1b) SINOVÁ VĚTA A JEJÍ UŽITÍ V PRAXI

Sinová věta: Poměr délek stran trojúhelníku ABC je roven poměrům sinů velikostí protilehlých úhlů ($a : b : c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma$)

Formulace z učebnice: Pro každý trojúhelník ABC, jehož vnitřní úhly mají velikost α, β, γ, platí

$$\boxed{\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}}$$ nebo $$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} \quad \frac{b}{c} = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma} \quad \frac{a}{c} = \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}}$$

Sinovou větu použijeme při řešení těchto typů úloh:

A z délky jedné strany △ a z velikostí dvou jeho vnitřních úhlů vypočítáme délku jiné strany.

Příklad 1: V △ ABC je dáno: $a = 52$ cm, $\beta = 63°14'$, $\gamma = 57°43'$. Vypočítejte: b, c, α

Řešení: $\alpha = 180° - (\beta + \gamma) = 180° - (63°14' + 57°43') = \boxed{59°03'} = \alpha$

Výpočet délky b:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$$

$$b \cdot \sin\alpha = a \cdot \sin\beta$$

$$b = \frac{a \cdot \sin\beta}{\sin\alpha}$$

$$b = \frac{52 \cdot \sin 63°14'}{\sin 59°03'}$$

$$\boxed{b \doteq 54{,}136\ (\text{cm})}$$

Výpočet délky c:

$$\frac{a}{c} = \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}$$

$$a \cdot \sin\gamma = c \sin\alpha$$

$$c = \frac{a \cdot \sin\gamma}{\sin\alpha}$$

$$c = \frac{52 \cdot \sin 57°43'}{\sin 59°03'}$$

$$\boxed{c \doteq 51{,}26\ (\text{cm})}$$

Příklad 2: V △ ABC je dáno: $c = 20$ dm, $\alpha = 45°$, $\beta = 105°$. Vypočítejte γ, a, b.

Řešení: $\gamma = 180° - (\alpha + \beta) = 180° - (45° + 105°) = 30°$ ... $\boxed{\gamma = 30°}$

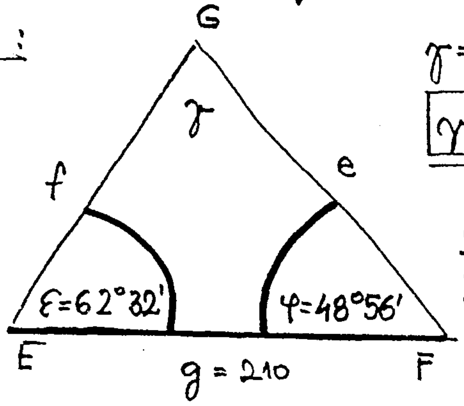
b samostatně $\boxed{b \doteq 38{,}64\ \text{dm}}$

$$\frac{a}{c} = \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}$$

$$a = \frac{c \cdot \sin\alpha}{\sin\gamma} = \frac{20 \cdot \sin 45°}{\sin 30°} \doteq 28{,}28$$ $\boxed{a \doteq 28{,}28\ \text{dm}}$

Příklad 3: V $\triangle EFG$ je dáno $g = 210$, $\varepsilon = |\sphericalangle GEF| = 62°32'$, $\varphi = |\sphericalangle EFG| = 48°56'$. Vypočítejte: $\gamma = |\sphericalangle FGE|$, f, e

Řešení:



$$\gamma = 180° - 62°32' - 48°56' = 68°32'$$

$$\boxed{\gamma = 68°32'}$$

$$\frac{e}{g} = \frac{\sin \varepsilon}{\sin \gamma}$$

$$e = \frac{g \cdot \sin \varepsilon}{\sin \gamma} = \frac{210 \cdot \sin 62°32'}{\sin 68°32'}$$

