2b) KOSINOVÁ VĚTA A JEJÍ UŽITÍ V PRAXI

Kosinová věta: Pro každý $\triangle ABC$ s velikostmi jeho vnitřních úhlů α, β, γ a s délkami jeho stran a, b, c platí:

$$\boxed{\begin{aligned} a^2 &= b^2+c^2-2bc\cos\alpha \\ b^2 &= a^2+c^2-2ac\cos\beta \\ c^2 &= a^2+b^2-2ab\cos\gamma \end{aligned}} \qquad \begin{aligned} &1 \\ &2 \\ &3 \end{aligned}$$

Příklad 1: Vypočítejte délky všech stran a velikosti všech vnitřních úhlů $\triangle ABC$, je-li dáno:
$a = 51{,}32$ dm, $c = 34{,}76$ dm, $\beta = 126°12'$.

Řešení: Musíme vypočítat b, γ, α.

Výpočet délky strany b (podle 2)

$b^2 = a^2+c^2-2ac\cos\beta$

$b^2 = 51{,}32^2 + 34{,}76^2 - 2 \cdot 51{,}32 \cdot 34{,}76 \cdot \cos 126°12'$

$b^2 \doteq 5949{,}143$

$\boxed{b \doteq 77{,}13 \text{ (dm)}}$

Výpočet velikosti úhlu γ (pomocí sinové věty)

$$\frac{\sin\gamma}{\sin\beta} = \frac{c}{b}$$

$\sin\gamma = \frac{c}{b}\cdot\sin\beta = \frac{34{,}76}{77{,}13}\cdot\sin 126°12' \doteq 0{,}363670951 \Longrightarrow \boxed{\gamma \doteq 21°20'}$

Výpočet α: $\alpha = 180° - 126°12' - 21°20' = 32°28$ $\quad \boxed{\alpha = 32°28'}$

Příklad 2: Dáno v $\triangle ABC$: $a = 5{,}5$ cm, $b = 5{,}2$ cm, $\gamma = 48°30'$.
Vypočítejte: c, β, α, obvod $\triangle$

Řešení: c vypočítáme pomocí 3

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$

$c^2 = 5{,}5^2 + 5{,}2^2 - 2 \cdot 5{,}5 \cdot 5{,}2 \cdot \cos 48°30'$

$c^2 \doteq 19{,}388136$

$\boxed{c \doteq 4{,}4 \text{ (cm)}}$

β určíme pomocí sinové věty

$$\frac{\sin\beta}{\sin\gamma} = \frac{b}{c}$$

$$\sin\beta = \frac{b}{c}\cdot\sin\gamma = \frac{5{,}2}{4{,}4}\cdot\sin 48°30' \doteq 0{,}885129\ldots \qquad \boxed{\beta \doteq 62°16'}$$

$$\alpha:\ \alpha = 180° - 62°16' - 48°30' = 69°14' \ \ldots \qquad \boxed{\alpha = 69°14'}$$

$$O_\Delta = a+b+c = 5{,}5+5{,}2+4{,}4 = 15{,}1 \ \ldots \qquad \boxed{O_\Delta = 15{,}1\,(\mathrm{cm})}$$

Zopakujme si vzorce pro výpočet obsahu ΔABC:

$S=\frac{1}{2}ab\cdot\sin\gamma$	$S=\frac{1}{2}bc\cdot\sin\alpha$	$S=\frac{1}{2}ac\cdot\sin\beta$

Příklad 3: Určete $c, \alpha, \beta, S_\Delta$ ΔABC, je-li $a = 12{,}4\,\mathrm{cm}$, $b = 16{,}8\,\mathrm{cm}$, $\gamma = 60°$.

