76) GONIOMETRICKÉ ROVNICE

Definice: Základní goniometrickou rovnicí nazýváme každou rovnici tvaru

$$g(x)=a,$$

kde g je jedna z goniometrických funkcí sin, cos, tg, cotg, a a je reálné číslo a oborem proměnné x je množina $\mathbb{R}$.

Základním řešením uvedené rovnice nazýváme množinu všech jejích kořenů z intervalu $\langle 0; 2\pi \rangle$. čili $\langle 0°; 360° \rangle$.

Příklad 1: Řešte základní goniometrickou rovnici (dále už jen rovnici)

$$\sin x = -0{,}86$$

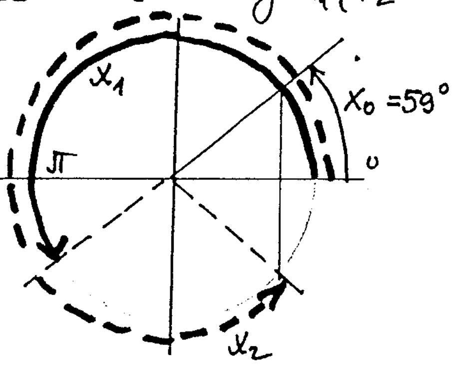
Řešení: Nejdříve určíme x_0 tak, že $|\sin x_0| = 0{,}86 \Rightarrow x_0 \doteq 59°$.

Dále pomocí obrázku vypočítáme kořeny x_1, x_2:

$x_1 \doteq 180° + 59° \doteq 239°$

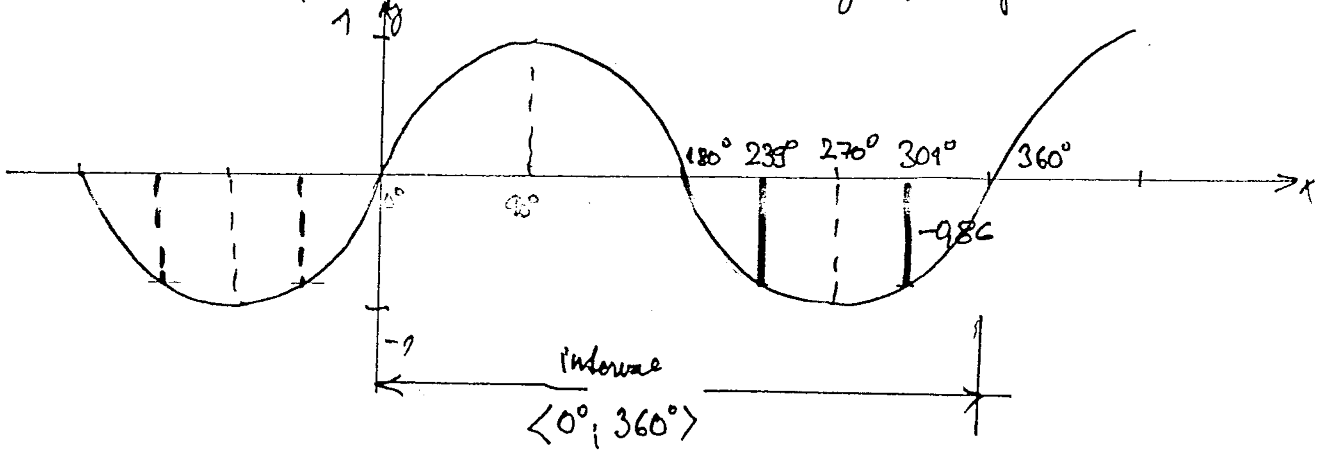
$x_2 \doteq 360° - 59° \doteq 301°$

Lze ověřit zkouškou na kalkulačce pro sin 239° a sin 301°



Toto řešení lze souhrnně zapsat $K = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{239° + k\cdot 360°; 301° + k \cdot 360°\}$.

