5b) STEJNOLEHLOST

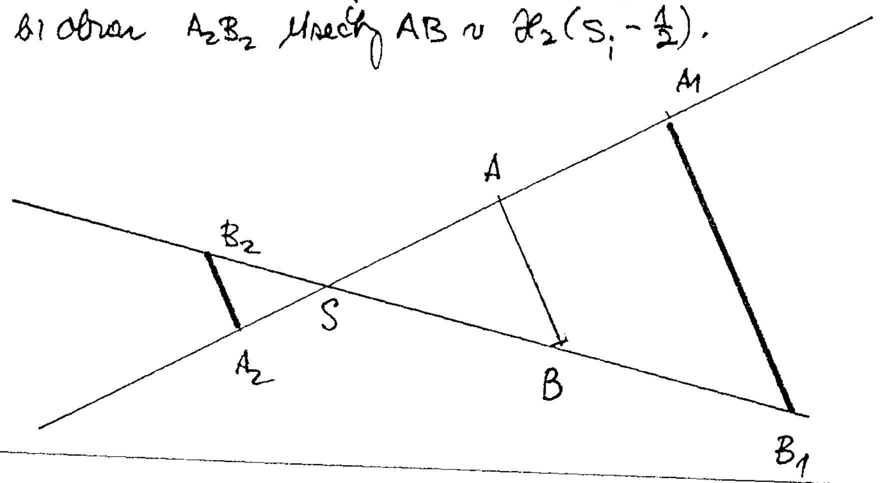
Definice 1: Zobrazení nazýváme podobné, právě když existuje takové číslo $\underline{k}$, že pro libovolné body A, B ($A \neq B$) platí $|A_1B_1| = k|AB|$. Číslo $\underline{k}$ se nazývá koeficient podobnosti.

Definice 2: Stejnolehlost (homotetie) je podobné zobrazení určené středem $\underline{S}$ a koeficientem $\underline{k}$ ($k \neq 0$), které přiřazuje:

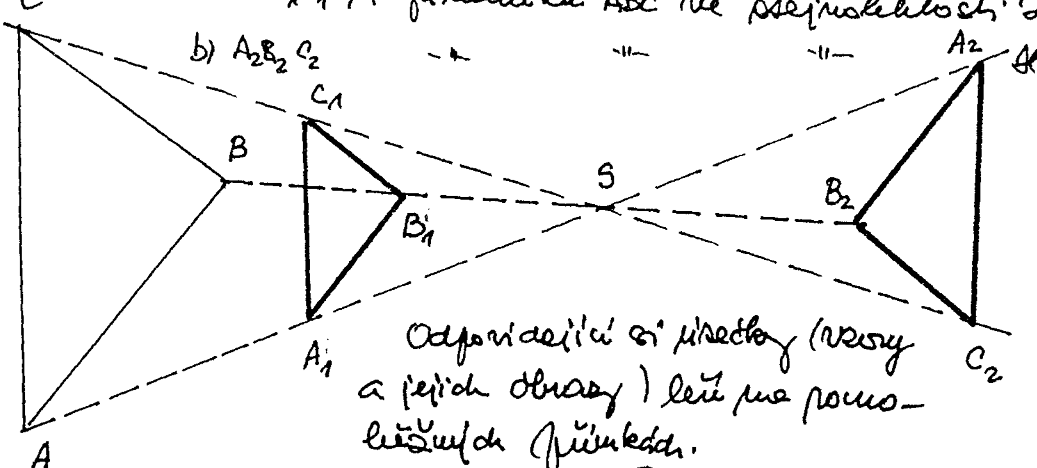
1. každému bodu X ($X \neq S$) bod X' tak, že $|SX'| = |k| \cdot |SX|$, přitom pro $k > 0$ leží bod X' na polopřímce SX, pro $k < 0$ je bod X' bodem polopřímky opačné k polopřímce SX;
2. bodu S bod $S' = S$.

Zapisujeme $\mathcal{H}(S; k)$; $\mathcal{H}(S; \varkappa)$ – $\varkappa$ – řecké písmeno kappa

Příklad 1: Je dána úsečka AB a bod S tak, že $S \in AB$. Sestrojte
a) obraz A_1B_1 úsečky AB v $\mathcal{H}_1(S; 2)$,
b) obraz A_2B_2 úsečky AB v $\mathcal{H}_2(S; -\frac{1}{2})$.