Řešení:

$$c^2 = a^2+b^2-2ab\cos\gamma$$

$$c^2 = 12{,}4^2+16{,}8^2-2\cdot 12{,}4\cdot 16{,}8\cdot\cos 60°$$

$$\boxed{c = 15{,}1\ (\mathrm{cm})}$$

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = \frac{a}{c}$$

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}\cdot\sin\gamma$$

$$\sin\alpha = \frac{12{,}4}{15{,}1}\cdot\sin 60° \Rightarrow$$

$$\boxed{\alpha \doteq 45°20'}$$

$$\beta = 180° - (60° + 45°20') \rightarrow \boxed{\beta \doteq 74°40'}$$

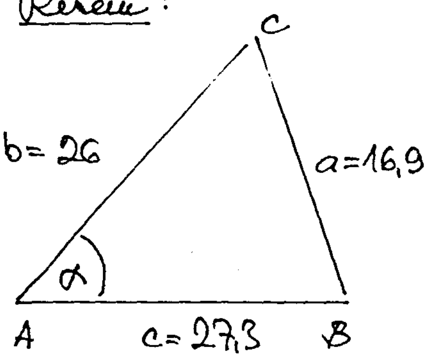
$$S_\Delta = \frac{1}{2}ab\cdot\sin\gamma$$

$$S_\Delta = \frac{1}{2}\cdot 12{,}4\cdot 16{,}8\cdot\sin 60° \rightarrow \boxed{S_\Delta \doteq 90{,}2\,(\mathrm{cm}^2)}$$

ZMĚNA TYPU ÚLOHY

Příklad 4: V ΔABC je dáno: $a = 16{,}9\,\mathrm{cm}$, $b = 26\,\mathrm{cm}$, $c = 27{,}3\,\mathrm{cm}$. Určete α, β, γ.

Řešení:



a) Nejdříve určíme α (nebo β, nebo γ, na tom nezáleží).

$$a^2 = b^2+c^2-2bc\cos\alpha$$

$$2bc\cos\alpha = b^2+c^2-a^2$$

$$\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{26^2+27{,}3^2-16{,}9^2}{2\cdot 26\cdot 27{,}3} \doteq 0{,}8$$

$$\cos\alpha \doteq 0{,}8 \Rightarrow \boxed{\alpha \doteq 36°52'}$$

Obdobně: $\cos\beta = \dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = \dfrac{16{,}9^2+27{,}3^2-26^2}{2.16{,}9.27{,}3} \doteq 0{,}384615\ldots$

$\Rightarrow \boxed{\beta \doteq 67°23'}$

Poznámka: Velikost úhlu β bylo možné určit též pomocí sinové věty. Tu nyní využijeme.

$\dfrac{\sin\gamma}{\sin\alpha} = \dfrac{c}{a} \quad \ldots\ldots \quad \sin\gamma = \dfrac{c}{a}\cdot\sin\alpha$

$\sin\gamma = \dfrac{27{,}3}{16{,}9}\cdot\sin 36°52'11{,}63''$ (kvůli přesnosti)

$\sin\gamma = 0{,}969\,230758 \Rightarrow \boxed{\gamma \doteq 75°45'}$

Zkouška: $\alpha+\beta+\gamma = 36°52' + 67°23' + 75°45'' = 180°$

Příklad 5: V ΔABC je dáno: $a = 13$ cm, $b = 14$ cm, $c = 15$ cm. Vypočítejte $\alpha, \beta, \gamma, S_\Delta$

Řešení: $a^2 = b^2+c^2-2bc\cos\alpha$

$2bc\cos\alpha = b^2+c^2-a^2$

$\cos\alpha = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \dfrac{14^2+15^2-13^2}{2.14.15} = 0{,}6 \Rightarrow \boxed{\alpha \doteq 53°08'}$

Obdobně: $\cos\beta = \dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = \dfrac{13^2+15^2-14^2}{2.13.15} \doteq 0{,}507692$

