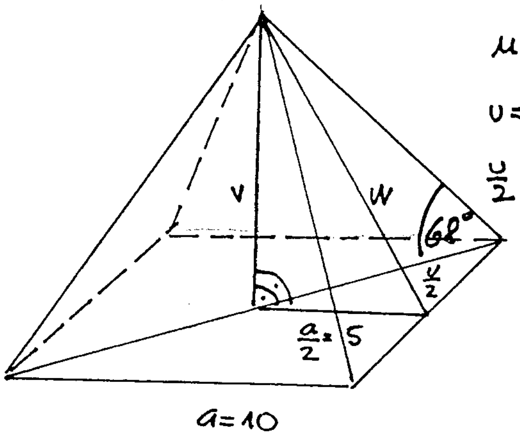
$W \doteq 33{,}541$

$S = S_p + S_{pl} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + 3 \cdot \frac{aw}{2} = 0{,}25 \cdot 20^2 \cdot \sqrt{3} + 1{,}5 \cdot 20 \cdot 33{,}541$

$\boxed{S \doteq 1179{,}435\ cm^2}$

---

(5) Kolik m^2 plechu je potřeba na pokrytí věže tvaru pravidelného čtyřbokého jehlanu o podstavné hraně 10 m, je-li odchylka boční hrany od roviny podstavy 68°. Při pokrývání se počítá s odpadem 10%.



$u = a \cdot \sqrt{2}$

$u = 10 \cdot \sqrt{2}$

$\frac{u}{2} = 5 \cdot \sqrt{2}$

$tg\, 68° = \frac{v}{\frac{u}{2}}$

$v = \frac{u}{2} \cdot tg\, 68°$

$v = 5 \cdot \sqrt{2} \cdot tg\, 68°$

$v = 17{,}50150698$

Poznámka: nejde o věž, ale o střechu věže.

$w = \sqrt{v^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}$

$w = \sqrt{17{,}50150698^2 + 5^2}$

$w = 18{,}20172373$

$S_{pl} = 2aw$

$S_{pl} = 2 \cdot 10 \cdot 18{,}20172373$

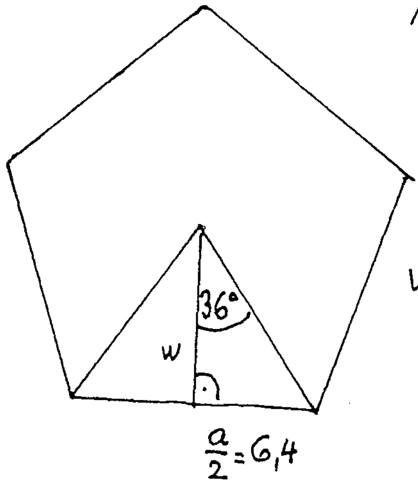
$S_{pl} = 364{,}0344775$

$110\%\, S_{pl} = 364{,}0344775 \cdot 1{,}1$

$\boxed{110\%\, S_p \doteq 400{,}45\ m^2 \text{ plechu}}$

---

(6) Vypočítejte objem a povrch pravidelného pětibokého jehlanu o podstavné hraně $a = 12{,}8\ cm$ a výšce $v = 32{,}1\ cm$.



