4b) UŽITÍ VĚT EUKLEIDOVÝCH A PYTHAGOROVY

Pythagorova věta:

Formulace geometrická: Obsah čtverce nad přeponou pravoúhlého trojúhelníku se rovná součtu obsahů čtverců nad jeho odvěsnami.

Formulace aritmetická: V pravoúhlém trojúhelníku se druhá mocnina délky jeho přepony rovná součtu druhých mocnin délek obou jeho odvěsen

$$c^2=a^2+b^2$$

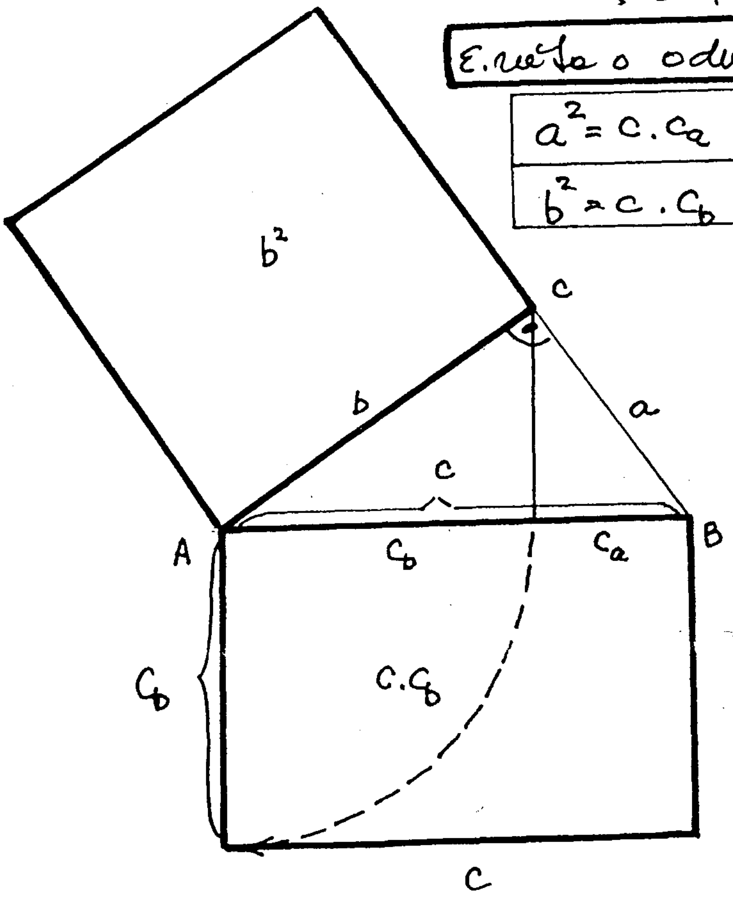
Obrácená Pythagorova věta: Jestliže pro délky stran a, b, c trojúhelníku ABC platí $a^2+b^2=c^2$, pak je tento trojúhelník pravoúhlý a $\underline{c}$ je jeho přepona, $\underline{a}$, $\underline{b}$ jsou jeho odvěsny.

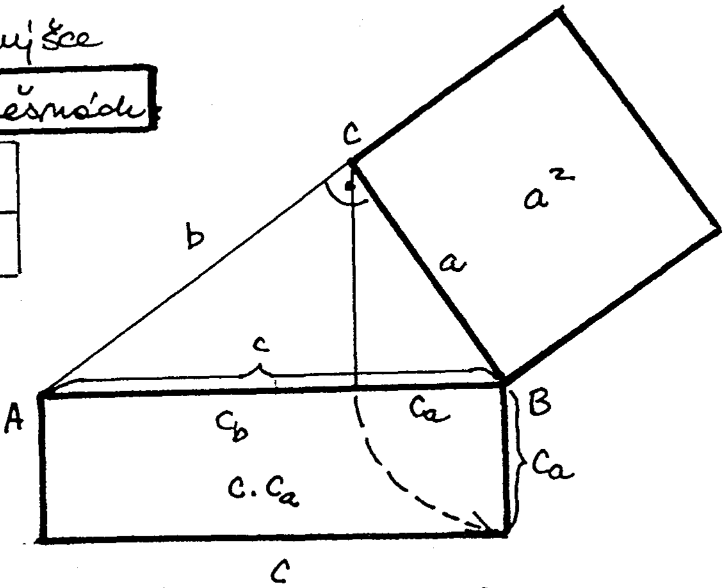
RΔ = pravoúhlý Δ

Eukleidova věta
- o odvěsnách
- o výšce

E. věta o odvěsnách

$a^2=c \cdot c_a$
$b^2=c \cdot c_b$





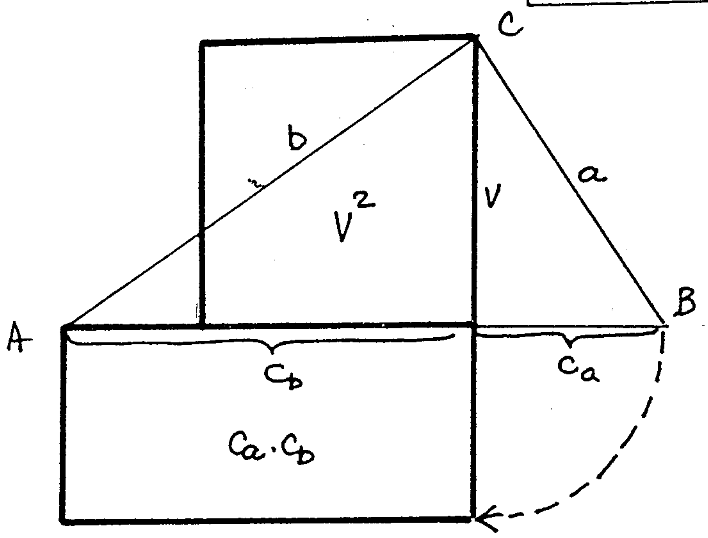
E. věta o odvěsnách: Obsah čtverce sestrojeného nad odvěsnou RΔ se rovná obsahu obdélníku, jehož jedna strana je přepona a druhá úsek přepony přilehlý k této odvěsně.