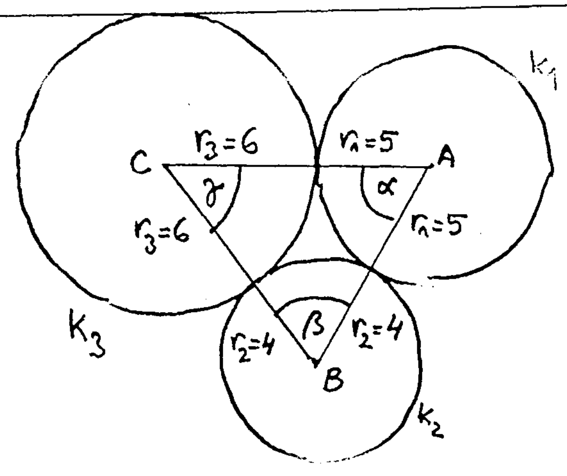
$\Rightarrow \boxed{\beta \doteq 59°29'}$

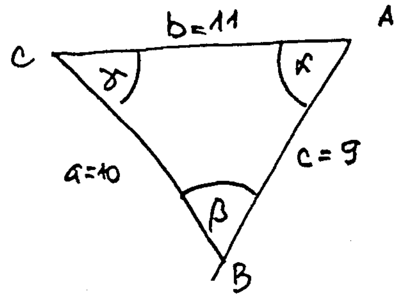
$\cos\gamma = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \dfrac{13^2+14^2-15^2}{2.13.14} \Rightarrow \boxed{\gamma = 67°23'}$

Zkouška: $\alpha+\beta+\gamma = 53°08' + 59°29' + 67°23' = 180°$

$S_\Delta = \frac{1}{2}ab\cdot\sin\gamma = \frac{1}{2}\cdot 13\cdot 14\cdot\sin 67°23' = 84 \quad \boxed{S_\Delta \doteq 84\ (cm^2)}$

Příklad 6: Tři kružnice s poloměry $r_1 = 5$ cm, $r_2 = 4$ cm, $r_3 = 6$ cm se vzájemně dotýkají vně. Vypočítejte velikosti úhlů, které svírají jejich středné. Řešení provedeme pomocí dvou obrázků.





$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{11^2+9^2-10^2}{2.11.9} = 0{,}\overline{51}$$

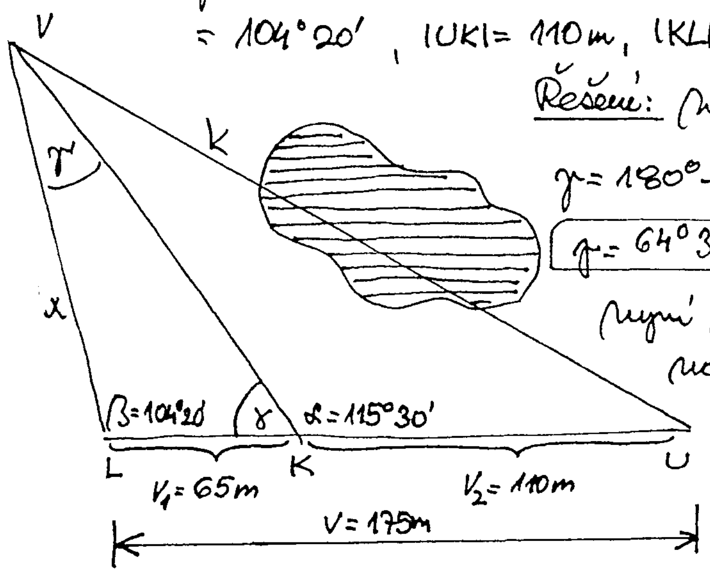
$$\Rightarrow \boxed{\alpha \doteq 59°}$$

Obdobně: $\cos\beta = \dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = \dfrac{10^2+9^2-11^2}{2.10.9} \doteq 0{,}\overline{30} \Rightarrow \boxed{\beta \doteq 70°31'}$

$$\cos\gamma = \frac{a^2+b^2-c^2}{2.a.b} = \frac{10^2+11^2-9^2}{2.10.11} \doteq 0{,}\overline{63} \Rightarrow \boxed{\gamma \doteq 50°29'}$$