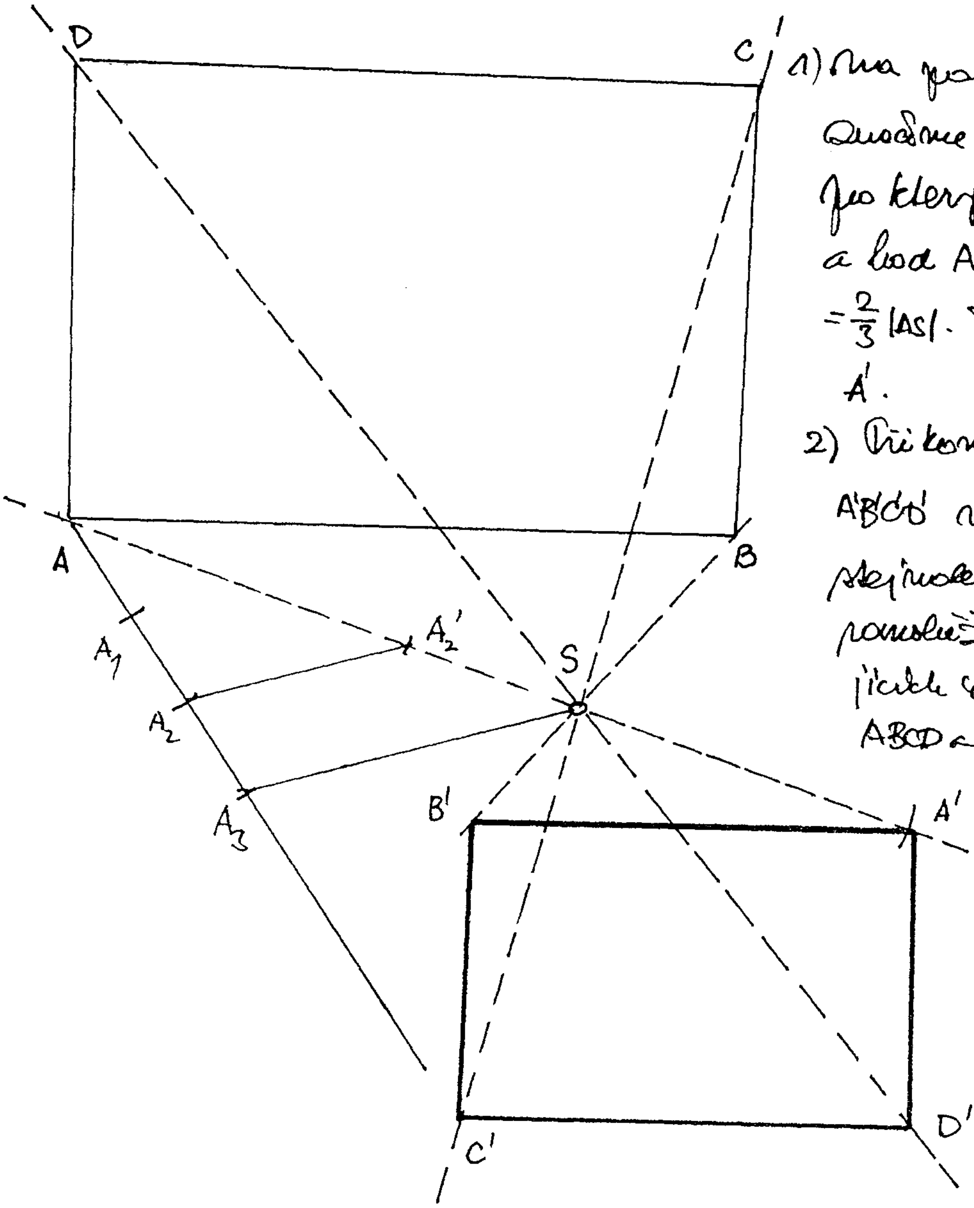


Příklad 2: Narýsujte libovolný $\triangle ABC$ a bod S tak, že $S \notin \triangle ABC$. Sestrojte obraz
a) $A_1B_1C_1$ trojúhelníku ABC ve stejnolehlosti $\mathcal{H}_1(S, k = \frac{1}{2})$,
b) $A_2B_2C_2$ – " – " – " – $\mathcal{H}_2(S, k = -\frac{2}{3})$.



Odpovídající si úsečky (strany a jejich obrazy) leží na rovnoběžných přímkách.

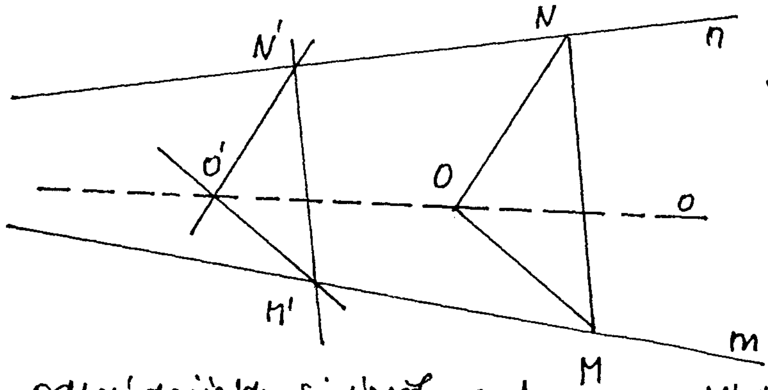
Příklad 3: Sestrojte obraz A'B'C'D' obdélníku ABCD ($|AB| = 8{,}8\,cm$, $|BC| = 6\,cm$) ve stejnolehlosti se středem S a koeficientem $k = -\frac{2}{3}$ (bod S leží vně obdélníku ABCD).



1) Na polopřímce AS vyznačíme takový bod A_2', pro který platí $|AA_2'| = \frac{2}{3}|AS|$, a bod A' tak, že $|SA'| = |AA_2'| = \frac{2}{3}|AS|$. Tím získáme vrchol A'.

2) Při konstrukci obdélníku A'B'C'D' využijeme vlastnost stejnolehlosti, která se týká rovnoběžnosti odpovídajících si stran obdélníku ABCD a A'B'C'D'.

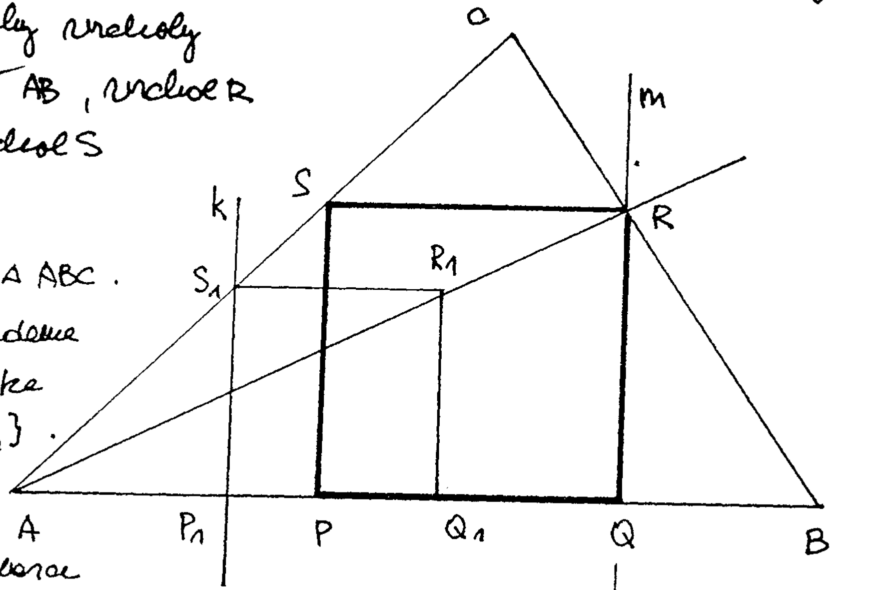
Příklad 4: Daným bodem O veďte přímku o, která by prošla nedostupným průsečíkem S přímek m, n; bod S je mimo nákres.



Řešení: Na přímkách m, n zvolíme body M, N tak, abychom mohli narýsovat △MNO. S využitím rovnoběžnosti odpovídajících si stran sestrojíme △M'N'O' podobný △MNO. Obr

Trojúhelníky jsou stejnolehlé. Středem S této stejnolehlosti je nevyznačený průsečík S přímek m, n. Požadavek úlohy splňuje přímka $o = \overleftrightarrow{OO'}$.

Příklad 5: Trojúhelníku ABC ($a = 7{,}4$ cm, $b = 9$ cm, $c = 10{,}7$ cm) vepište čtverec PQRS tak, aby vrcholy P, Q ležely na straně AB, vrchol R na straně BC a vrchol S na straně AC.



Řešení: Narýsujeme $\triangle ABC$. Bodem P_1 ($P_1 \in AB$) vedeme přímku k kolmou ke straně AB; $k \cap AC = \{S_1\}$. Úsečka P_1S_1 je stranou pomocného čtverce $P_1Q_1R_1S_1$. Tento čtverec narýsujeme; $\mapsto AR_1 \cap BC = \{R\}$. Sestrojíme přímku m, která prochází bodem R $\wedge\ m \cap AB = \{Q\}$. Úsečka QR je stranou hledaného čtverce PQRS, který narýsujeme.