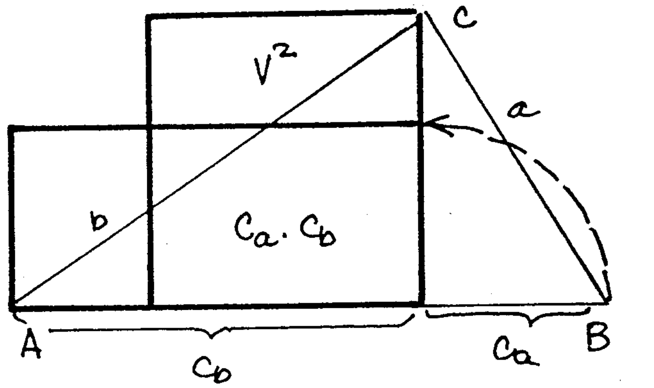
E. věta o odvěsně na předchozí stránce lze porovnat se geometrickou interpretací její aritmetické formulace.

V RΔ je druhá mocnina délky odvěsny rovna součinu délky přepony a délky úseku přepony, který je k této odvěsně přilehlý.

E. věta o výšce: $\boxed{v^2 = c_a \cdot c_b}$

Obsah čtverce sestrojeného nad výškou k přeponě pravoúhlého Δ je roven obsahu obdélníku, jehož strany jsou úseky přepony.





Dolní obdélník vyjadřuje méně místa než horní. Oba interpretují E. větu o výšce.

aritmetická interpretace:

V RΔ je druhá mocnina výšky k přeponě rovna součinu délek obou úseků přepony.

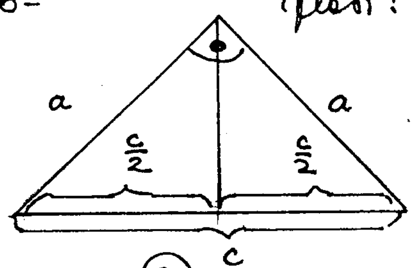
Shrnutí E. vět a P. věty

$a^2 = c \cdot c_a$
$b^2 = c \cdot c_b$
$v^2 = c_a \cdot c_b$
$c^2 = a^2 + b^2$

PŘÍKLADY

Příklad 1: Vypočítejte délku přepony pravoúhlého rovnoramenného Δ s odvěsnou délky a.

Řešení: Pomocí E. věty o odvěsně platí: $a^2 = c \cdot \frac{c}{2}$



$$a^2 = \frac{c^2}{2}$$

$$c^2 = 2a^2$$

$$c = \sqrt{2a^2}$$

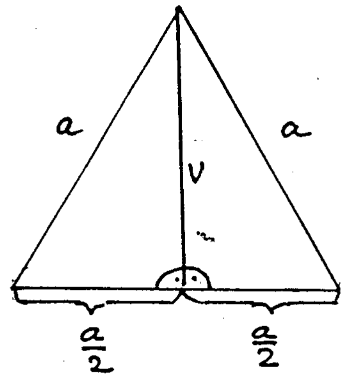
$$\boxed{c = a\sqrt{2}}$$

Příklad 2: Vyjádřete

a) výšku, poloměr kružnice opsané a vepsané v rovnostranném △ se stranou délky $\underline{a}$,

b) výšku k základně v rovnoramenném △ se základnou délky $\underline{a}$ a ramenem délky $\underline{b}$.

Řešení: a) Podle Pyth. věty platí:



$$v^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

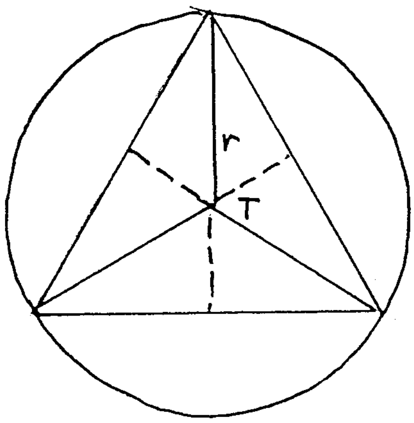
$$v^2 = a^2 - \frac{a^2}{4}$$

$$v^2 = \frac{4a^2 - a^2}{4}$$

$$v^2 = \frac{3a^2}{4}$$

$$v = \sqrt{\frac{3a^2}{4}}$$

$$\boxed{v = \frac{a}{2}\sqrt{3}} \quad \text{nebo} \quad \boxed{v = \frac{1}{2}a\sqrt{3}}$$

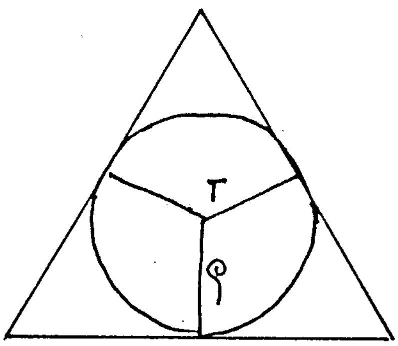


Výšky v rovnostr. △ jsou zároveň těžnice △. Těžiště T je středem opsané kružnice. Proto platí:

$$r = \frac{2}{3}v$$

$$r = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}a\sqrt{3}$$

$$\boxed{r = \frac{1}{3}a\sqrt{3}}$$

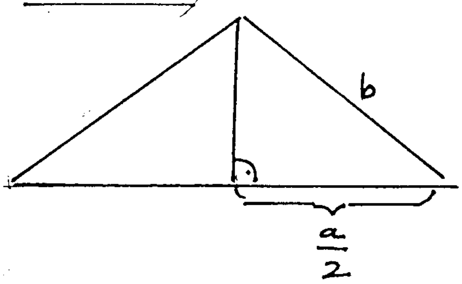


$$\rho = \frac{1}{3}v$$

$$\rho = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}a\sqrt{3}$$

$$\boxed{\rho = \frac{1}{6}a\sqrt{3}}$$

Řešení b)