$tg\,36° = \frac{\frac{a}{2}}{w}$

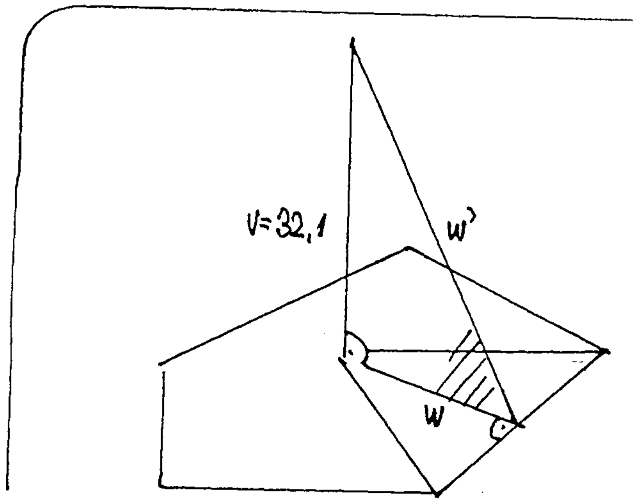
$w = \frac{6{,}4}{tg\,36°}$

$w = 8{,}808\,844\,291$

$S_p = \frac{a \cdot w}{2} \cdot 5$

$S_p = 12{,}8 \cdot 8{,}808\,844\,291 \cdot 2{,}5$

$S_p = 281{,}883\,017\,5$



$V = \frac{1}{3} S_p \cdot v$

$V = \frac{1}{3} \cdot 281{,}883\,0175 \cdot 32{,}1$

$\boxed{V \doteq 3\,016{,}148\ cm^3}$

$w' = \sqrt{v^2 + w^2}$

$w' = \sqrt{32{,}1^2 + 8{,}808\,844\,291^2}$

$w' = 33{,}286\,72014$

$S = S_p + S_{pl}$

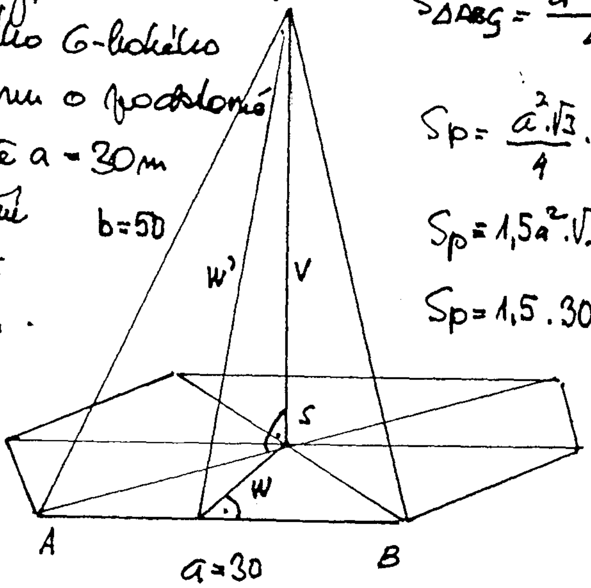
$S = S_p + \frac{a \cdot w'}{2} \cdot 5$ $\qquad \frac{5}{2} = 2{,}5$

$S = 281{,}883\,017\,5 + 2{,}5 \cdot 12{,}8 \cdot 33{,}286\,72014$

$\boxed{S \doteq 1\,347{,}058\ cm^2}$

---

7) Vypočítejte V a S pravidelného 6-bokého jehlanu o podstavné hraně a = 30 m a boční hraně b = 50 m.



$S_{\Delta ABS} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

$S_p = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot 6$

$S_p = 1{,}5a^2 \cdot \sqrt{3}$

$S_p = 1{,}5 \cdot 30^2 \cdot \sqrt{3}$

$S_p = 2338{,}26859$

$V = \frac{1}{3} S_p \cdot v$

$V = \frac{1}{3} \cdot 2338{,}26859 \cdot 40$

$V = 31{,}176\,915\ m^3$

$v = \sqrt{50^2 - 30^2}$

$v = 40$

$w = \frac{a.\sqrt{3}}{2}$ $\qquad w' = \sqrt{w^2 + v^2}$

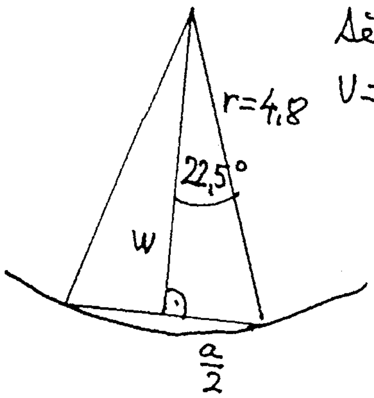
$w = \frac{30.\sqrt{3}}{2}$ $\qquad w' = \sqrt{25,98076211^2 + 40^2}$

$w = 25,98076211$ $\qquad w' = 47,69696007$

$S = S_p + S_{pl} = S_p + \frac{a.w'}{2}.6 = S_p + 3aw'$

$S = 2338,26859 + 3.30.47,69696007 \ldots \boxed{S = 6630,995\ m^2}$

⑧ Vypočítejte objem a povrch pravidelného osmibokého jehlanu, jehož podstavě lze opsat kružnici o poloměru $r = 4.8$ a jehož výška $v = 9,5cm$.