$$\boxed{e \doteq 200{,}2}$$

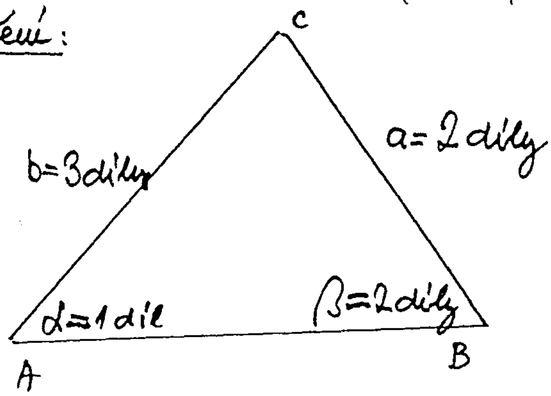
$$\frac{f}{g} = \frac{\sin \varphi}{\sin \gamma}$$

$$f = \frac{g \cdot \sin \varphi}{\sin \gamma} = \frac{210 \cdot \sin 48°56'}{\sin 68°32'} \doteq 170{,}1 \qquad \boxed{f \doteq 170{,}1}$$

Příklad 4: Určete velikosti vnitřních úhlů a poměr délek stran $\triangle$, jestliže platí:

$a : b = 2 : 3$, $\alpha : \beta = 1 : 2$

Řešení:



Ze vztahu $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{1}{2}$ plyne, že

$\boxed{\beta = 2\alpha}$ ... ①

$\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$ ... dosaď vztah ① ale

$\frac{2}{3} = \frac{\sin\alpha}{\sin 2\alpha}$ ... použijeme vzorec $\sin 2\alpha = 2 \cdot \sin\alpha \cos\alpha$

$$\frac{2}{3} = \frac{\cancel{\sin\alpha}}{2 \cdot \cancel{\sin\alpha} \cos\alpha}$$

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{2 \cdot \cos\alpha}$$

$$4 \cdot \cos\alpha = 3$$

$$\cos\alpha = \frac{3}{4} \Rightarrow \boxed{\alpha \doteq 41°25'}$$

$\beta = 2 \cdot \alpha \doteq 2 \cdot 41°25' = 82°50'$

$\boxed{\beta \doteq 82°50'}$

$\gamma \doteq 180° - 41°25' - 82°50' \doteq 55°45'$

$\boxed{\gamma \doteq 55°45'}$

$\boxed{a : b : c = \sin 41°25' : \sin 82°50' : \sin 55°45'}$

Příklad 5: Určete poměr délek stran a, b, c v $\triangle ABC$, je-li $\alpha = 30°$, $\beta = 60°$, $\gamma = 90°$.

Řešení: $a : b : c = \frac{1}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} : 1 \quad | \cdot 2$

$$\boxed{a : b : c = 1 : \sqrt{3} : 2}$$

Příklad 6: V $\triangle ABC$ platí: $\alpha : \beta : \gamma = 1 : 1 : 2$. Vypočítejte poměr délek stran tohoto $\triangle$.

Řešení: $\alpha : \beta : \gamma = \underbrace{1 : 1 : 2}_{4 \text{ díly}}$ $\quad 180° : 4 = 45° \ldots$ 1 díl $45° = \alpha$

1 díl $45° = \beta$

2 díly $90° = \gamma$

$a : b : c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma = \sin 45° : \sin 45° : \sin 90°$

$a : b : c = \frac{\sqrt{2}}{2} : \frac{\sqrt{2}}{2} : 1 \quad | \cdot 2$

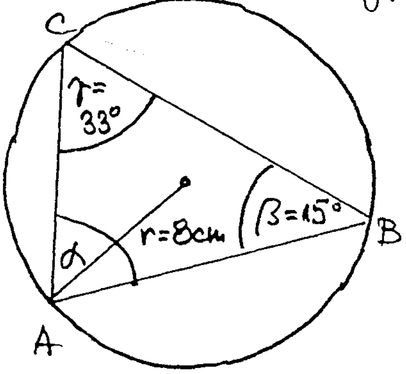
$$\boxed{a : b : c = \sqrt{2} : \sqrt{2} : 2}$$

Pro POLOMĚR KRUŽNICE OPSANÉ $\triangle ABC$ platí:

$r = \frac{a}{2 \cdot \sin\alpha}$	$r = \frac{b}{2 \cdot \sin\beta}$	$r = \frac{c}{2 \cdot \sin\gamma}$

Příklad 7: V $\triangle ABC$ je $\beta = 15°$, $\gamma = 30°$, poloměr opsané kružnice je $r = 8\,cm$. Vypočítejte obvod $\triangle ABC$.