$$v^2 = b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

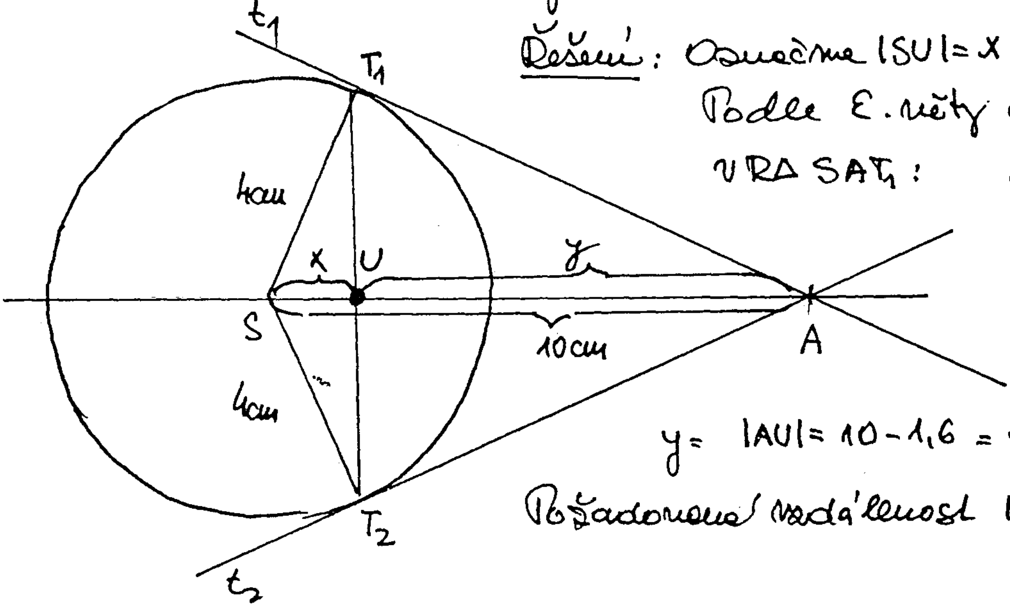
$$v^2 = b^2 - \frac{a^2}{4}$$

$$v^2 = \frac{4b^2 - a^2}{4}$$

$$v = \sqrt{\frac{4b^2 - a^2}{4}}$$

$$\boxed{v = \frac{1}{2}\sqrt{4b^2 - a^2}}$$

Příklad 3: Je dána kružnice k (S; 4cm) a bod A tak, že |AS| = 10cm. Vypočítejte vzdálenost bodu A od přímky, která spojuje body dotyku tečen vedených z bodu A ke kružnici k.



Řešení: Označme $|SU| = x$

Podle E. věty o odvěsně platí

v $\triangle SAT_1$: $10 \cdot x = 4^2$

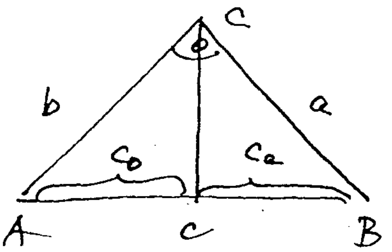
$10x = 16$

$x = 1{,}6$ (cm)

$y = |AU| = 10 - 1{,}6 = 8{,}4$ (cm

Požadovaná vzdálenost $|AU| = 8{,}4$ cm.

Příklad 4: Odvoďte platnost Pythagorovy věty pomocí Eukleidových vět, čili proveďte důkaz.



$$a^2 + b^2 = c \cdot c_a + c \cdot c_b$$

$$a^2 + b^2 = c\,(\underbrace{c_a + c_b}_{c})$$

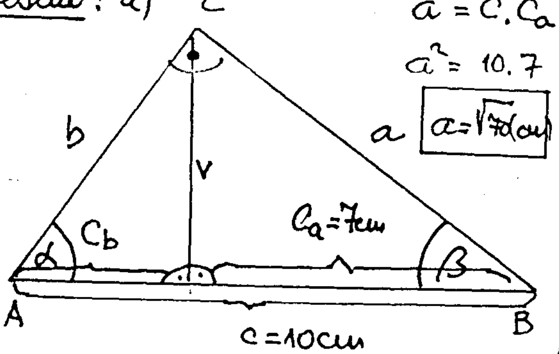
$$\boxed{a^2 + b^2 = c^2}$$

Příklad 5: V $\triangle ABC$ ($|\sphericalangle BCA| = 90°$) je dáno:

a) $c = 10$cm, $c_a = 7$cm b) $b = 5$cm, $c = 13$cm

Vypočítejte zbývající prvky z prvků a, b, c, c_a, c_b, v (na přeponu), α, β.

Řešení: a)



$a^2 = c \cdot c_a$

$a^2 = 10 \cdot 7$

$\boxed{a = \sqrt{70}\ (\text{cm})}$

$c_b = 10 - 7$

$\boxed{c_b = 3\ (\text{cm})}$

$b^2 = c \cdot c_b$ nebo $b^2 = c^2 - a^2$

$b^2 = 10 \cdot 3$

$\boxed{b = \sqrt{30}\ (\text{cm})}$

$b^2 = 10^2 - (\sqrt{70})^2$

$b^2 = 100 - 70$

$\boxed{b = \sqrt{30}\ (\text{cm})}$

$v^2 = c_a \cdot c_b$

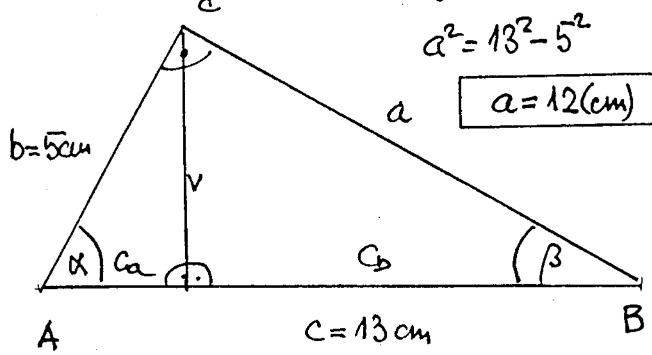
$v^2 = 3 \cdot 7$

$\boxed{v = \sqrt{21}\ (\text{cm})}$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\sqrt{70}}{\sqrt{30}} \doteq 1{,}527\,525\ldots \Rightarrow \boxed{\alpha \doteq 56°47'}$$

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{30}}{\sqrt{70}} \doteq 0{,}654\,653. \Rightarrow \boxed{\beta \doteq 33°13'}$$