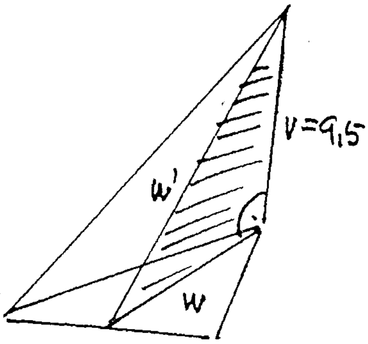
Zad. výška $v = 9,5$

$\sin 22°30' = \frac{\frac{a}{2}}{4.8}$ $\qquad \operatorname{tg} 22°30' = \frac{\frac{a}{2}}{w}$

$\frac{a}{2} = 4,8 . \sin 22°30'$ $\qquad w = \frac{1,836880475}{\operatorname{tg} 22°30'}$

$\frac{a}{2} = 1,836880475$

$a = 3,673760951$ $\qquad w = 4,434621756$



$S_p = \frac{a.w}{2}.8$

$S_p = 4aw$

$S_p = 4.3,673760951.4,434621756$

$S_p = 65,16696096$

$S = S_p + S_{pl}$

$w' = \sqrt{w^2 + v^2}$ $\qquad S = S_p + \frac{aw}{2}.8 = S_p + 4aw$

$w' = \sqrt{4,434621756^2 + 9,5^2}$ $\qquad S = 65,16696096 + 4.3,673760951.10,48407698$

$w' = 10,48407698$ $\qquad \boxed{S \doteq 219,281\ cm^2}$

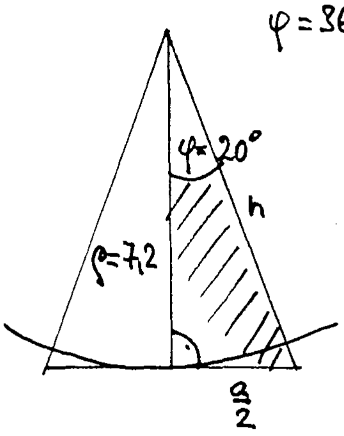
$V = \frac{1}{3} S_p.v$

$V = \frac{1}{3}.65,16696096.9,5$

$\boxed{V \doteq 206,362\ cm^3}$

9) Vypočítejte objem a povrch devítibokého jehlanu, jehož podstavě lze vepsat kružnici o poloměru $\rho = 7{,}2\,cm$ a jehož boční hranu $b = 10{,}9\,cm$.