Příklad 6 (3.67/163): Zobrazte $\triangle ABC$ v $\mathcal{H}(S, \kappa)$, je-li

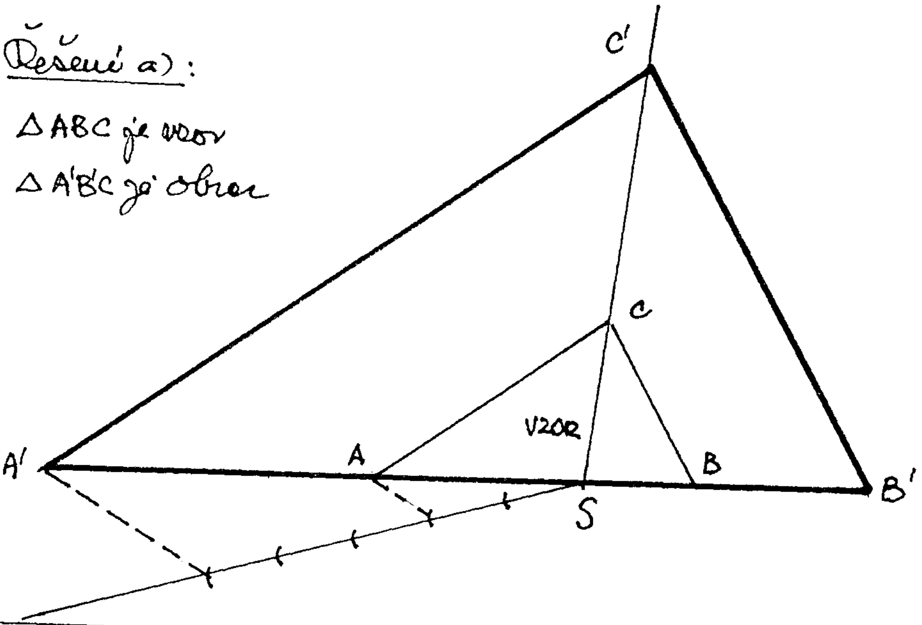
a) $S \in AB$, $\kappa = \frac{5}{2}$ b) $S = A$, $\kappa = -\frac{3}{4}$

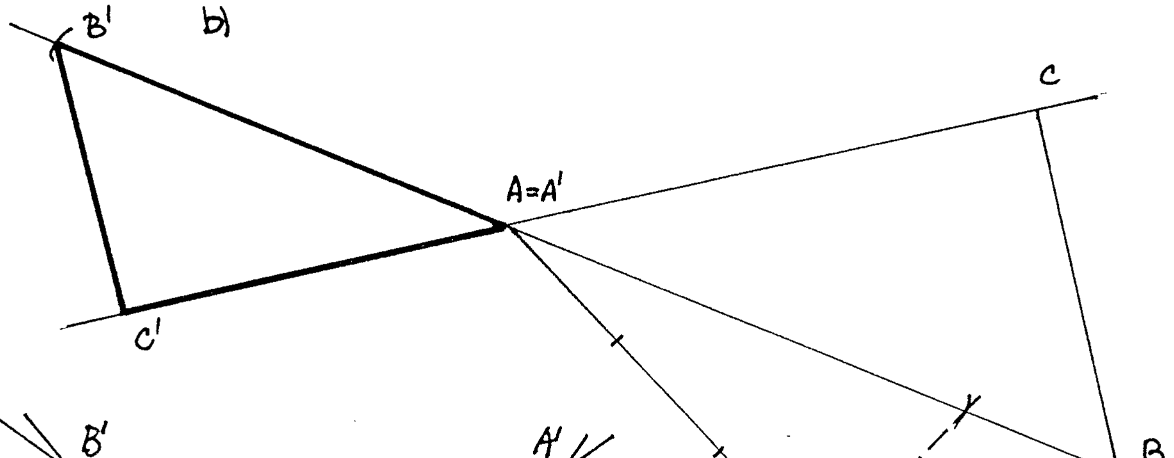
c) S leží uvnitř $\triangle ABC$, $\kappa = \sqrt{2}$ d) S leží vně $\triangle ABC$, $\kappa = \frac{2}{3}$.

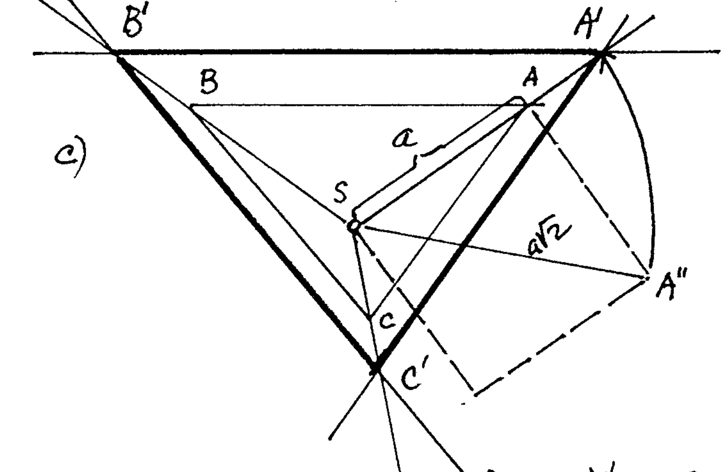
Řešení a):