Řešení b:



$$a^2 = c^2 - b^2$$

$$a^2 = 13^2 - 5^2$$

$$\boxed{a = 12\,(cm)}$$

$$a^2 = c \cdot c_a$$

$$c_a = \frac{a^2}{c}$$

$$c_a = \frac{12^2}{13}$$

$$\boxed{c_a = 11\tfrac{1}{13}\,(cm)}$$

$$\boxed{c_a \doteq 11{,}1\,(cm)}$$

$$b^2 = c \cdot c_b$$

$$c_b = \frac{b^2}{c}$$

$$c_b = \frac{5^2}{13}$$

$$\boxed{c_b = 1\tfrac{12}{13}\,(cm)}$$

$$\boxed{c_b \doteq 1{,}9\,(cm)}$$

$$v^2 = c_a \cdot c_b$$

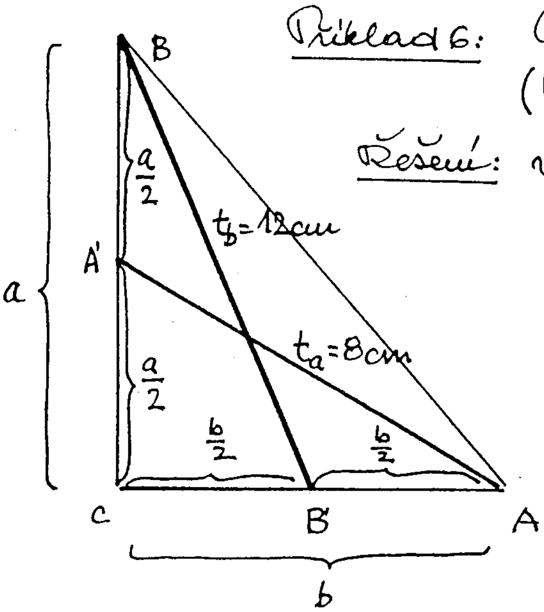
$$v^2 = 11\tfrac{1}{13} \cdot 1\tfrac{12}{13}$$

$$v^2 = 21\tfrac{51}{169}$$

$$\boxed{v \doteq 4{,}6\,(cm)}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b} = \frac{12}{5} = 2{,}4 \Rightarrow \boxed{\alpha \doteq 67°23'}$$

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{b}{a} = \frac{5}{12} = 0{,}41\overline{6} \Rightarrow \boxed{\beta \doteq 22°37'}$$



Příklad 6: Vypočítejte délky stran R△ ABC ($|\sphericalangle C| = 90°$), je-li $t_a = 8\,cm$, $t_b = 12\,cm$

Řešení: v R△ AA'C : $\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b^2 = t_a^2$

$$\frac{a^2}{4} + b^2 = 64$$

$$\boxed{b^2 = 64 - \frac{a^2}{4}} \quad \text{rovnice } (1)$$

v R△ B'BC : $\left(\frac{b}{2}\right)^2 + a^2 = t_b^2$

$$\frac{b^2}{4} + a^2 = 144 \qquad \text{dosaď (1) za } b^2$$

$$64 - \frac{a^2}{4} + a^2 = 144$$

$$\frac{\frac{256 - a^2}{4}}{\frac{4}{1}} + a^2 = 144$$

$$\frac{256 - a^2}{16} + a^2 = 144 \quad | \cdot 16$$

$$256 - a^2 + 16a^2 = 2304$$

$$15a^2 = 2048$$

$$a^2 = \frac{2048}{15}$$

$$\boxed{a \doteq 11{,}7\,(cm)} \quad (2)$$

② dosaď do ①

$$b^2 = 64 - \frac{a^2}{4}$$

$$b^2 = 64 - \frac{11{,}7^2}{4}$$

$$b^2 = 64 - 34{,}1\overline{3}$$

$$\boxed{b \doteq 5{,}5\,(cm)}$$

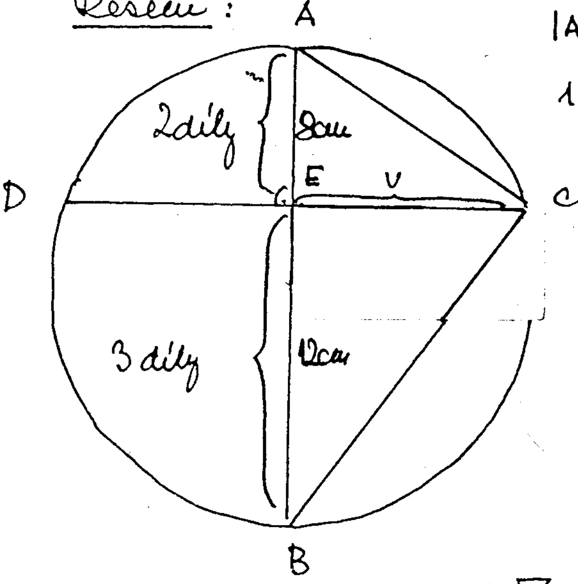
$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$c^2 = 11{,}7^2 + 5{,}5^2$$

$$\boxed{c \doteq 12{,}9\,(cm)}$$

Příklad 7: Vypočítejte délku tětivy kružnice $k(S;\ 10cm)$, víte-li, že tato tětiva rozděluje průměr k ní kolmý v poměru 2:3.

Řešení:



$|AB|$ je délka průměru $2r = 2 \cdot 10cm = 20cm$

1 díl ... $20cm : 5 = 4cm$

$|AE| = 2 \cdot 4cm = 8cm$

$|BE| = 3 \cdot 4cm = 12cm$

Pomocí E. věty o výšce platí:

$v^2 = 8 \cdot 12$

$v^2 = 96$

$v = \sqrt{96}$

Tětiva CD:

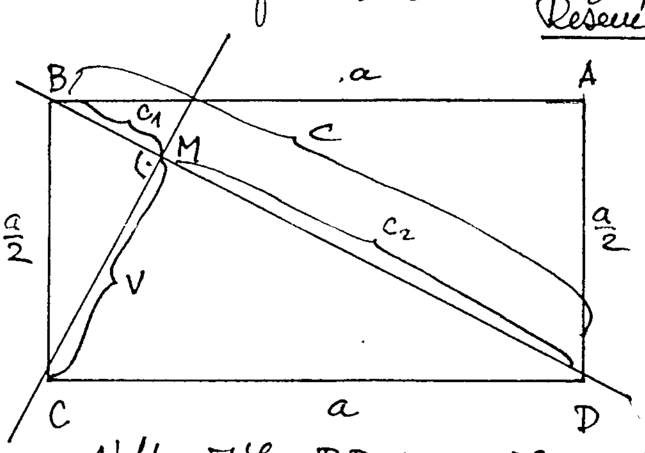
$|CD| = 2v = 2 \cdot \sqrt{96} = 2 \cdot \sqrt{16 \cdot 6} = 2 \cdot 4\sqrt{6}$

$$\boxed{|CD| = 8 \cdot \sqrt{6}\,(cm)}$$

Tětiva má délku $8 \cdot \sqrt{6}$ cm.