Je možné ho také interpretovat na grafu $y = \sin x$



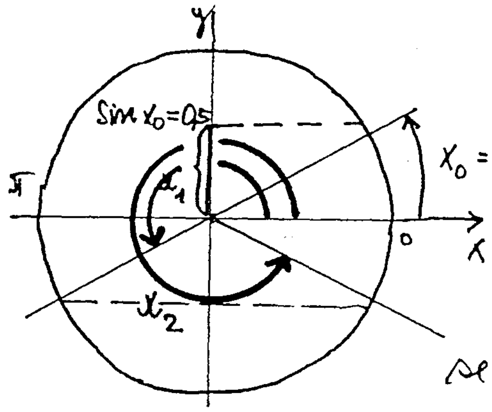
Poznámka: Řešení goniometrických rovnic je možné zapsat

a) v úhlové míře,

b) v obloukové míře pomocí π.

Příklad 2: Řešte rovnici $\sin x = -0{,}5$ s neznámou $x \in R$. Výsledek vyjádřete v obloukové míře.

Řešení: $\sin x_0 = |\sin x| = 0{,}5 \Rightarrow x_0 = \frac{\pi}{6}$



Pomocí obrázku určíme:

$x_1 = x_0 + \pi = \frac{\pi}{6} + \pi = \frac{7}{6}\pi$

$x_2 = 2\pi - x_0 = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11}{6}\pi$

Množina všech kořenů rovnice $\sin x = -0{,}5$ se skládá ze všech čísel, která lze vyjádřit právě jedním z tvarů $x_1 + 2k\pi$, $x_2 + 2k\pi$, čili

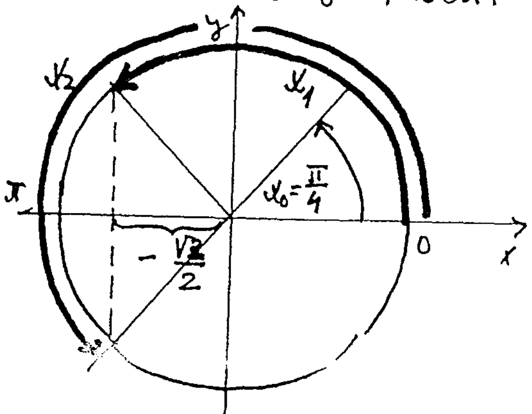
znak sjednocení množin

$\left.\begin{array}{l}\frac{7}{6}\pi + 2k\pi \\ \frac{11}{6}\pi + 2k\pi\end{array}\right\}$ to zapíšeme: $K = \bigcup_{k \in Z} \left\{\frac{7}{6}\pi + 2k\pi ; \frac{11}{6}\pi + 2k\pi\right\}$

označení množiny všech kořenů | k je celé číslo | kořen x_1 | kořen x_2

Příklad 3: Řešte rovnici $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Řešení: $\cos x_0 = |\cos x| = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x_0 = \frac{\pi}{4}$ (45°)



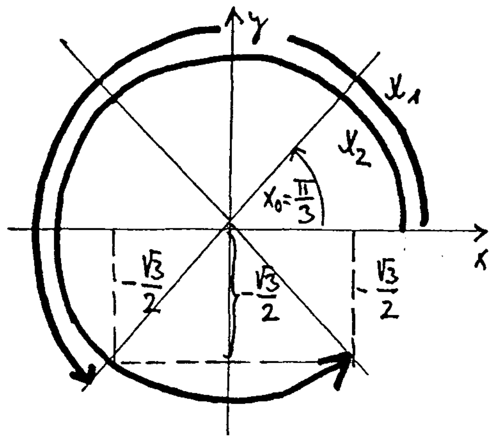
$x_1 = \pi - x_0 = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3}{4}\pi$

$x_2 = \pi + x_0 = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5}{4}\pi$

$K = \bigcup_{k \in Z} \left\{\frac{3}{4}\pi + 2k\pi ; \frac{5}{4}\pi + 2k\pi\right\}$

Příklad 4: $\sin x = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$

Řešení: $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ... $\sin x_0 = |\sin x| = \left|-\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x_0 = \frac{\pi}{3}$ (60°)



$x_1 = \pi + x_0 = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4}{3}\pi$

$x_2 = 2\pi - x_0 = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5}{3}\pi$

$$K = \bigcup_{k \in Z} \left\{ \frac{4}{3}\pi + 2k\pi ; \frac{5}{3}\pi + 2k\pi \right\}$$

Příklad 5: Řešte rovnici $2\sin(\underline{3x+\pi}) = -1$

Řešení: Provedeme substituci $y = 3x+\pi$ (*)

$2\sin(3x+\pi) = -1$

$2\sin y = -1$

$\boxed{\sin y = -0{,}5}$ Tuto rovnici jsme již řešili v př. 2 na str. 2, proto použijeme výsledek.