$\varphi = 360° : 18 = 20°$ Poznámka: Jde zřejmě o pravidelný…



$$\operatorname{tg} 20° = \frac{\frac{a}{2}}{7{,}2}$$

$$\frac{a}{2} = 7{,}2 \cdot \operatorname{tg} 20°$$

$$\frac{a}{2} = 2{,}620\,585\,687$$

$$a = 5{,}241\,171\,373$$

$$S_p = \frac{a \cdot \rho}{2} \cdot 9$$

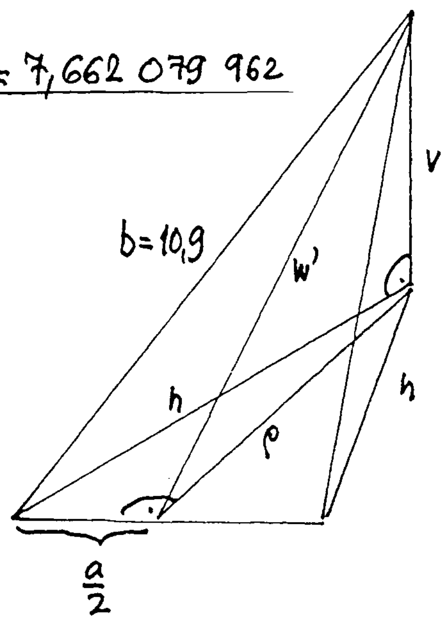
$$S_p = 4{,}5\,a \cdot \rho$$

$$S_p = 4{,}5 \cdot 5{,}241171373 \cdot 7{,}2$$

$$S_p = 169{,}813\,952\,5$$

$$h = \sqrt{7{,}2^2 + 2{,}620585687^2}$$

$$h = 7{,}662\,079\,962$$



$$v = \sqrt{b^2 - h^2}$$

$$v = \sqrt{10{,}9^2 - 7{,}662\,079\,962^2}$$

$$v = 7{,}752\,582\,193$$

$$V = \frac{1}{3} S_p \cdot v$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot 169\,813\,9525 \cdot 7{,}752\,582\,193$$

$$V = 438{,}832 \ldots \quad \boxed{V \doteq 438{,}832\ cm^3}$$

$$w' = \sqrt{\rho^2 + v^2}$$

$$w' = \sqrt{7{,}2^2 + 7{,}752\,582\,193^2}$$

$$w' = 10{,}580\,289\,72$$

$$S = S_p + S_{pl}$$

$$S = S_p + \frac{a \cdot w'}{2} \cdot 9$$

$$S = S_p + 4{,}5\,a \cdot w'$$

$$S = 169{,}813\,9525 + 4{,}5 \cdot 5{,}241\,171\,373 \cdot 10{,}58028972$$

$$\boxed{S \doteq 419{,}353\ cm^2}$$

10) Vypočítejte objem a povrch pravidelného desetibokého jehlanu o podst. hraně $a = 3{,}2\,cm$ a boční hraně $b = 15{,}8\,cm$.