Příklad 8: Obdélník ABCD má rozměry $|AB| = |CD| = a$, $|AD| = |BC| = \frac{a}{2}$. V jakém poměru rozděluje úhlopříčku BD bod M, který je patou kolmice k vedené z bodu C na přímku BD?

Řešení:



$\left(\frac{a}{2}\right)^2 = c \cdot c_1$

$\frac{a^2}{4} = c \cdot c_1$

$\boxed{a^2 = 4c \cdot c_1}$ ①

Dosaď do ②

$\boxed{a^2 = c \cdot c_2}$ ②

$c \cdot c_2 = 4c \cdot c_1 \quad | : c$

$c_2 = 4c_1$

$\frac{c_1}{c_2} = \frac{1}{4}$

$$\boxed{c_1 : c_2 = 1 : 4}$$

Úhlopříčka BD je rozdělena bodem M na úseky v poměru 1:4.

Příklad 9: Je dán trojúhelník se stranami $a = 10\,cm$, $b = 8\,cm$, $c = 14\,cm$.

a) Dokažte, že tento △ není pravoúhlý.

b) Vypočítejte jeho obsah S a výšky v_a, v_b, v_c.

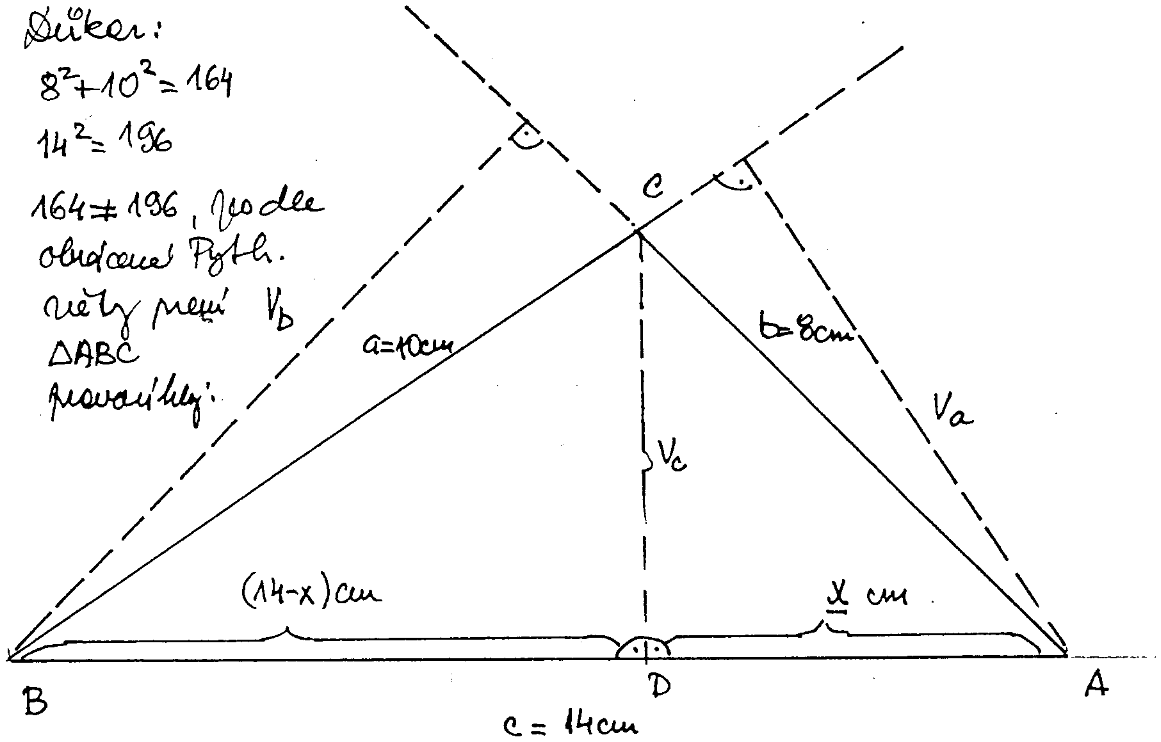
Řešení a)

Důkaz:

$8^2 + 10^2 = 164$

$14^2 = 196$

$164 \neq 196$, podle obrácené Pyth. věty není $\triangle ABC$ pravoúhlý.



Řešení b)

v $\triangle ACD$: $v_c^2 = 8^2 - x^2$ v $\triangle CBD$: $v_c^2 = 10^2 - (14-x)^2$

$\boxed{v_c^2} = 64 - x^2$ $\boxed{v_c^2} = 100 - (14-x)^2$

$64 - x^2 = 100 - (14-x)^2$

$64 - x^2 = 100 - (196 - 28x + x^2)$

$64 \cancel{- x^2} = 100 - 196 + 28x \cancel{- x^2}$

$28x = 160$

$\boxed{x = \frac{40}{7}\ (cm)}$

$v_c^2 = 64 - \left(\frac{40}{7}\right)^2$

$v_c = \sqrt{64 - \frac{1600}{49}} = \sqrt{\frac{1536}{47}}$

$= \sqrt{\frac{24 \cdot 64}{47}} = \frac{8}{7}\sqrt{24} = \frac{8}{7}\sqrt{6 \cdot 4}$

$\boxed{v_c = \frac{16}{7}\sqrt{6}\ (cm)}$

$S_\triangle = \frac{c \cdot v_c}{2} = \frac{14 \cdot \frac{16}{7}\sqrt{6}}{2} = \frac{32\sqrt{6}}{2} = \boxed{16 \cdot \sqrt{6}\ (cm^2)}$