$y_1 = \frac{7}{6}\pi + 2k\pi$, $y_2 = \frac{11}{6}\pi + 2k\pi$ a dáme to do (*)

$3x_1 + \pi = y_1$	$3x_2 + \pi = y_2$
$3x_1 + \pi = \frac{7}{6}\pi + 2k\pi$	$3x_2 + \pi = \frac{11}{6}\pi + 2k\pi$
$3x_1 = \frac{7}{6}\pi - \pi + 2k\pi$	$3x_2 = \frac{11}{6}\pi - \pi + 2k\pi$
$3x_1 = \frac{1}{6}\pi + 2k\pi \quad / \cdot \frac{1}{3}$	$3x_2 = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi \quad / \cdot \frac{1}{3}$
$\boxed{x_1 = \frac{1}{18}\pi + \frac{2}{3}k\pi}$	$\boxed{x_2 = \frac{5}{18}\pi + \frac{2}{3}k\pi}$

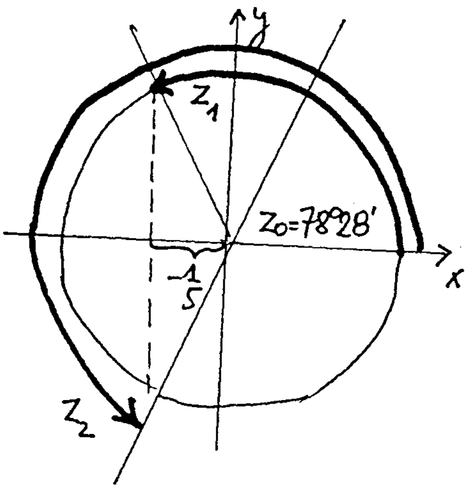
$$K = \bigcup_{k \in Z} \left\{ \frac{1}{18}\pi + \frac{2}{3}k\pi ; \frac{5}{18}\pi + \frac{2}{3}k\pi \right\}$$

Příklad 6: Řešte rovnici $\cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{5}$.

Řešení: Substituce: $z = 3x - \frac{\pi}{6}$ (*)

$\cos z = -\frac{1}{5}$, máme: $z_0 = |\cos z| = |-\frac{1}{5}| = \frac{1}{5} \Rightarrow z_0 \doteq 78°28'$

Prohlédněme si následující obrázek, který znázorňuje řešení rovnice $\cos z = -\frac{1}{5}$.



$z_1 = 180° - 78°28' = 101°32' + k\cdot 360°$

$z_2 = 180° + 78°28' = 258°28' + k\cdot 360°$

Hodnoty z_1, z_2 dosadíme zpět do (*) $(\frac{\pi}{6} = 30°)$

$101°32' + k\cdot 360° = 3x_1 - 30°$

$3x_1 = 101°32' + 30° + k\cdot 360°$

$3x_1 = 131°32' + k\cdot 360° \quad |:3$

$\boxed{x_1 \doteq 43°50'40'' + k\cdot 120°}$

$258°28' + k\cdot 360° = 3x_2 - 30°$

$3x_2 = 288°28' + k\cdot 360° \quad |:3 \Rightarrow \boxed{x_2 \doteq 96°9'20'' + k\cdot 120°}$

Úlohu lze opět zapsat: $K = \bigcup_{k\in Z} \{43°50'40'' + k\cdot 120°; 96°9'20'' + k\cdot 120°\}$

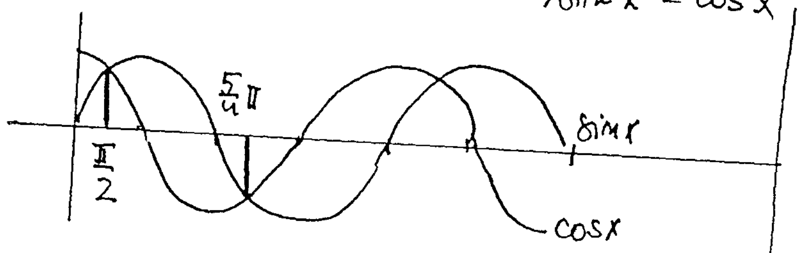
Příklad 7: Řešte rovnici $\cos x\,(\cos x + \sin x) = 0$