$\triangle ABC$ je vzor

$\triangle A'B'C'$ je obraz

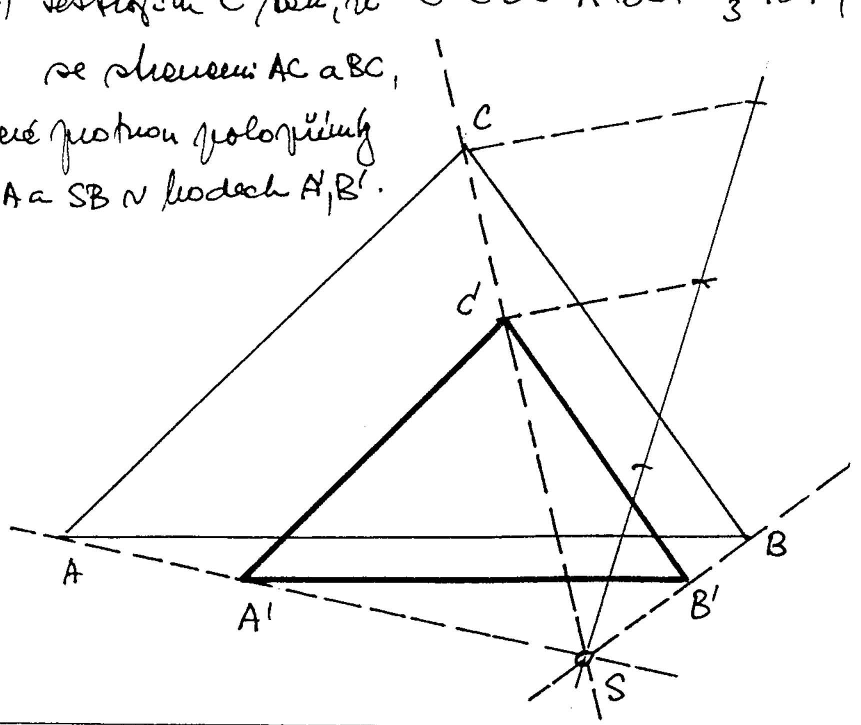




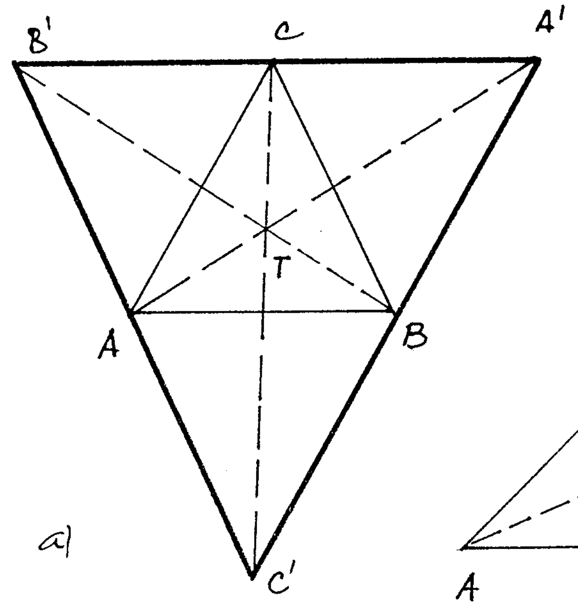


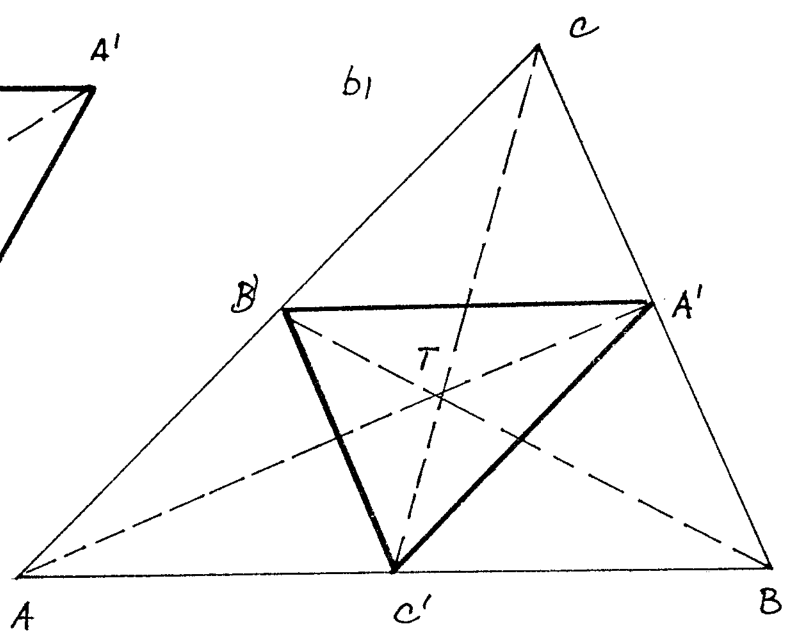
Úsečku SA (nebo SB či SC) položíme rovnu $\underline{a}$; $|SA|=a$ a sestrojím $a\sqrt{2}$ jako délku úhlopříčky čtverce $|SA''|$, tu otočím a získám A' ($A' \in \overrightarrow{SA}$), pak rovnoběžky se stranami AB, BC, získám $A'B'$.

d) Sestrojím C' tak, že $C' \in \overrightarrow{SC} \wedge |SC'| = \frac{2}{3}|SC|$, pak rovnoběžky se stranami AC a BC, které protnou polopřímky SA a SB v bodech A', B'.

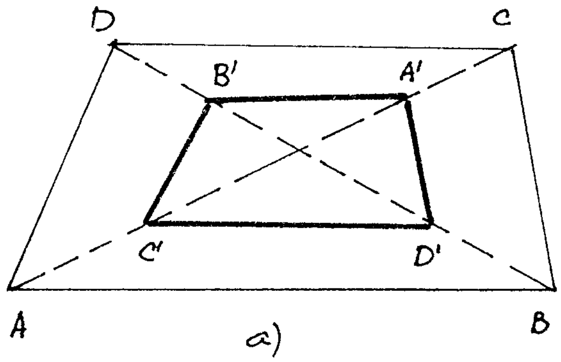


Příklad 7: Narýsujte libovolný ostroúhlý △ABC a sestrojte jeho těžiště T. Sestrojte obraz A'B'C' trojúhelníku ABC ve stejnolehlosti a) $\mathcal{H}_1(T; -2)$, b) $\mathcal{H}_2(T; -\frac{1}{2})$.

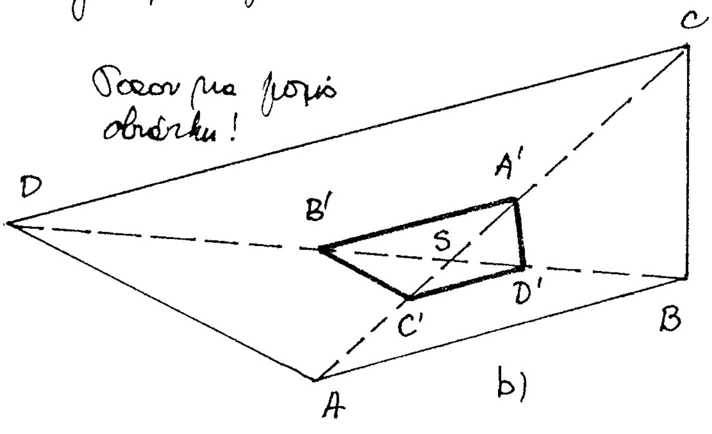




Příklad 8 (3.69/163): Lichoběžník ABCD (AB∥CD) zobrazte ve stejnolehlosti se středem S v průsečíku jeho úhlopříček a koeficientem a) $\kappa = \frac{1}{2}$, b) $\kappa = -\frac{1}{2}$.



Pozor na popis obrázku!



Příklad 9: Sestrojte △ABC, ve kterém platí: $a:c = 5:7$, $\beta = 45°$, $t_b = 8$ cm.

Nejdříve sestrojíme △A'BC':

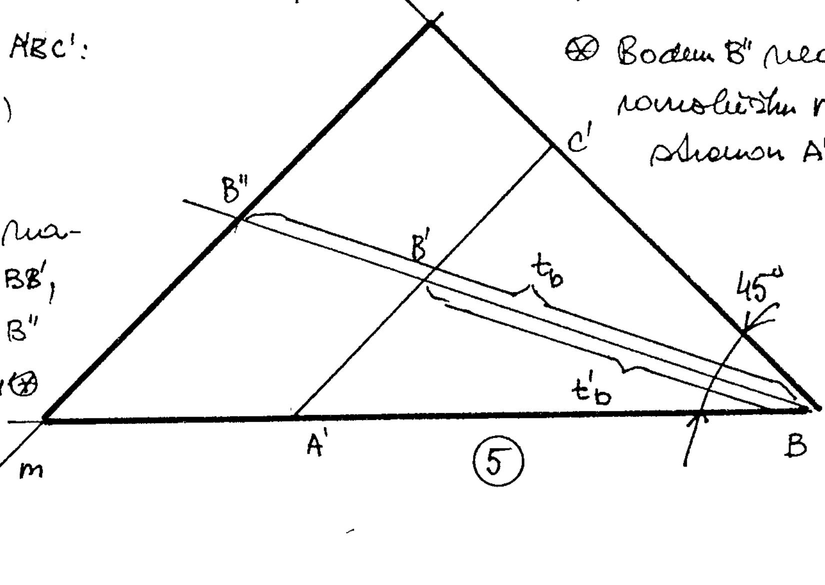
$|A'B| = 7$ dílů (např. cm)