$\varphi = 360° : 20$

$\varphi = 18°$

$tg\,18° = \frac{1,6}{w}$

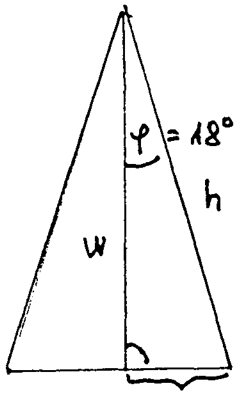
$w = \frac{1,6}{tg\,18°}$

$\underline{w = 4,924\,293\,659}$

$\sin 18° = \frac{1,6}{h}$

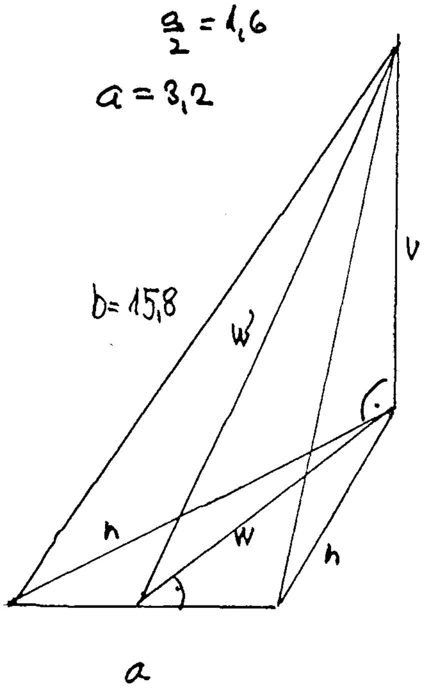
$h = \frac{1,6}{\sin 18°}$

$\underline{h = 5,177\,708\,764}$



$\frac{a}{2} = 1,6$

$a = 3,2$



$v = \sqrt{b^2 - h^2}$

$v = \sqrt{15,8^2 - 5,177\,708\,764^2}$

$\underline{v = 14,927\,536\,03}$

$S_p = \frac{a \cdot w}{2} \cdot 10$

$S_p = 5aw$

$S_p = 5 \cdot 3,2 \cdot 4,924\,293\,659$

$\underline{S_p = 78,788\,698\,54}$

$V = \frac{1}{3} S_p \cdot v$

$V = \frac{1}{3} \cdot 78,788\,698\,54 \cdot$
$\cdot\, 14,927\,536\,03$

$\boxed{V \doteq 392,04\,cm^3}$

$w' = \sqrt{w^2 + v^2}$

$w' = \sqrt{4,924\,293\,659^2 + 14,927\,536\,03^2}$

$\underline{w' = 15,718\,778\,58}$

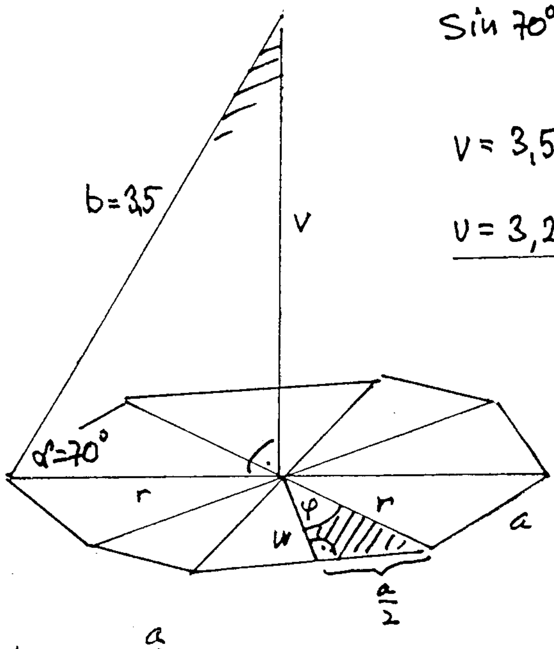
$S = S_p + S_{pl} = S_p + \frac{a \cdot w'}{2} \cdot 10 = S_p + 5aw'$

$S = 78,788\,698\,54 + 5 \cdot 3,2 \cdot 15,718\,778\,58 \ldots$ $\boxed{S \doteq 330,289\,cm^2}$

---

(11) Pravidelný osmiboký jehlan má boční hranu b = = 3,5 dm; její odchylka od roviny podstavy je $\alpha = 70°$. Určete objem jehlanu.

$\varphi = 360° : 16 = 22°30'$



$\sin 70° = \frac{v}{3,5}$

$v = 3,5 \cdot \sin 70°$

$\underline{v = 3,288\ 924\ 173}$

$\mathrm{tg}\ 70° = \frac{v}{r}$

$r = \frac{v}{\mathrm{tg}\ 70°}$

$r = \frac{3,288\ 924\ 173}{\mathrm{tg}\ 70°}$

$\underline{r = 1,197\ 070\ 502}$

$\sin \varphi = \frac{\frac{a}{2}}{r}$

$\frac{a}{2} = r \cdot \sin\varphi$

$\frac{a}{2} = 1,197\ 070\ 502 \cdot \sin 22°30'$

$\frac{a}{2} = 0,458\ 099\ 048$

$\underline{a = 0,96\ 198\ 097}$

$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{\frac{a}{2}}{w}$

$w = \frac{\frac{a}{2}}{\mathrm{tg}\,\varphi}$

$w = \frac{0,458\ 099\ 048}{\mathrm{tg}\ 22°30'}$

$\underline{w = 1,105\ 948\ 936}$

$S_p = \frac{a \cdot w}{2} \cdot 8$

$S_p = 4aw$

$V = \frac{1}{3} S_p \cdot v \quad \dots \quad V = \frac{1}{3}\, 4aw \cdot v$

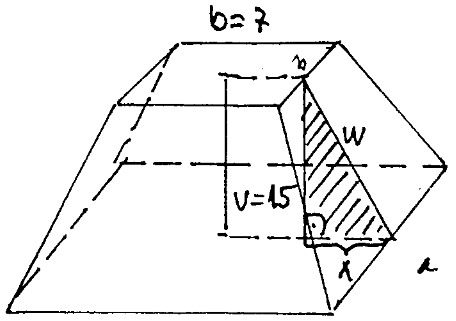
$V = \frac{1}{3} \cdot 4 \cdot 0,916198097 \cdot 1,105948936 \cdot 3,288924173$