Řešení: $\cos x(\cos x + \sin x) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{\cos x = 0}_{\text{I.}} \vee \underbrace{\cos x + \sin x = 0}_{\text{II.}}$

Je-li $\cos x = 0$, pak $\boxed{x_1 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi}$

Je-li $\cos x + \sin x = 0$, pak $\sin x = -\cos$ [použijeme vzorec $-\cos x = \cos x$]

$\sin x = \cos x$



Rovnost hodnot $\sin x$ a $\cos x$ platí v $\langle 0; 2\pi)$ pro $\frac{\pi}{2}$ a $\frac{5}{4}\pi$.

$K = \bigcup_{k\in Z} \{\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{4} + 2k\pi; \frac{5}{4}\pi + 2k\pi\}$ $\Rightarrow$ $\boxed{x_2 = \frac{\pi}{4}\pi + 2k\pi}$ $\boxed{x_3 = \frac{5}{4}\pi + 2k\pi}$

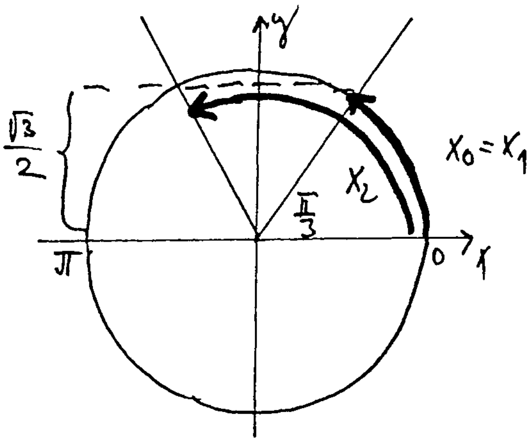
Příklad 8: Řešte rovnici $2\cdot\sin^2 x = \sqrt{3}\cdot\sin x$

Řešení: $2\cdot\sin^2 x = \sqrt{3}\cdot\sin x \quad |: \sin x$ s podmínkou, že $\sin x \neq 0$

$2\cdot\sin x = \sqrt{3}$

$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x_0 = \frac{\pi}{3}$ (60°) (neboť $x_0 = |\sin x| = |\frac{\sqrt{3}}{2}| = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow x_0 = 60°$, což je zároveň x_1



$x_1 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ $\qquad$ $x_2 = 2\pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi$

$x_2 = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi$

$$K = \bigcup_{k \in Z} \left\{ \frac{1}{3}\pi + 2k\pi ; \frac{2}{3}\pi + 2k\pi \right\}$$

Příklad 9: Řešte rovnici $\sin x = \cos 2x \cdot \sin x$.

Řešení: $\sin x = \cos 2x \cdot \sin x$

$\sin x - \cos 2x \cdot \sin x = 0$ $\quad$ vytkni

$\sin x \cdot (1 - \cos 2x) = 0$

$\sin x\,(1 - \cos 2x) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{\sin x = 0}$ $\vee$ $\underbrace{1 - \cos 2x = 0}$

$\boxed{x_1 = k\pi}$ $\vee$ $\cos 2x = 1$, sub. $2x = t$

$\cos t = 1 \ldots t_1 = 0 + 2k\pi$

$t_2 = 2\pi + 2k\pi$

$K = \bigcup_{k \in Z} \{ k\pi ; \pi + k\pi \}$

$2x_2 = t_1 \qquad 2x_3 = t_2$

$2x_2 = 0 + 2k\pi \qquad 2x_3 = 2\pi + 2k\pi \qquad |:2$

$\boxed{x_2 = k\pi} \qquad \boxed{x_3 = \pi + k\pi}$

Příklad 10: Řešte rovnici $2 \cdot \cos^2 x - 7 \cdot \cos x + 3 = 0$

Řešení: Substituce: $\cos x = t$

$2t^2 - 7t + 3 = 0$

$t_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 24}}{4} = \frac{7 \pm 5}{4} = \begin{cases} t_1 = 3 \\ t_2 = 0{,}5 \end{cases}$

