Příklady na bin. větu řešené v r. 2008 ze sbírky Ivana Bušeka

Př. 542/169 V binomickém rozvoji výrazu $\left(\frac{x}{4} - \frac{\sqrt{2}}{x^2}\right)^{15}$ zjistěte

a) 13. člen rozvoje b) člen rozvoje neobsahující x.

Řešení a)

$$\Big(\underbrace{\frac{x}{4}}_{a} - \underbrace{\frac{\sqrt{2}}{x^2}}_{b}\Big)^{\overset{n}{15}}$$

Použijeme vzorce $a_k = \binom{n}{k-1} \cdot a^{n-k+1} \cdot b^{k-1}$; každý lichý člen je ⊕ ↳ jde o vzorec pro k-tý člen, .. a_k

Pro $n = 15$, $k = 13$ platí:

$$a_{13} = \binom{15}{13-1} \cdot \left(\frac{x}{4}\right)^{15-13+1} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{x^2}\right)^{13-1} = \binom{15}{12} \cdot \left(\frac{x}{4}\right)^{3} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{x^2}\right)^{12} = 455 \cdot \frac{x^3}{64} \cdot \frac{2^{\frac{12}{2}}}{x^{24}} =$$

$$= 455 \cdot \frac{x^3}{64} \cdot \frac{2^6}{x^{24}} = 455 \cdot \frac{1}{\cancel{64}} \cdot \frac{\cancel{64}}{x^{21}} = \boxed{455 \cdot x^{-21}} = a_{13}$$

Řešení b) Ze předpokladu, že hledaný k-tý člen neobsahuje x, můžeme psát:

$$a_k = \binom{15}{k-1} \cdot \left(\frac{x}{4}\right)^{15-k+1} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{x^2}\right)^{k-1}$$

$$a_k = \binom{15}{k-1} \cdot \left(\frac{x}{4}\right)^{16-k} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{x^2}\right)^{k-1}$$

$$a_k = \binom{15}{k-1} \cdot \left(x \cdot \frac{1}{4}\right)^{16-k} \cdot \left(-\sqrt{2} \cdot \frac{1}{x^2}\right)^{k-1}$$ ... umocníme jako součiny

$$a_k = \binom{15}{k-1} \cdot \underline{x^{16-k}} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{16-k} \cdot \left(-\sqrt{2}\right)^{k-1} \cdot \underline{\left(\frac{1}{x^2}\right)^{k-1}} \quad (*)$$

pouze zde je x

Proto musí platit, aby byla podmínka splněna:

$$x^{16-k} \cdot \left(\frac{1}{x^2}\right)^{k-1} = x^0$$

$$x^{16-k} \cdot \frac{1^{k-1}}{x^{2\cdot(k-1)}} = x^0$$

$$x^{16-k} \cdot \frac{1}{x^{2k-2}} = x^0$$

$$\frac{x^{16-k}}{x^{2k-2}} = x^0$$

$$x^{16-k-2k+2} = x^0$$

$$x^{18-3k} = x^0$$

$$18 - 3k = 0$$

$$\boxed{k = 6}$$

→ nepřihlížíme k exponentům čísel, které v součinu (*) mají hodnotu 1

Požadavek úlohy splňuje 6. člen bin. rozvoje

Zkouška: pro $n=15, k=6$:

$$a_6=\binom{15}{6-1}\cdot\left(\frac{x}{4}\right)^{15-6+1}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{x^2}\right)^{6-1}$$

$$a_6=\binom{15}{5}\cdot\left(\frac{x}{4}\right)^{10}\cdot\frac{(\sqrt{2})^5}{x^{10}}=\underbrace{\binom{15}{5}\cdot\frac{1}{4^{10}}\cdot\frac{(\sqrt{2})^5}{1}}_{\text{neobsahuje } x}$$

Př. 54.5/473

Při řešení tohoto příkladu využijeme:

$i=\sqrt{-1}, i^2=-1 \ldots i^3=-i \ldots$

$i^4=1 \ldots i^5=i \ldots i^6=-1 \ldots$

$\ldots i^7=-1 \ldots i^8=1 \ldots i^0=1$

Vypočítejte: $(\sqrt{2}-i)^5=\binom{5}{0}\cdot(\sqrt{2})^5\cdot i^0-\binom{5}{1}\cdot(\sqrt{2})^4\cdot i^1+\binom{5}{2}(\sqrt{2})^3\cdot i^2-$

$-\binom{5}{3}(\sqrt{2})^2\cdot i^3+\binom{5}{4}\cdot(\sqrt{2})^1\cdot i^4-\binom{5}{5}\cdot(\sqrt{2})^0\cdot i^5=$

$=1.(\sqrt{2})^5.1-\binom{5}{1}\cdot(\sqrt{2})^4.i+\binom{5}{2}\cdot(\sqrt{2})^3.i^2-\binom{5}{3}\cdot(\sqrt{2})^2.i^3+\binom{5}{4}\cdot\sqrt{2}.i^4-\binom{5}{5}1.i^5=$