$|BC'| = 5$ dílů

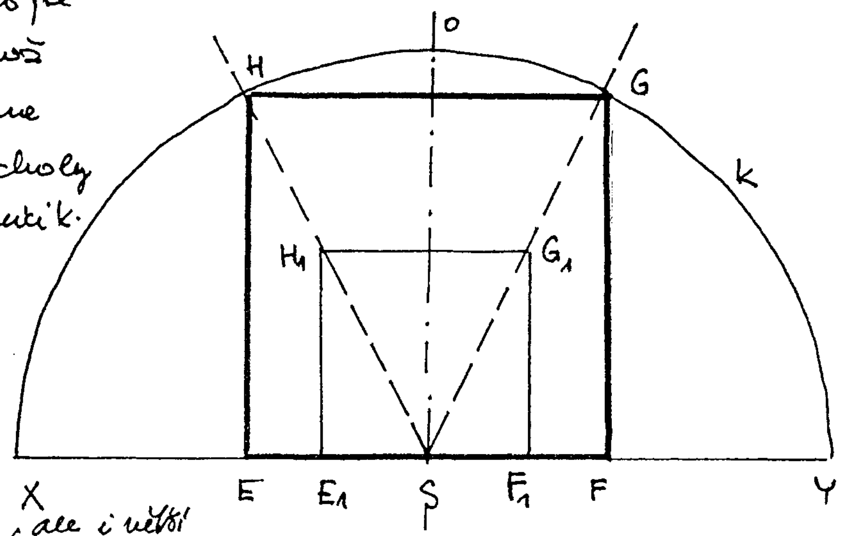
$|\sphericalangle A'BC'| = 45°$, pak narýsujeme těžnici $t'_b = BB'$,

na $\overrightarrow{BB'}$ vyznačíme B'' tak, že $|BB''| = t_b = 8$ cm ⊗

⊗ Bodem B'' vedeme rovnoběžku m se stranou A'C' ...



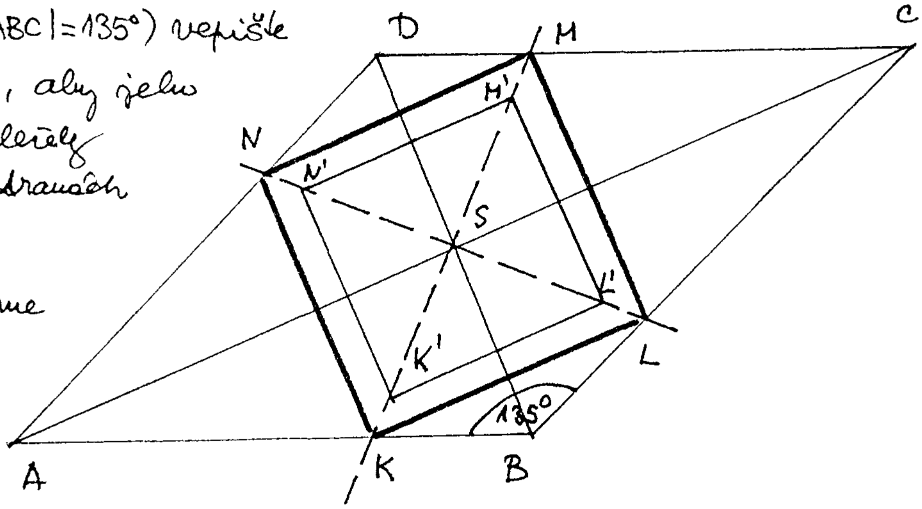
Příklad 10: Narýsujte půlkružnici k se středem S a průměrem $|XY| = 11$ cm. Sestrojte čtverec EFGH, jehož vrcholy E, F leží na průměru XY a vrcholy G, H na půlkružnici k.



Konstrukci provedeme pomocí čtverce $E_1F_1G_1H_1$, který je menší (ale i větší) než požadovaný čtverec a který je souměrný podle osy o průměru XY. $\overrightarrow{SG_1} \cap k = \{G\}$, $\overrightarrow{SH_1} \cap k = \{H\}$. Délka úsečky GH je délkou strany požadovaného čtverce EFGH.

Příklad 11: Kosočtverci ABCD ($|AB| = 7$ cm, $|\sphericalangle ABC| = 135°$) vepište čtverec KLMN tak, aby jeho vrcholy K, L, M, N ležely po řadě na stranách AB, BC, CD, AD.

Nejdříve sestrojíme pomocný čtverec K'L'M'N' tak, jak je to na obrázku....

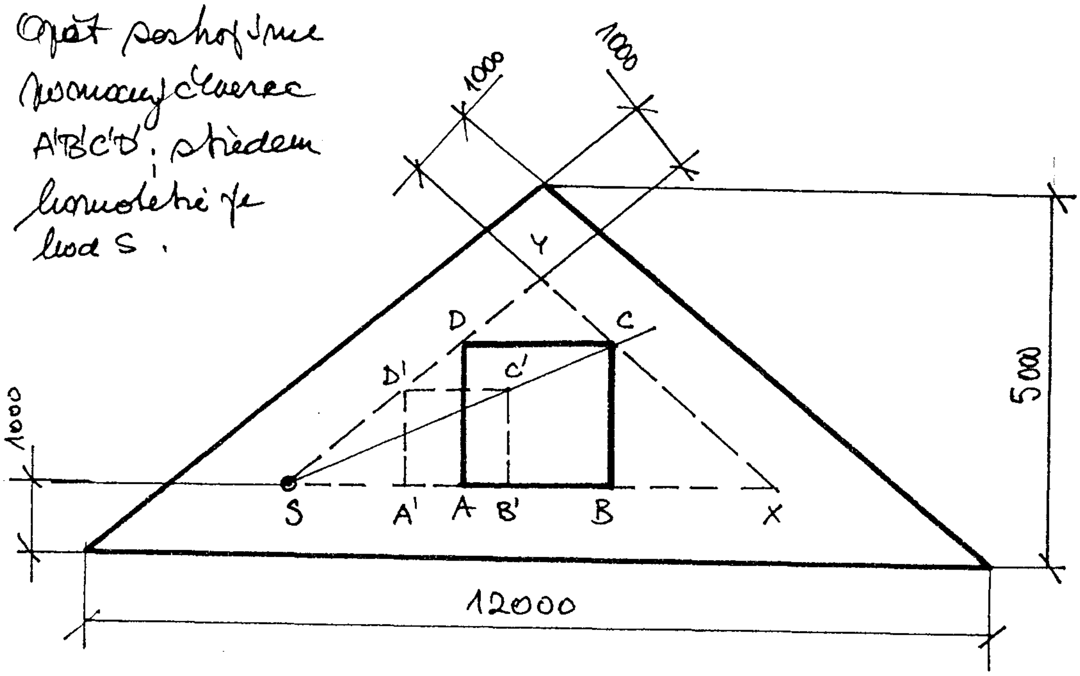


Příklad 12: Štít domu tvaru rovnoramenného △ se základnou dlouhou 12 m a výškou 5 m byl na stavebním plánku nakreslen bez okna. Stavebník se dodatečně rozhodl, že v něm pro okno ponechá čtvercový otvor tak, aby vzdálenost jeho vrcholů od tří stran štítu byla rovna 1 m.