Další výšky měříme pomocí znalosti obsahu △ a délek jeho stran.

$$S_\Delta = \frac{a \cdot v_a}{2}$$

$$v_a = \frac{2S_\Delta}{a} = \frac{2 \cdot 16\sqrt{6}}{10} = \boxed{\frac{16}{5}\sqrt{6}\ (cm)}$$

$$S_\Delta = \frac{b \cdot v_b}{2}$$

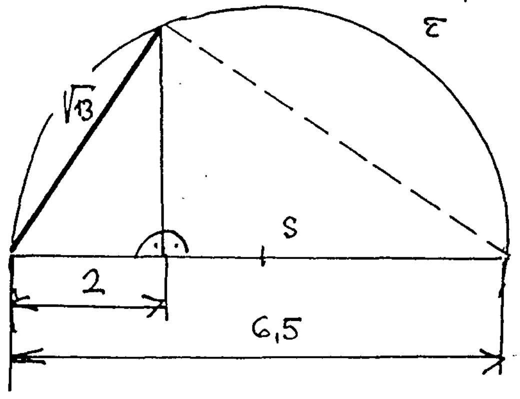
$$v_b = \frac{2S_\Delta}{b} = \frac{2 \cdot 16\sqrt{6}}{8} = \boxed{4 \cdot \sqrt{6}\ (cm)}$$

Eukleidovy věty a Pythagorovu větu využijeme nyní ke konstrukcím velikostí $\sqrt{\ }$ a útvarů stejného obsahu.

Příklad 10: Sestrojte $\sqrt{13}$.

1) Řešení - konstrukce pomocí E. věty o odvěsně: $\sqrt{13} = \sqrt{2 \cdot 6{,}5}$

Thaletova kružnice



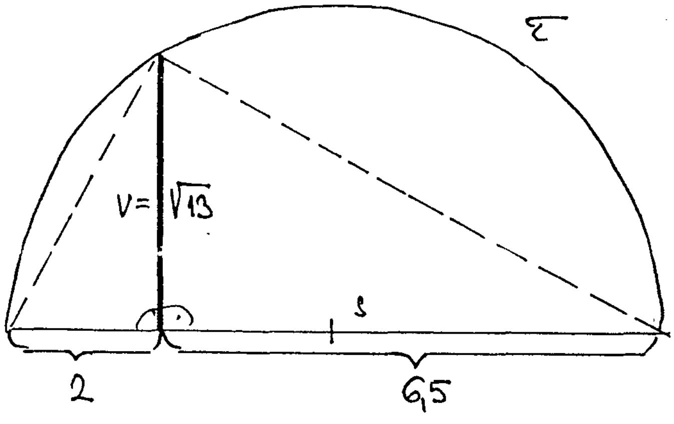
$S_{▭} = 6{,}5 \cdot 2 = 13$

$S_{\square} = (\sqrt{13})^2 = 13$

$\sqrt{13} = \sqrt{2 \cdot 6{,}5}$

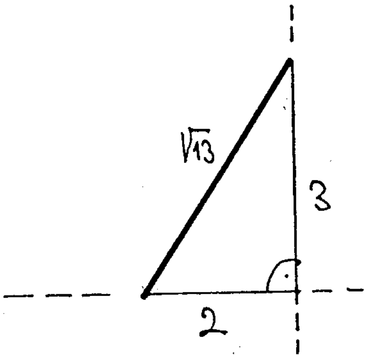
2 – úsek na přeponě; 6,5 – délka přepony

2) Konstrukce pomocí E. věty o výšce.



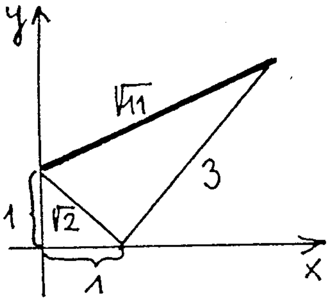
3) Konstrukce pomocí Pythagorovy věty

$\sqrt{13} = \sqrt{4+9} = \sqrt{2^2+3^2}$



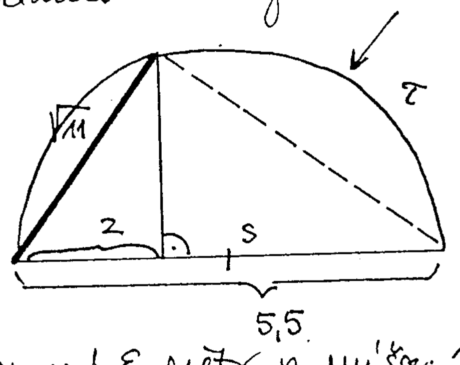
Příklad 11: Sestrojte $\sqrt{11}$.

Řešení: Pomocí Pythagorovy věty: $\sqrt{11} = \sqrt{9+2} = \sqrt{3^2 + (\sqrt{2})^2}$

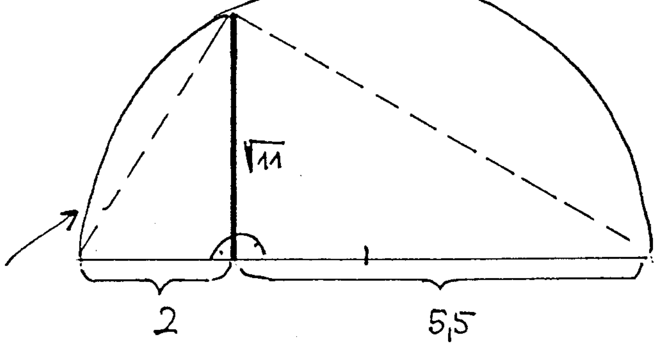


Číslo 11 rozložíme na dva sčítance tak, aby alespoň jedno z nich bylo druhou mocninou určitého čísla.