$=(\sqrt{2})^5-5.2^2.i+10(\sqrt{2})^3.(-1)-10.2.(-i)+5\sqrt{2}.1-1.1.i=$

$=\sqrt{2^5}-20i-10.\sqrt{2^3}+20i+5.\sqrt{2}-i=4\sqrt{2}-10.2.\sqrt{2}+5\sqrt{2}-i=$

$=4\sqrt{2}-20\sqrt{2}+5.\sqrt{2}-i=\boxed{-11.\sqrt{2}-i}$

Př. 54.6/473 Třetí člen v binomickém rozvoji výrazu $\left(\sqrt[3]{\frac{\sqrt{7}}{2}}+m\right)^8=1$. Určete m.

$\left(\underbrace{\sqrt[3]{\frac{\sqrt{7}}{2}}}_{a}+\underbrace{m}_{b}\right)^8 \ldots n=8, k=3, a_3=1 \quad a_k=\binom{n}{k-1}\cdot a^{n-k+1}\cdot b^{k-1}$

$1=\binom{8}{2}\cdot\left(\sqrt[3]{\frac{\sqrt{7}}{2}}\right)^{8-3+1}\cdot m^{3-1}$

$1=28\cdot\left(\sqrt[3]{\frac{\sqrt{7}}{2}}\right)^6\cdot m^2$

$1=28\cdot\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2\cdot m^2$

$1=28\cdot\frac{7}{4}m^2$

$1=49m^2$

$m^2=\frac{1}{49} \Rightarrow \boxed{m_{1,2}=\pm\frac{1}{7}}$

Př. 54.7/473

Zjistěte, který člen binomického rozvoje výrazu $\left(2x^3-\frac{\sqrt{2}}{x^2}\right)^{10}$ neobsahuje proměnnou x.

Řešení na další stránce.

Jde o obdobu příkladu na str. 1 tohoto textu. Pro k-tý člen platí: $n = 10$; $k = ?$, $a_k = ?$ $\left(\underbrace{2x^3}_{a} - \underbrace{\frac{\sqrt{2}}{x^2}}_{b}\right)^{10}$

$$a_k = \binom{10}{k-1}\cdot\left(2x^3\right)^{10-k+1}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{x^2}\right)^{k-1}$$

$$a_k = \binom{10}{k-1}\cdot\left(2x^3\right)^{11-k}\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{x^2}\right)^{k-1}$$

$$a_k = \binom{10}{k-1}\cdot\left(2\cdot x^3\right)^{11-k}\cdot\left(-\sqrt{2}\cdot\frac{1}{x^2}\right)^{k-1}$$ Umocníme jako součiny.

$$a_k = \binom{10}{k-1}\cdot 2^{11-k}\cdot \underbrace{x^{33-3k}\cdot\left(-\sqrt{2}\right)^{k-1}\cdot\left(\frac{1}{x^{2k-2}}\right)}_{\text{obsahuje } x}$$

$$x^{33-3k}\cdot x^{-2k+2} = x^0$$

$$x^{35-5k} = x^0$$

$$35-5k=0$$
$$5k=35$$
$$k=7$$ $\boxed{\text{Jde o 7. člen.}}$

Př. 54.8/473 Určete třetí reálný člen binomického rozvoje výrazu $(x-i\sqrt{2})^{10}$, kde $x\in R-\{0\}$.

Poznámka: Musíme určit 3. člen, který nemá i.

$$(x-i\sqrt{2})^{10} = \underbrace{\binom{10}{0}\cdot x^{10}\cdot(-i\sqrt{2})^0}_{\text{1. reálný čl.}} - \underbrace{\binom{10}{1}\cdot x^9\cdot(-i\sqrt{2})^1}_{\text{imagin.}} + \underbrace{\binom{10}{2}\cdot x^8\cdot(-i\sqrt{2})^2}_{\text{2. reálný čl.}}$$

$$-\underbrace{\binom{10}{3}\cdot x^7\cdot(-i\sqrt{2})^3}_{\text{imagin.}} + \underbrace{\binom{10}{4}\cdot x^6\cdot(-i\sqrt{2})^4}_{\text{3. reálný čl.}}$$

3. reálný čl. $= 210\cdot x^6\cdot(-i)^4\cdot(\sqrt{2})^4 =$

$= 210x^6\cdot 1\cdot 4 = \boxed{840x^6}$

Př. 54.9/474 Vypočítejte $(1+i\sqrt{3})$

a) pomocí binomické věty b) pomocí Moivreovy věty

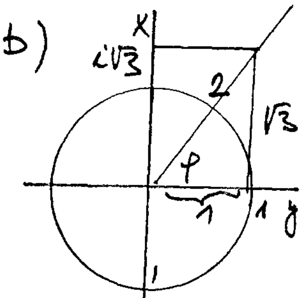
a) $(1+i\sqrt{3})^4 = \binom{4}{0}\cdot 1^4\cdot(i\sqrt{3})^0 + \binom{4}{1}\cdot 1^3\cdot(i\sqrt{3})^1 + \binom{4}{2}\cdot 1^2\cdot(i\sqrt{3})^2 +$