Řešení narýsujte obrázek. Popište postup.

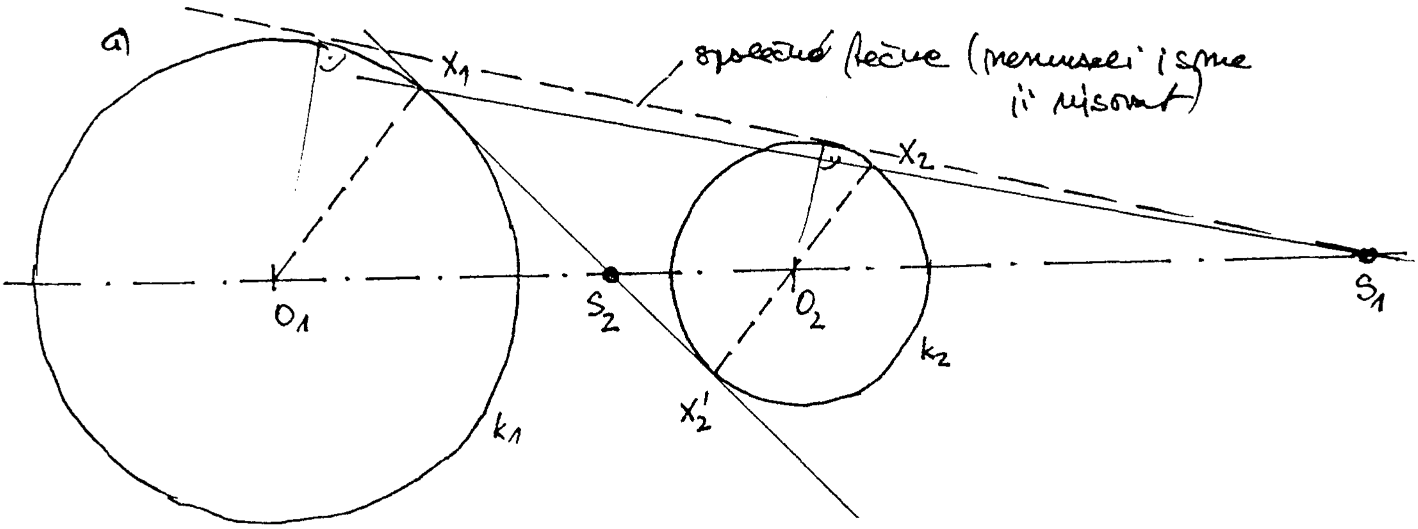
Kótování stavebních výkresů se vyjadřuje v mm (dříve v cm).

Opět sestrojíme posunutý čtverec A'B'C'D'; středem homotetie je bod S.



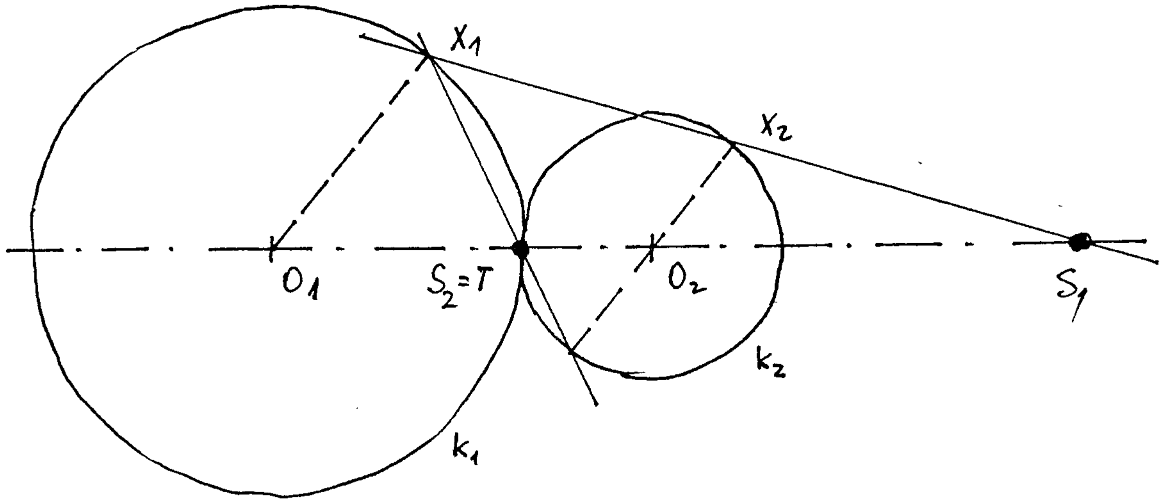
Příklad 13: Prohlédněte si některé vzájemné polohy dvou kružnic, které nejsou shodné a posuďte, jak je možné určit středy jejich stejnolehlosti.

a)

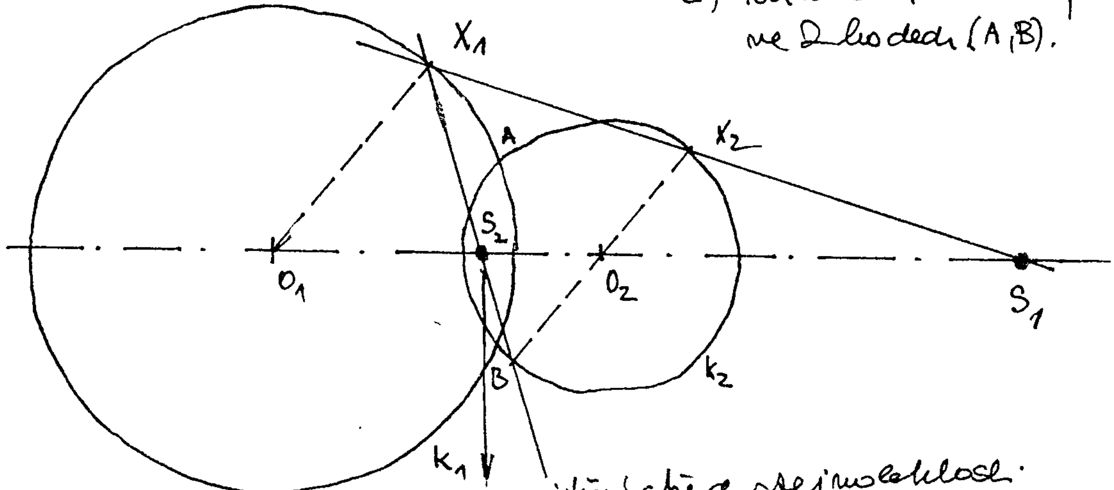


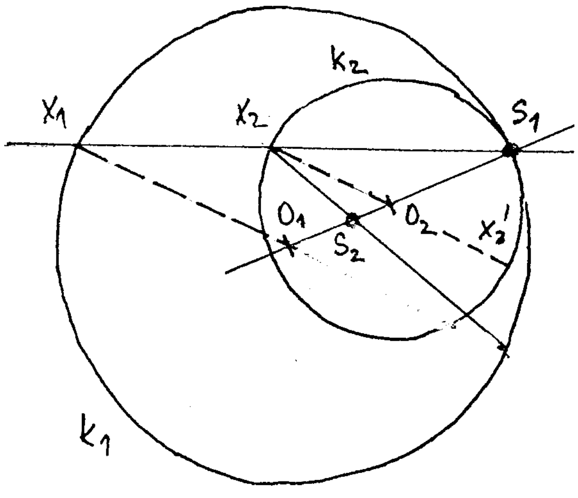
Kružnice k_2 leží vně kružnice k_1; existují 2 středy stejnolehlosti (S_1, S_2).

b) Kružnice k_1 a k_2 mají vnější dotyk. Existují opět 2 středy stejnolehlosti, jeden z nich se kryje s bodem dotyku T.



c) Kružnice k_1 a k_2 se protínají ve 2 bodech (A, B).