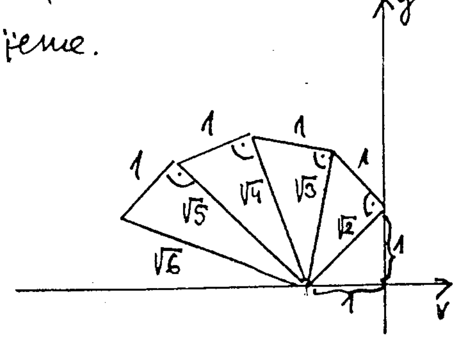
Pomocí E. věty o odvěsně: $\sqrt{11} = \sqrt{2 \cdot 5{,}5}$



Pomocí E. věty o výšce:



Příklad 12: Prohlédni si následující obrázek a snaž se mu porozumět. V následujícím příkladu ho využijeme.



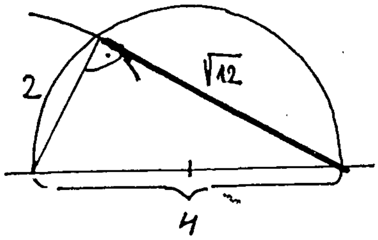
Příklad 13: Sestrojte $\sqrt{12}$

a) dvěma způsoby s využitím Pyth. věty,

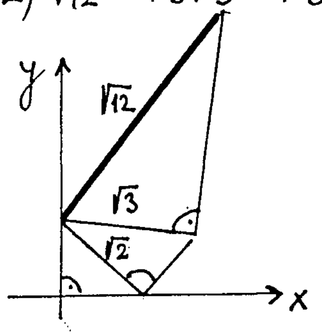
b) pomocí obou Euklidových vět.

Řešení a)

1) $\sqrt{12} = \sqrt{16-4} = \sqrt{4^2-2^2}$



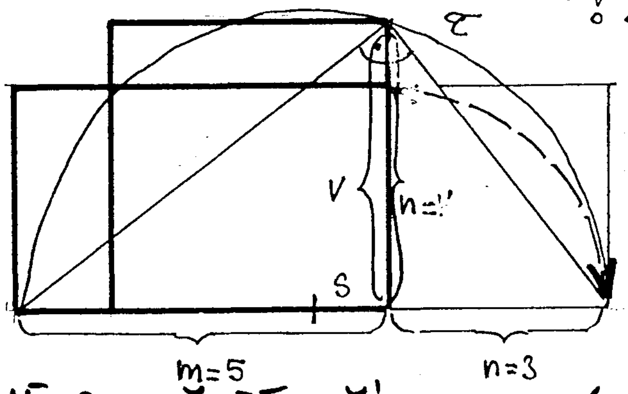
2) $\sqrt{12} = \sqrt{9+3} = \sqrt{3^2+(\sqrt{3})^2}$



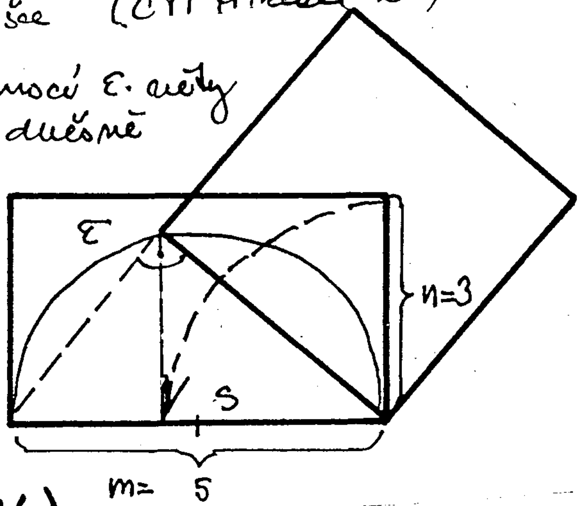
Poznámka: Osy x, y není třeba označovat.

Příklad 14: Sestrojte čtverec, který má stejný obsah jako obdélník se stranami $m = 5cm$, $n = 3cm$.

1) konstrukce pomocí E. věty o výšce (ČTI PŘÍKLAD 16)



2) pomocí E. věty o odvěsně

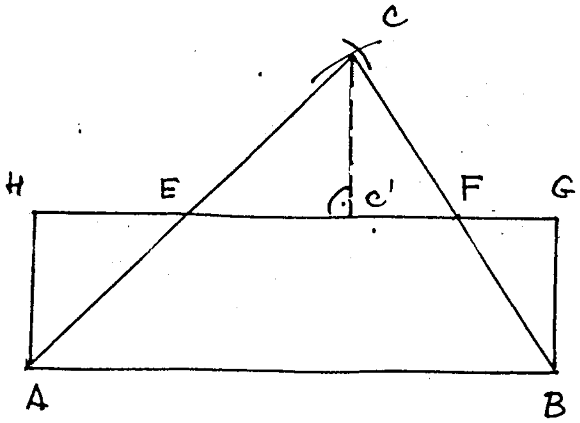


NÁZORNĚJŠÍ – PŘÍKLAD 17 (= 14)

Příklad 15 (pomocný příklad k následujícímu příkladu):

Sestrojte obdélník, který má týž obsah jako $\triangle ABC$ se stranami $a = 5cm$, $b = 6cm$, $c = 7cm$.

Konstrukci provedeme pomocí střední příčky EF trojúhelníku ABC, který sestrojíme pomocí věty sss.



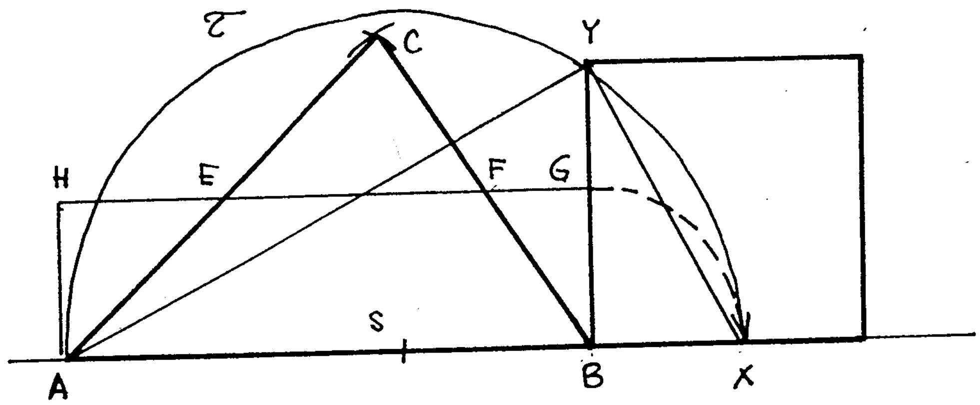
Příklad 16: Sestrojte čtverec, který má týž obsah jako trojúhelník ABC se stranami $a = 5cm$, $b = 6cm$, $c = 7cm$.