Zkouška: $59° + 70°31' + 50°29' = 180°$

Příklad 7: Určete vzdálenost míst U, V, která odděluje rybník, víte-li, že k tomuto účelu byla vytyčena od U přímá trasa ke stanovišťům K, L. Platí: $\alpha = 115°30'$, $\beta = 104°20'$, $|UK| = 110\,m$, $|KL| = 65\,m$



Řešení: nejdříve určíme γ a γ'

$\gamma = 180° - 115°30'$ | $\gamma' = 180° - (104°20' + 64°30')$

$\boxed{\gamma = 64°30'}$ | $\boxed{\gamma' = 11°10'}$

Nyní určíme $|VL| = x$ pomocí sinové věty.

$$\frac{x}{v_1} = \frac{\sin\gamma}{\sin\gamma'}$$

$$x = \frac{\sin\gamma}{\sin\gamma'} \cdot v_1 = \frac{\sin 64°30'}{\sin 11°10'} \cdot 65$$

$\boxed{x \doteq 302{,}9378617}$ dej do paměti kalkul.

Pro △UVL platí podle kosinové věty ($|UV| = k$)

$$k^2 = x^2 + v^2 - 2xv \cdot \cos\beta$$

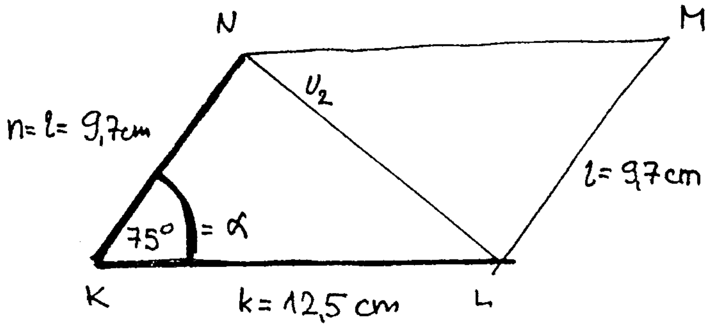
$$k^2 = 302{,}9..^2 + 175^2 - 2 \cdot 302{,}9.. \cdot 175 \cdot \cos 104°20'$$

$$k^2 = 148644{,}9906 \Rightarrow k = 385{,}545\ (m) \doteq 386\ (m)$$

Vzdálenost míst U, V je asi 386 m.

Příklad 8: Vypočítejte délky úhlopříček rovnoběžníku KLMN, je-li $|KL| = 12{,}5\,cm$, $|LM| = 9{,}7\,cm$, $\underbrace{|\measuredangle LKN| = 75^\circ}_{\alpha}$

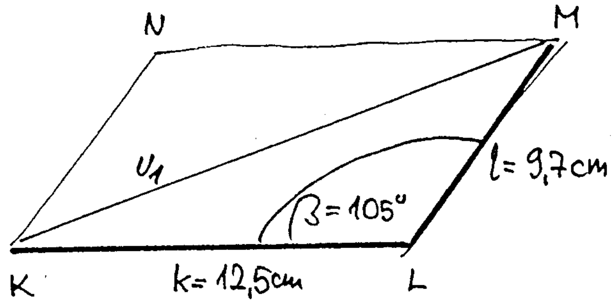
Řešení: viz pomocný obrázek.