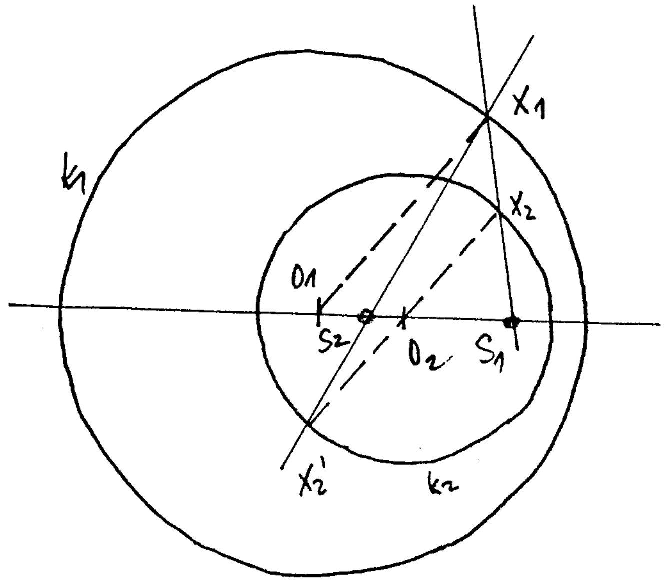


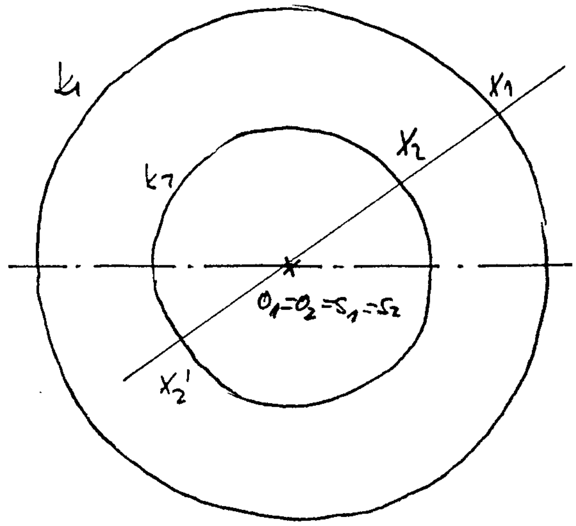


d) Kružnice k_1, k_2 mají vnitřní dotyk.

Středy stejnolehlosti leží na přímce O_1O_2. Konstrukci středů začneme narýsováním poloměru O_1X_1 kružnice k_1. Pak narýsujeme poloměr O_2X_2, přímku X_1X_2 atd.

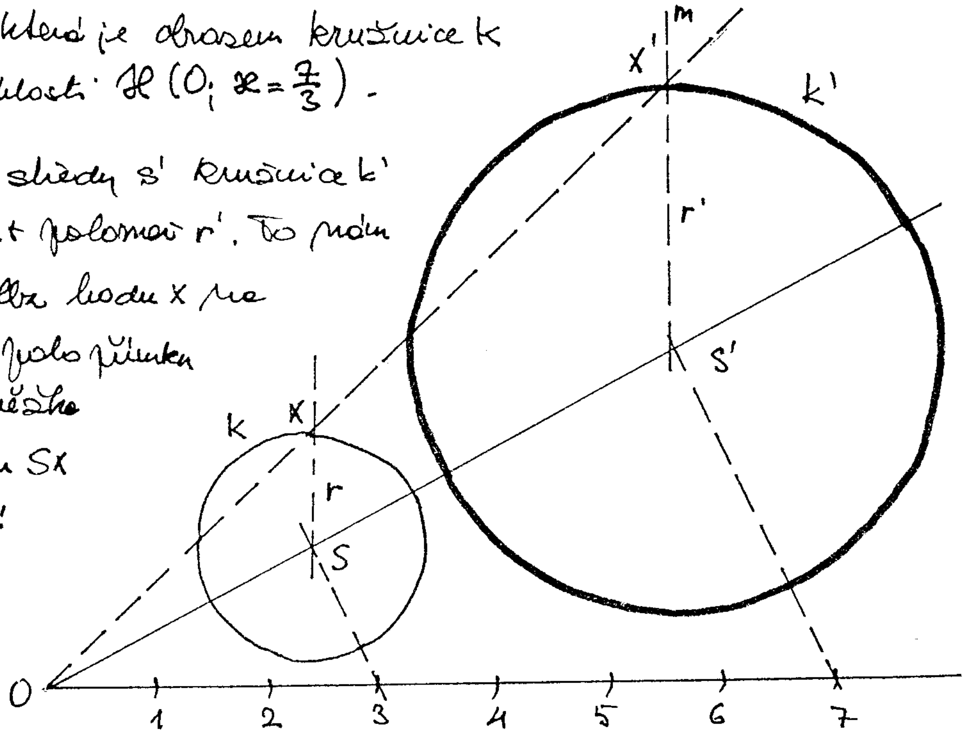
e) Kružnice k_2 leží uvnitř kružnice k_1 (říkáme též, že je částí vnitřní oblasti k_1).



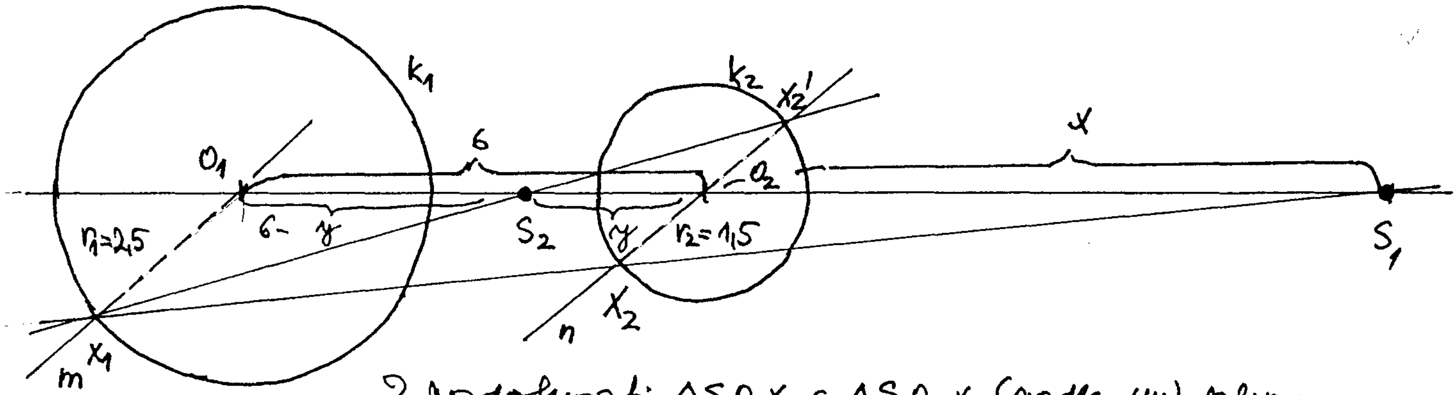


Příklad 14: Je dána kružnice $k(S; r)$ a bod O tak, že $|SO| > r$. Sestrojte kružnici k', která je obrazem kružnice k ve stejnolehlosti $\mathcal{H}(O; \varkappa = \frac{7}{3})$.