Postup při konstrukci: 1) narýsujeme $\triangle ABC$ pomocí věty sss.

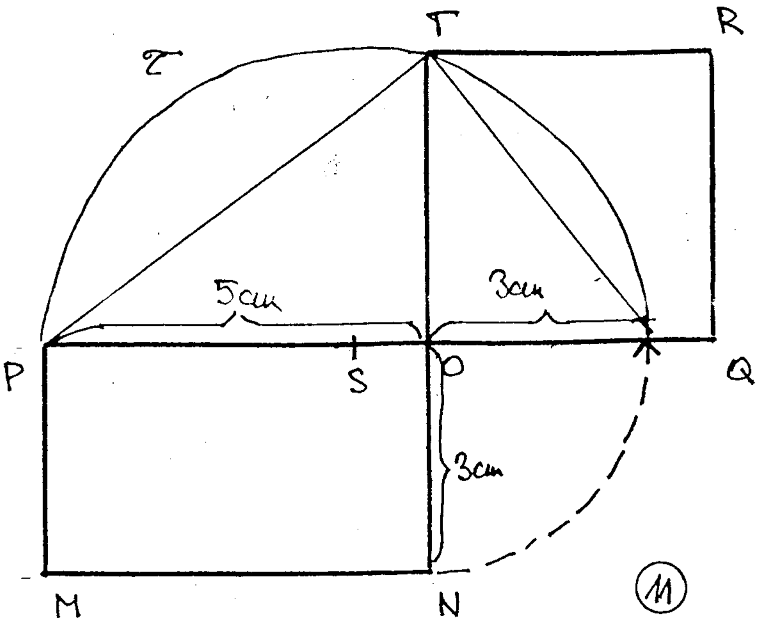
2) Přeměníme tento $\triangle$ na obdélník ABGH stejného obsahu (podle příkladu 15).

3) Pomocí E. věty o výšce (nebo odvěsně) přeměníme vzniklý obdélník na čtverec takto (viz obr.)

stranu BG sklopíme do přímky AB, určíme střed S strany AX, sestrojíme Thaletovu půlkružnici τ a v bodě B vztyčíme kolmici k; $k \cap \tau = \{Y\}$; BY je strana požadovaného čtverce.

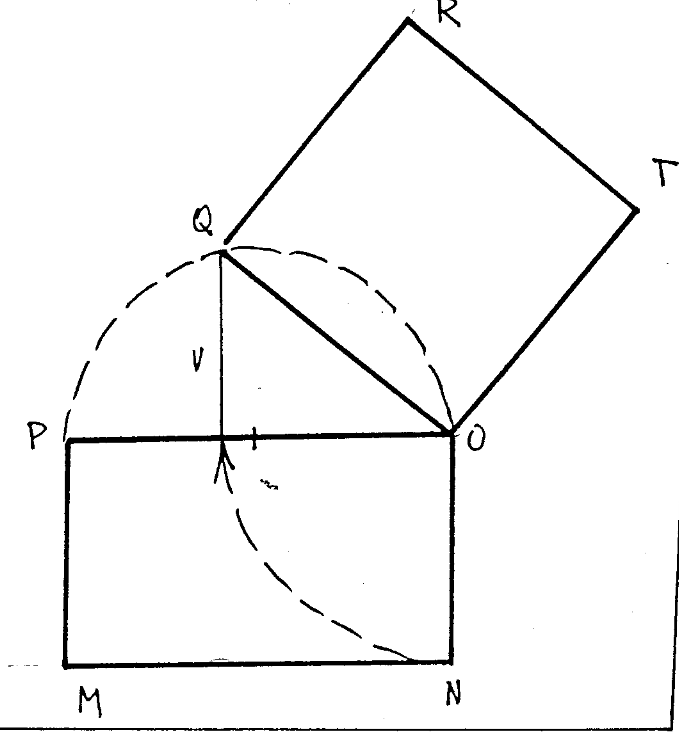


Příklad 17 (text stejný jako u př. 14).



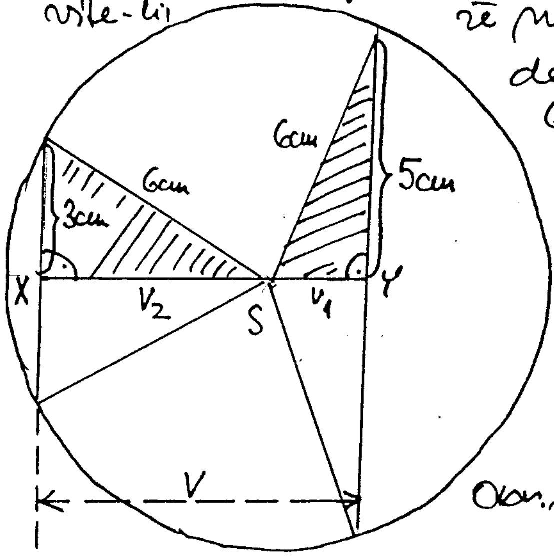
Konstrukce pomocí E. věty o výšce.

Konstrukce pomocí E. věty o odvěsně.



DALŠÍ ROZLIČNÉ ÚLOHY NA Pyth. větu

Příklad 18: Dvě rovnoběžné tětivy v kružnici s poloměrem $r = 10$ cm mají určitou vzdálenost. Vypočítejte ji, víte-li, že mají délky 6cm a 10cm



Obr. 1

1. možnost (obr. 1)

$v_1 = \sqrt{6^2 - 5^2}$ $\quad v_2 = \sqrt{6^2 - 3^2}$

$v_1 = \sqrt{11}$ $\quad v_2 = \sqrt{27}$

$v = |XY| = v_1 + v_2 = \sqrt{11} + \sqrt{27} \doteq \boxed{8{,}5 (cm)}$

2. možnost (obr. 2

$w = \sqrt{27} - \sqrt{11} \doteq \boxed{1{,}9 (cm)}$