$\boxed{V = 4,443\ dm^3}$

---

(12) Vypočítejte objem a povrch pravidelného komolého čtyřbokého jehlanu o podstavných hranách $a = 16cm$, $b = 7cm$, jestliže výška je $v = 15cm$.

$x = 4,5$



$V = \frac{v}{3}(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2)$ $\qquad w = \sqrt{v^2 + x^2}$

$V = \frac{15}{3} \cdot (16^2 + \sqrt{16^2 \cdot 7^2} + 7^2)$ $\qquad W = \sqrt{15^2 + 4{,}5^2}$

$V = 5 \cdot (256 + 112 + 49)$ $\qquad \underline{W = 15{,}660\,459\,76}$

$\boxed{V = 2085\ cm^3}$

$S = S_1 + S_2 + S_{pl}$

$S = a^2 + b^2 + 4 \cdot \frac{a+b}{2} \cdot w$

$S = a^2 + b^2 + 2w(a+b)$

$S = 16^2 + 7^2 + 2 \cdot 15{,}660\,459\,76 \cdot (16+7) \ldots$ $\boxed{S \doteq 1025{,}381\ cm^2}$

---

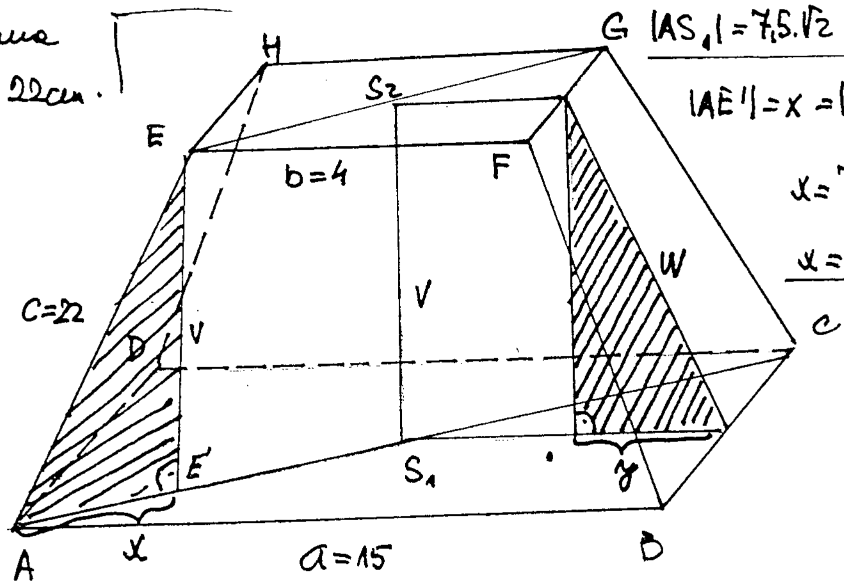
(13) Vypočítejte objem a povrch pravidelného čtyřbokého komolého jehlanu, jehož hrany podstav jsou $a = 15cm$, $b = 4cm$ a boční hrana $c = 22cm$.