$\cos x_1 = t_1 \qquad \cos x_2 = t_2$

$\cos x_1 = 3 \qquad \cos x_2 = 0{,}5 \begin{cases} x_2 = \frac{\pi}{3} \\ x_3 = \frac{5}{3}\pi \end{cases}$

$x_1 = \emptyset$

$$K = \bigcup_{k \in Z} \left\{ \frac{\pi}{3} + 2k\pi ; \frac{5}{3}\pi + 2k\pi \right\}$$

Příklad 11: Řešte rovnici

$$\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Řešení: Použijeme vzorce: $\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y$

$\cos(x-y)=\cos x\cos y+\sin x\sin y$

$$\cos x\cdot\cos\frac{\pi}{6}-\sin x\cdot\sin\frac{\pi}{6}-\left(\cos x\cos\frac{\pi}{6}+\sin x\cdot\sin\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cancel{\cos x\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}-\sin x\cdot\frac{1}{2}-\left(\cancel{\cos x\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}-\sin x\cdot\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$-2\cdot\sin x\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$-\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}\quad|\cdot(-1)$$

$$\sin x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x_1=\frac{4}{3}\pi\ ,\quad x_2=\frac{5}{3}\pi$$

$$K=\bigcup_{k\in Z}\left\{\frac{4}{3}\pi+2k\pi;\ \frac{5}{3}\pi+2k\pi\right\}$$

ZMĚNA – též tg x a cotg x

Příklad 12: Řešte rovnici

$$2\,\mathrm{tg}\,x-\frac{1}{\cos^2 x}=0$$

Řešení:

$$2\cdot\frac{\sin x}{\cos x}-\frac{1}{\cos^2 x}=0$$

$$\frac{2\sin x}{\cos x}-\frac{1}{\cos^2 x}=0$$

$$\frac{2\sin x\cos x-1}{\cos^2 x}=0\quad|\cdot\cos^2 x \text{ s podmínkou } \cos x\neq 0$$

Použijeme vzorec: $2\sin x\cos x=\sin 2x$

$\sin 2x-1=0$, substituce $2x=t$

$\sin t=1$

$t=\frac{\pi}{2}+2k\pi$

$2x=\frac{\pi}{2}+2k\pi\quad|\cdot\frac{1}{2}$

$\boxed{x=\frac{\pi}{4}+k\pi}$ nebo $K=\bigcup_{k\in Z}\left\{\frac{\pi}{4}+k\pi\right\}$

Příklad 13: Řešte rovnici:

$$\frac{1}{\sin^2 x} + \cot g\, x - 1 = 0$$

Řešení:

$$\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{\cos x}{\sin x} - 1 = 0$$

$$\frac{1 + \sin x \cos x - \sin^2 x}{\sin^2 x} = 0 \quad | \cdot \sin^2 x \quad \text{s podm. } \sin x \neq 0$$

$$1 + \sin x \cos x - \sin^2 x = 0$$

vzorec

VZOREC: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$\Rightarrow \cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

$$\cos^2 x + \sin x \cos x = 0$$

$$\cos x (\cos x + \sin x) = 0$$

$$\cos x (\cos x + \sin x) = 0 \iff \underbrace{\cos x = 0}_{} \lor \underbrace{\cos x + \sin x = 0}_{}$$

$$\boxed{x_1 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi}$$

$\cos x = -\sin x \quad | \cdot (-1)$

VZOREC: $-\cos x = \cos x$

$-\cos x = \sin x$

$\cos x = \sin x$

$$\boxed{x_2 = \frac{\pi}{4} + 2k\pi} \quad \boxed{x_3 = \frac{5}{4}\pi + 2k\pi}$$

$$K = \bigcup_{k \in Z} \left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{5}{4}\pi + 2k\pi \right\}$$