$+ \binom{4}{3}\cdot 1^1\cdot(i\sqrt{3})^3 + \binom{4}{4}\cdot 1^0\cdot(i\sqrt{3})^4 =$

$$= 1.1.1 + 4.1.i\sqrt{3} + 6.1.(-1).3 + 4.1.(-i)\sqrt{3^3} + 1.1.1.\sqrt{3^4} =$$

$$= 1 + 4i\sqrt{3} - 18 + 4\cdot(-i)\cdot 3\sqrt{3} + 1\cdot 9 = 1 + 4i\sqrt{3} - 18 - 12i\sqrt{3} + 9 = \boxed{-8-8i\sqrt{3}}$$

b)



$$|z| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$$

$$(1 + i\sqrt{3})^4 =$$

$$= \left[2\cdot\left(\cos\frac{\pi}{3} + i \sin\frac{\pi}{3}\right)\right]^4 =$$

$$\cos\varphi = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{3}$$

$$\sin\varphi \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{3}$$

$$= 2^4\cdot\left(\cos 4\cdot\frac{\pi}{3} + i \sin 4\cdot\frac{\pi}{3}\right) = 16\cdot\left(\cos\frac{4}{3}\pi + i \sin\frac{4}{3}\pi\right) =$$

$$= 16.\left[-\frac{1}{2} + i\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right] = \boxed{-8-8i\sqrt{3}}$$

54.10/474 Užitím binomické věty zjistěte, zda číslo $-1+i\sqrt{3}$ je kořenem rovnice $x^6=64$.

Řešení: $(-1+i\sqrt{3})^6$ ... Protože jeden ze členů je −, tak, každý sudý člen bude kladný.

$$(-1+i\sqrt{3})^6 = \binom{6}{0}\cdot(-1)^6\cdot(i\sqrt{3})^0 - \binom{6}{1}\cdot(-1)^5\cdot(i\sqrt{3})^1 + \binom{6}{2}\cdot(-1)^4\cdot(i\sqrt{3})^2 -$$

$$- \binom{6}{3}\cdot(-1)^3\cdot(i\sqrt{3})^3 + \binom{6}{4}\cdot(-1)^2\cdot(i\sqrt{3})^4 - \binom{6}{5}\cdot(-1)^1\cdot(i\sqrt{3})^5 + \binom{6}{6}\cdot(-1)^0\cdot(i\sqrt{3})^6 =$$

$$= 1.1.1 - 6.(-1).(i\sqrt{3}) + 15.1.(-1).3 - 20.(-1).(-i).\sqrt{3^3} + 15.1.1.\sqrt{3^4} -$$

$$- 6.(-1).i\sqrt{3^5} + 1.1.(-1)\sqrt{3^6} = 1 + 6i\sqrt{3} - 45 - 20i\sqrt{3^3} + 15\sqrt{3^4} +$$

$$+ 6i\sqrt{3^5} - \sqrt{3^6} = 1 + 6\sqrt{3}i - 45 - 20\sqrt{3^3}i + 15\sqrt{3^4} + 6\sqrt{3^5}i - \sqrt{3^6} =$$

$$= 1 + 6\sqrt{3}i - 45 - 20.3\sqrt{3}i + 15.9 + 6.9.\sqrt{3}i - 27 =$$

$$1 + 6\sqrt{3}i - 45 - 60\sqrt{3}i + 135 + 54\sqrt{3}i - 27 =$$

$$= i\sqrt{3}\cdot(6-60+54) + 64 = i\sqrt{3}.0 + 64 = 0 + 64 = 64$$

Číslo $(-1+i\sqrt{3})$ je řešením rovnice $x^6 = 64$.

54. 11a /474 Pro které reálné číslo x platí, že čtvrtý člen binomického rozvoje výrazu $(1+x)^6$ je čtyřikrát větší než 3. člen.

$(1+x)^6 =$

$$= \binom{6}{0} \cdot 1^6 \cdot x^0 + \binom{6}{1} \cdot 1^5 \cdot x^1 + \underbrace{\binom{6}{2} \cdot 1^4 \cdot x^2}_{3.\,\text{člen}} + \underbrace{\binom{6}{3} \cdot 1^3 \cdot x^3}_{4\,\text{člen}} + \dots$$

$$\binom{6}{2} \cdot 1^4 \cdot x^2 \cdot 4 = \binom{6}{3} \cdot 1^3 \cdot x^3$$

$$60x^2 = 20x^3$$

$$20x^3 = 60x^2 \quad | : 20x^2$$

$\boxed{x=3}$ Též $\boxed{x=0}$

Zkouška

$L = 60 \cdot 3^2 = 540$; $P = 20 \cdot 27 = 540$; $L = P$