$$u_2 = n^2 + k^2 - 2nk\cos\alpha$$

$$u_2 = \sqrt{9{,}7^2 + 12{,}5^2 - 2\cdot 9{,}7\cdot 12{,}5\cdot\cos 75^\circ}$$

$$\boxed{u_2 \doteq 13{,}7\ (cm)}$$



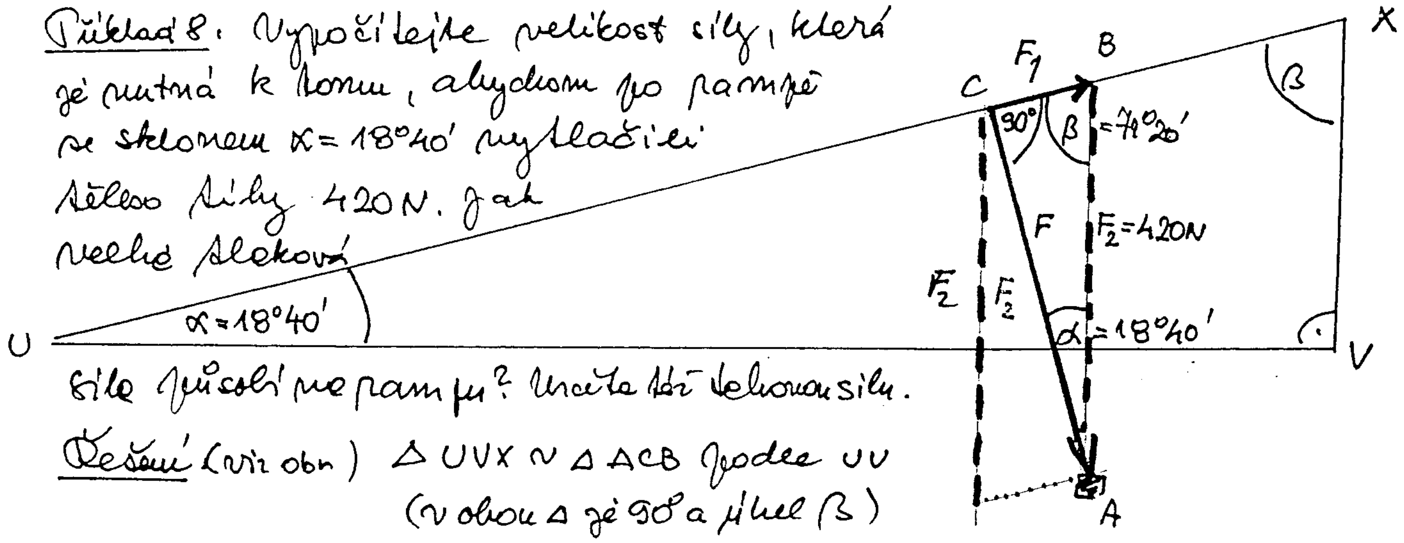
$$\beta = 180^\circ - 75^\circ = 105^\circ$$

$$u_1^2 = k^2 + l^2 - 2kl\cos\beta$$

$$u_1 = \sqrt{12{,}5^2 + 9{,}7^2 - 2\cdot 12{,}5\cdot 9{,}7\cdot\cos 105^\circ}$$

$$\boxed{u_1 \doteq 17{,}7\ (cm)}$$

Příklad 8: Vypočítejte velikost síly, která je nutná k tomu, abychom po rampě se sklonem $\alpha = 18^\circ 40'$ vytlačili těleso tíhy 420 N. Jak velká tlaková síla působí na rampu? Určete též tahovou sílu.



Řešení (viz obr.) $\triangle UVX \sim \triangle ACB$ podle uu (v obou $\triangle$ je 90° a úhel β)

Z této podobnosti plyne: $|\measuredangle CAB| = \alpha = 18^\circ 40'$

$$\beta = 180^\circ - (90^\circ + 18^\circ 40') = 71^\circ 20'$$

V $\triangle ABC$ podle sinové věty platí: $\cancel{b}\ F_2$

$$\frac{F}{F_2} = \frac{\sin\beta}{\sin 90^\circ} \rightarrow F = \frac{\sin 71^\circ 20'}{\sin 90^\circ}\cdot 420 \doteq 398\,N$$

Na rampu působí síla 398 N.

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{\sin\alpha}{\sin 90^\circ} \rightarrow F_1 = \frac{\sin 18^\circ 40'}{\sin 90^\circ}\cdot 420 \doteq 134\ (N)$$

Tahová síla je 134 N.