K sestrojení středu S' kružnice k' je třeba určit poloměr r'. To nám umožní volba bodu X na kružnici k; polopřímka OX a rovnoběžka m s přímkou SX procházející bodem S'; $r' = |S'X'|$.



Příklad 15 (3.75a/168) uč.: Jsou dány kružnice $k_1(O_1; 2{,}5\,cm)$, $k_2(O_2; 1{,}5\,cm)$ a středná $|O_1O_2| = 6\,cm$. Určete středy jejich stejnolehlostí a příslušné koeficienty, je-li obrazem kružnice k_1 kružnice k_2. Nejdříve proveďte konstrukci a poté výpočet koeficientů.



Z podobnosti $\Delta S_1O_1X_1$ a $\Delta S_1O_2X_2$ (podle uu) plyne:

$$\frac{x+6}{2{,}5}=\frac{x}{1{,}5}\qquad \varkappa_1=\frac{|S_1O_2|}{|S_1O_1|}=\frac{9}{9+6}=\frac{9}{15}=\frac{3}{5}\qquad \boxed{\mathcal{H}_1\left(S_1;\ \varkappa=\frac{3}{5}\right)}$$

$1{,}5x+9=2{,}5x$

$x=9$

Z podobnosti $\Delta S_2O_1X_1$ a $\Delta S_2O_2X_2'$ (uu) plyne

$$\frac{y}{6-y}=\frac{1{,}5}{2{,}5}\qquad \varkappa_2=-\frac{y}{6-y}=\frac{-2{,}25}{3{,}75}=-\frac{3}{5}\qquad \boxed{\mathcal{H}_2\left(S_2;\ \varkappa=-\frac{3}{5}\right)}$$

$2{,}5y=9-1{,}5y$

$4y=9$

$y=2{,}25$

$$\boxed{\begin{aligned}|O_1S_1|&=15\\ |O_1S_2|&=3{,}75\end{aligned}}$$

Poloha středů

Důležitá poznámka: Koeficient stejnolehlosti je $\left(\frac{r_1}{r_2}=\frac{1{,}5}{2{,}5}=\frac{3}{5}\right)$ stále stejný.

Se změnou délky středné se bude měnit pouze vzdálenost středů stejnolehlosti od středů kružnic.

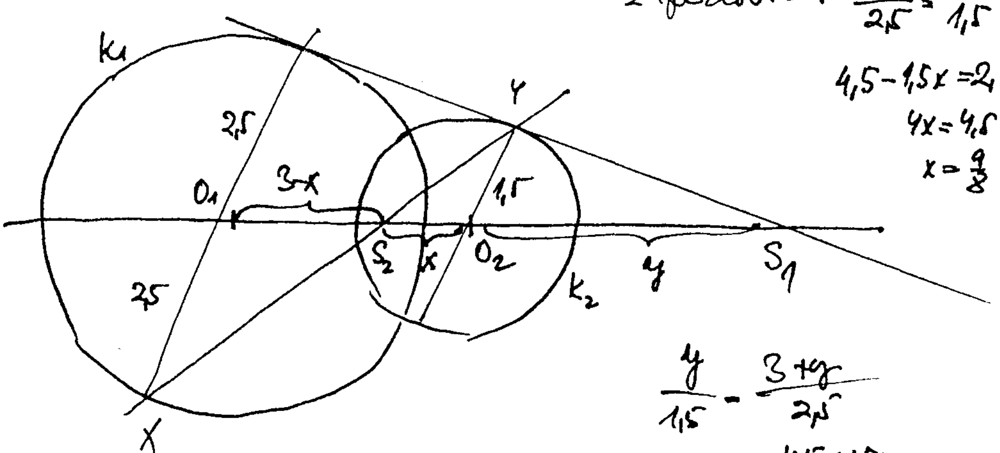
Řešme předchozí příklad pro $|O_1O_2|=3$ a $|O_1O_2|=4\,cm$

Z podob. Δ: $\frac{3-x}{2{,}5}=\frac{x}{1{,}5}$

$4{,}5-1{,}5x=2{,}5x$

$4x=4{,}5$

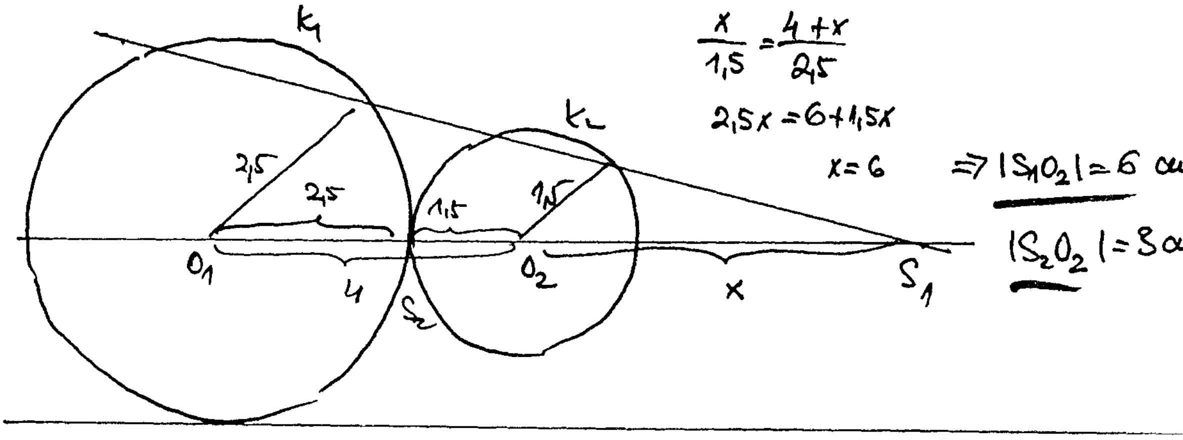
$x=\frac{9}{8}\Rightarrow |S_2O_2|=\frac{9}{8}\,cm$



$\frac{y}{1{,}5}=\frac{3+y}{2{,}5}$

$2{,}5y=4{,}5+1{,}5y$

$y=4{,}5\Rightarrow |S_1O_2|=4{,}5\,cm$



$$\frac{x}{1{,}5} = \frac{4+x}{2{,}5}$$

$$2{,}5x = 6 + 1{,}5x$$

$$x = 6 \quad \Rightarrow \underline{|S_1O_2| = 6\ \text{cm}}$$

$$\underline{|S_2O_2|} = 3\ \text{cm}$$