Příklad 14: Řešte rovnici

$$tg^2 x = -tg\, x$$

Řešení:

$$tg^2 x + tg\, x = 0$$

$$tg\, x\, (tg\, x + 1) = 0 \iff tg\, x = 0 \lor tg\, x + 1 = 0$$

$x_1 = \pi + k\pi$

$tg\, x = -1$

$x_2 = \frac{3}{4}\pi + k\pi \quad x_3 = \frac{7}{4}\pi + k\pi$

Zkouška pro x_1: $L = (tg\pi)^2 = 0^2 = 0$

$P = -(tg\pi) = -0 = 0$ $\Big\}\ L = P$

pro x_2: $L = \left(\mathrm{tg}\,\frac{7}{4}\pi\right)^2 = (-1)^2 = 1$

$P = -\left(\mathrm{tg}\,\frac{7}{4}\pi\right) = -(-1) = 1$ $\Big\}$ $L = P$

pro x_3: $L = \left(\mathrm{tg}\,\frac{3}{4}\pi\right)^2 = (-1)^2 = 1$

$P = -\left(\mathrm{tg}\,\frac{3}{4}\pi\right) = -(-1)^2 = 1$ $\Big\}$ $L = P$

$$K = \bigcup_{k \in Z} \left\{ \pi + k\pi ;\ \frac{3}{4}\pi + k\pi ;\ \frac{7}{4}\pi + k\pi \right\}$$

Příklad 15: Řešte rovnici: $\mathrm{cotg}^2 x = \sqrt{3} \cdot \mathrm{cotg}\, x$

Řešení: $\mathrm{cotg}^2 x - \sqrt{3}\,\mathrm{cotg}\, x = 0$

$\mathrm{cotg}\, x (\mathrm{cotg}\, x - \sqrt{3}) = 0 \iff \mathrm{cotg}\, x = 0 \ \vee\ \underbrace{\mathrm{cotg}\, x - \sqrt{3} = 0}$

$\boxed{x_1 = \frac{\pi}{2} + k\pi}$

$\boxed{x_2 = \frac{3}{2}\pi + k\pi}$

$\mathrm{cotg}\, x = \sqrt{3}$

$\boxed{x_3 = \frac{\pi}{6} + k\pi}$ $\boxed{x_4 = \frac{7}{6}\pi + k\pi}$

$$K = \bigcup_{k \in Z} \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi ,\ \frac{3}{2}\pi + k\pi ,\ \frac{\pi}{6} + k\pi ,\ \frac{7}{6}\pi + k\pi \right\}$$

Příklad 16: Řešte rovnici $\cos\left(4x + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Řešení: Sub.: $4x + \frac{\pi}{2} = t$ ...

$\cos t = \frac{\sqrt{3}}{2}$ → $t_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $t_2 = \frac{11}{6}\pi + 2k\pi$

Zpět: $4x_1 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$

$4x_1 = \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2}\right) + 2k\pi$

$4x_1 = -\frac{1}{3}\pi + 2k\pi \quad |:4$

$\boxed{x_1 = -\frac{1}{12}\pi + \frac{1}{2}k\pi}$

$4x_2 + \frac{\pi}{2} = \frac{11}{6}\pi + 2k\pi$

$4x_2 = \left(\frac{11}{6}\pi - \frac{\pi}{2}\right) + 2k\pi$

$4x_2 = \frac{4}{3}\pi + 2k\pi \quad |:4$

$\boxed{x_2 = \frac{1}{3}\pi + \frac{1}{2}\pi}$

$$K = \bigcup_{k \in Z} \left\{ -\frac{1}{12}\pi + \frac{1}{2}k\pi ,\ \frac{1}{3}\pi + \frac{1}{2}\pi \right\}$$

Příklad 17: Řešte rovnici $\mathrm{tg}^2 x + 2\mathrm{tg}\, x - 3 = 0$

Řešení: Sub.: $\mathrm{tg}\, x = t$

$t^2 + 2t - 3 = 0$

$t_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2}$ → $t_1 = 1$, $t_2 = -3$

2 príp: $tg\, x_1 = 1$ $\qquad$ $tg\, x_2 = -3$ na kalkulačke

$$\boxed{x_1 = \frac{\pi}{4} + k\pi}$$

Shift tan $(-3) = -71°33°54'$

$$\boxed{x_1 = 45° + k \cdot 180°}$$

$$x_2 = 360° - 71°33'54' + k \cdot 180°$$

$$\boxed{x_2 \doteq 288°26' + k \cdot 180°}$$

$$K = \bigcup_{k \in Z} \{45° + k \cdot 180°,\ 288°26' + k \cdot 180°\}$$