$|AC| = a \cdot \sqrt{2}$ $\qquad |EG| = b \cdot \sqrt{2}$

$|AC| = 15 \cdot \sqrt{2}$ $\qquad |EG| = 4 \cdot \sqrt{2}$

$|AS_1| = \frac{15 \cdot \sqrt{2}}{2}$ $\qquad |ES_2| = \frac{4 \cdot \sqrt{2}}{2}$

$|AS_1| = 7{,}5 \cdot \sqrt{2}$ $\qquad |ES_2| = 2 \cdot \sqrt{2}$



$|AE'| = x = |AS_1| - |ES_2|$

$x = 7{,}5\sqrt{2} - 2\sqrt{2}$

$\underline{x = 5{,}5 \cdot \sqrt{2}}$

$y = \frac{a}{2} - \frac{b}{2}$

$y = 7{,}5 - 2$

$\underline{y = 5{,}5}$

$W = \sqrt{v^2 + y^2}$

$W = \sqrt{20{,}579\,115\,63^2 + 5{,}5^2}$

$\underline{W = 21{,}301\,408\,41}$

$v = \sqrt{c^2 - x^2}$

$v = \sqrt{22^2 - (5{,}5 \cdot \sqrt{2})^2} = \sqrt{22^2 - 30{,}25 \cdot 2}$

$v = \sqrt{22^2 - 60{,}5}$

$\underline{v = 20{,}579\,115\,63}$

$V = \frac{v}{3}\left(S_1 + \sqrt{S_1 \cdot S_2} + S_2\right)$

$V = \frac{20{,}579\,11563}{3} \cdot \left(15^2 + \sqrt{15^2 \cdot 4^2} + 4^2\right)$

$V = \quad -\|- \quad \cdot (225 + 60 + 16)$

$V = \quad -\|- \quad \cdot 301$

$\boxed{V \doteq 2064{,}771\ cm^3}$

/\ ako v předchozím příkladu.

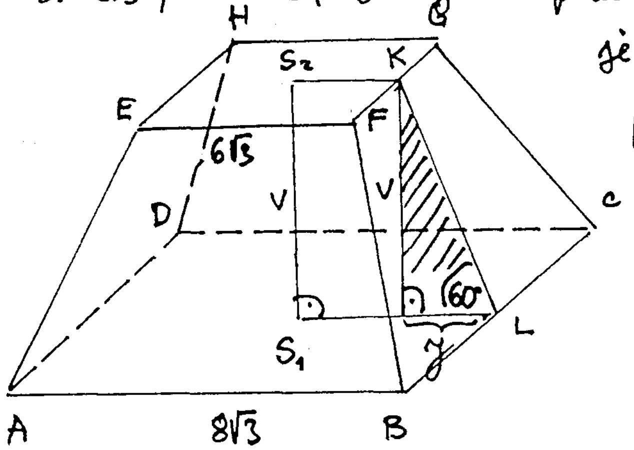
$S = a^2 + b^2 + 2w\,(a+b)$

$S = 15^2 + 4^2 + 2 \cdot 21{,}301\,40841 \cdot \underbrace{(15+4)}_{19}$

$\boxed{S \doteq 1050{,}453\ cm^2}$

---

* (14) Pravidelný čtyřboký komolý jehlan má podstavné hrany $a = 8\sqrt{3}$, $b = 6\sqrt{3}$, odchylka pobočné stěny od roviny podstavy je $60°$. Určete objem komolého jehlanu.



$|S_1L| = \frac{8\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$ $\qquad y = 4\sqrt{3} - 3\sqrt{3}$

$|S_2K| = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$ $\qquad y = \sqrt{3}$

$\mathrm{tg}\, 60° = \frac{v}{y}$

$v = y \cdot \mathrm{tg}\, 60°$

$v = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3}$

$v = 3$

$V = \frac{v}{3}\left(S_1 + \sqrt{S_1 \cdot S_2} + S_2\right)$

$V = \frac{3}{3} \cdot \left[(8\sqrt{3})^2 + \sqrt{(8 \cdot \sqrt{3})^2 \cdot (6 \cdot \sqrt{3})^2} + (6\sqrt{3})^2\right]$

$V = \left(64 \cdot 3 + \sqrt{64 \cdot 3 \cdot 36 \cdot 3} + 36 \cdot 3\right)$

$\boxed{V = 444}$

Výsledek 312 ve sbírce je zřejmě chybný.

KONEC ČLÁNKU 4.3