Řešení



$r = \frac{b}{2 \cdot \sin\beta}$	$r = \frac{c}{2 \cdot \sin\gamma}$
$b = r \cdot 2 \cdot \sin\beta$	$c = r \cdot 2 \cdot \sin\gamma$
$b = 8 \cdot 2 \cdot \sin 15°$	$c = 8 \cdot 2 \cdot \sin 33°$
$b \doteq 4{,}14\,(cm)$	$c \doteq 8{,}71\,(cm)$

$\alpha = 180° - (33° + 15°) = 132°$

$r = \frac{a}{2 \cdot \sin\alpha} \Rightarrow a = r \cdot 2 \cdot \sin\alpha = 8 \cdot 2 \cdot \sin 132° \doteq 11{,}9\,(cm)$

$o_{\triangle ABC} = 4{,}14\,cm + 8{,}71\,cm + 11{,}9\,cm = 24{,}75\,cm \qquad \boxed{o \doteq 24{,}8\,cm}$

DALŠÍ VZORCE PRO VÝPOČET OBSAHU △ABC

$S = \frac{1}{2} ab \cdot \sin\gamma$	$S = \frac{1}{2} bc \cdot \sin\alpha$	$S = \frac{1}{2} ac \cdot \sin\beta$

Příklad 8: Vypočítejte obsah △ABC, je-li dáno:

a) $b = 3{,}2\,\text{cm}$, $c = 7{,}5\,\text{cm}$, $\alpha = 123°40'$

b) $a = 7{,}9\,\text{cm}$, $b = 58{,}3\,\text{cm}$, $\gamma = 61°30'$

c) $c = 80\,\text{mm}$, $\alpha = 34°40'$, $\gamma = 59°$

Řešení: ad a)

$$S_\triangle = \frac{1}{2} bc \cdot \sin\alpha$$

$$S_\triangle = \frac{1}{2} \cdot 3{,}2 \cdot 7{,}5 \cdot \sin 123°40'$$

$$\boxed{S_\triangle \doteq 9{,}99\ (\text{cm}^2)}$$

b)

$$S_\triangle = \frac{1}{2} ab \cdot \sin\gamma$$

$$S_\triangle = \frac{1}{2} \cdot 7{,}9 \cdot 58{,}3 \cdot \sin 61°30'$$

$$\boxed{S_\triangle \doteq 202{,}4\ (\text{cm}^2)}$$

c) $c = 8\,\text{cm}$, $\alpha = 34°40'$, $\gamma = 59°$

Pomocí sinové věty určíme nejdříve délku strany b.

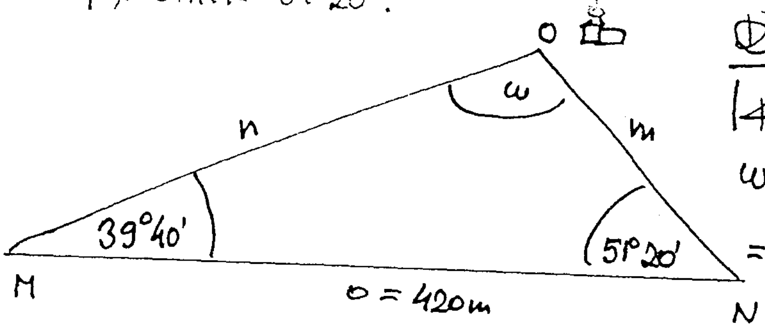
$$\beta = 180° - (34°40' + 59°) = 86°20'$$

$$\frac{b}{c} = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma} \rightarrow b = c \cdot \frac{\sin\beta}{\sin\gamma} = 8 \cdot \frac{\sin 86°20'}{\sin 59°} \doteq 9{,}314\ (\text{cm})$$

$$S_\triangle = \frac{1}{2} \cdot bc \cdot \sin\alpha \quad \ldots \quad S_\triangle = 0{,}5 \cdot 9{,}314 \cdot 8 \cdot \sin 34°10'$$

$$\boxed{S_\triangle \doteq 21\ (\text{cm}^2)}$$

Příklad 9: 2 pozorovatelem umístěných v bodech M, N v rovném terénu vzdálených 420 m je zaměřen kostel v bodě O. Vypočítejte vzdálenost kostela od obou pozorovatelů, víte-li, že $|\measuredangle OMN| = 39°40'$ a $|\measuredangle ONM| = 51°20'$.



Řešení (viz obr., kde $|\measuredangle NOM| = \omega$).

$$\omega = 180° - (39°40' + 51°20') = 89°$$

$$\frac{n}{\sin 51°20'} = \frac{o}{\sin 89°} \qquad n = \frac{420}{\sin 89°} \cdot \sin 51°20'$$

$$\frac{n}{\sin 51°20} = \frac{420}{\sin 89°} \qquad \boxed{n \doteq 328\,(m)}$$

$$\frac{m}{\sin 39°40'} = \frac{o}{\sin 89°} \qquad m = \frac{420}{\sin 89°} \cdot \sin 39°40'$$

$$\frac{m}{\sin 39°40'} = \frac{420}{\sin 89} \qquad \boxed{m \doteq 268\,(m)}$$

Příklad 10: Určete velikosti vnitřních úhlů α, β, γ trojúhelníku ABC a poměr délek jeho stran a, b, c, je-li $\alpha : \beta : \gamma = 3 : 5 : 10$

Řešení:

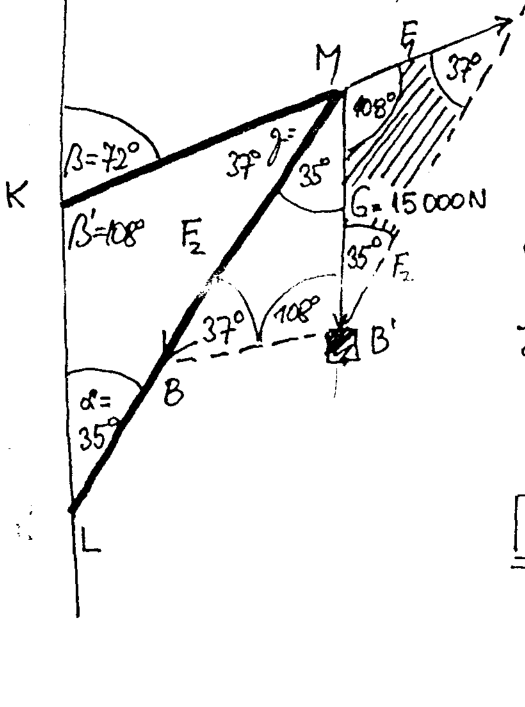
$3 + 5 + 10 = 18$ (dílů) ; $180° : 18 = 10°$ … 3 díly : $3 \cdot 10° = 30° = \alpha$

5 dílů : $5 \cdot 10° = 50° = \beta$

10 dílů : $10 \cdot 10° = 100° = \gamma$

$\boxed{a : b : c} = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma = \boxed{\sin 30° : \sin 50° : \sin 100°}$

Příklad 11: Nosník KLM s rameny KM a ML je upevněn na svislé stěně ; $\alpha = 35°$, $\beta = 72°$ (viz obr.) V bodě M je nosník zatížen břemenem o tíze $G = 15\,000$ N. Vypočítejte velikost tahu na rameno KM (síle F_1) a velikost tlaku na rameno ML (= síle F_2)



Řešení: $\beta' = 180° - 72° = 108°$, $\gamma = 180° - (108° + 35°) = 37°$

Výpočet po doplnění úhlů provedeme pomocí sinové věty uplatněné na $\triangle AMB$

$$\frac{F_1}{\sin 35°} = \frac{G}{\sin 37°}$$

$$\frac{F_1}{\sin 35°} = \frac{15\,000}{\sin 37°}$$

$$F_1 = \frac{15\,000}{\sin 37°} \cdot \sin 35°$$

$$\boxed{F_1 \doteq 14\,296\,(N)}$$

$F_2 = |MB| = |AB'|$

$$\frac{F_2}{\sin 108°} = \frac{15\,000}{\sin 37°}$$

$$F_2 = \frac{15\,000}{\sin 37°} \cdot \sin 108°$$

$$\boxed{F_2 \doteq 23\,704\,(N)}$$