14b) KVADRATICKÉ NEROVNICE

Definice: Zápisy $ax^2+bx+c>0$ $\quad ax^2+bx+c<0$

$ax^2+bx+c\geqq 0$ $\quad ax^2+bx+c\leqq 0$,

kde $a,b,c\in R$, $a\neq 0$, se nazývají kvadratické nerovnice s neznámou x.

Při jejich řešení můžeme kromě vzorce $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ použít těchto věty: ① Vyjádříme-li kvadratickou rovnici $ax^2+bx+c=0$ v normovaném tvaru $x^2+px+q=0$, pak platí: $x_1+x_2=-p$, $x_1\cdot x_2=q$, $(x-x_1)\cdot(x-x_2)=0$

② Pro kvadratickou rovnici zapsanou ve tvaru $ax^2+bx+c=0$ platí: $x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$, $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$, $ax^2+bx+c=a(x-x_1)\cdot(x-x_2)$

Příklad 1: Řešte nerovnici $x^2+3x+3\geqq 2x+9$.

Řešení: 1) Nerovnici upravíme: $x^2+x-6\geqq 0$.

2) Napíšeme kvadratickou rovnici $x^2+x-6=0$ a vyřešíme ji některým ze známých způsobů, například:

a) $x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+24}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{25}}{2}=\frac{-1\pm 5}{2}$ $\left\langle \begin{array}{l} x_1=-3 \\ x_2=2 \end{array}\right.$

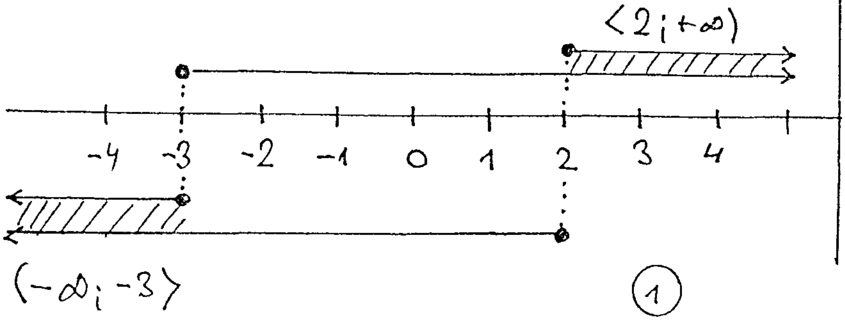
b) pomocí věty ①: $x_1+x_2=-1 \wedge x_1\cdot x_2=6$, výsledek lze určit i zpaměti: $x_1=-3$, $x_2=2$.

3) S využitím věty ① lze psát $x^2+x-6=(x+3)\cdot(x-2)$ a danou nerovnici zapíšeme

$(x+3)\cdot(x-2)\geqq 0$ a vyřešíme už známým postupem:

$(x+3\geqq 0 \wedge x-2\geqq 0) \vee (x+3\leqq 0 \wedge x-2\leqq 0)$

$(x\geqq -3 \wedge x\geqq 2) \vee (x\leqq -3 \wedge x\leqq 2)$



4) Ověření: např. pro $x=-3$

$L(-3)=(-3)^2+3(-3)+3=3$

$P(-3)=2(-3)+9=3$

$L(3)\geqq P(3)$

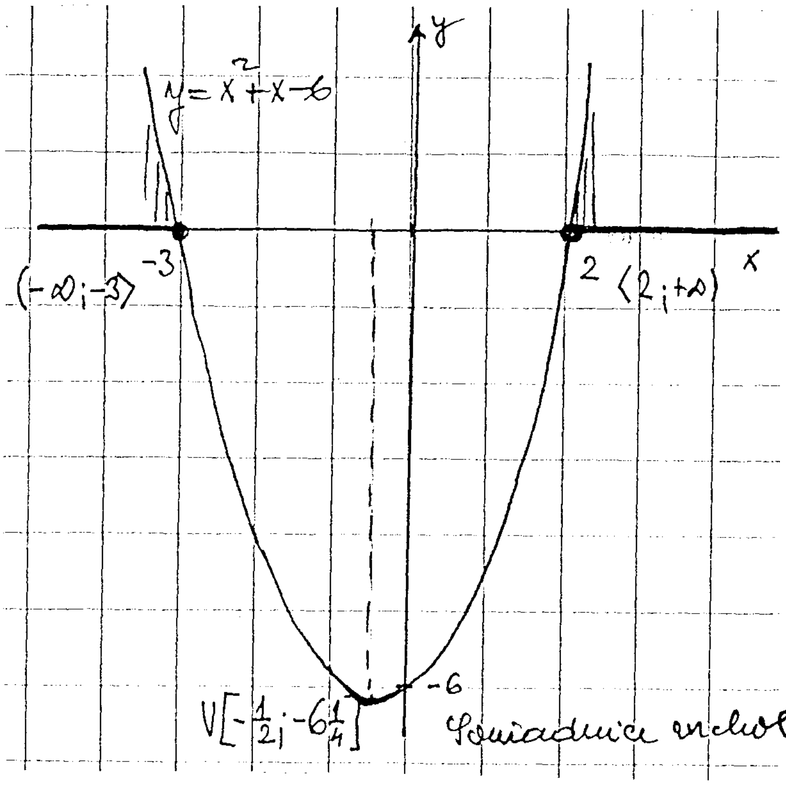
pro $x=4$

$L(4)=4^2+3.4+3=31$

$P(4)=2.4+9=17$

$L(4)\geqq P(4)$

5) Lze provést též grafickou interpretaci řešení (viz obr.)



Poznámka: K výsledku řešení nerovnice $x^2+x-6 \geqq 0$ lze po zjištění, že $x_1=-3, x_2=2$, dospět rychleji

$+1x^2+x-6 \geqq 0$

↓

+1 je kladné číslo, graf má orientaci ∪, proto řešením je:

$\boxed{P=(-\infty;-3\rangle \cup \langle 2;+\infty)}$

Souřadnice vrcholu: $V\left[-\frac{b}{2a}; c-\frac{b^2}{4a}\right]$.

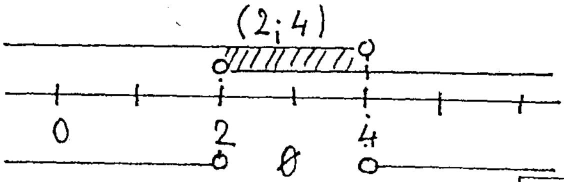
Příklad 2: Řešte nerovnici $x^2-6x+8<0$.

Řešení: $\left.\begin{matrix} x_1+x_2=-(-6) \\ x_1\cdot x_2=8 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left< \begin{matrix} x_1=2 \\ x_2=4 \end{matrix} \right\} x^2-6x+8=(x-2)\cdot(x-4)$

$(x-2)\cdot(x-4)<0$

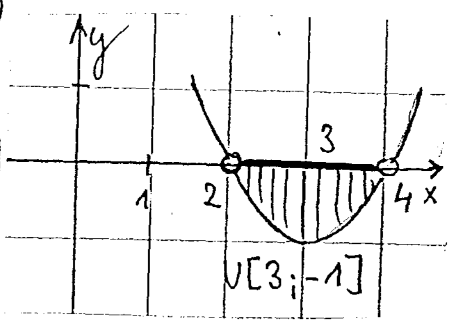
$(x-2>0 \wedge x-4<0) \vee (x-2<0 \wedge x-4>0)$

$(x>2 \wedge x<4) \vee (x<2 \wedge x>4)$



$V\left[-\frac{-6}{2}; 8-\frac{36}{4}\right]$

$V[3;-1]$



Nerovnice má řešení: $\boxed{P=(2;4)}$.

Příklad 3: Řešte nerovnici: a) $x^2-6x+9<0$.

Řešení: $x_1+x_2=-(-6) \wedge x_1\cdot x_2=9 \Rightarrow x_1=x_2=3$

$(x-3)\cdot(x-3)<0$

$(x-3)^2<0$

Výraz na levé straně nerovnice je vždy kladné číslo, a to není menší než 0. Proto daná nerovnice nemá řešení, čili $\boxed{P=\emptyset}$, viz dále graf.

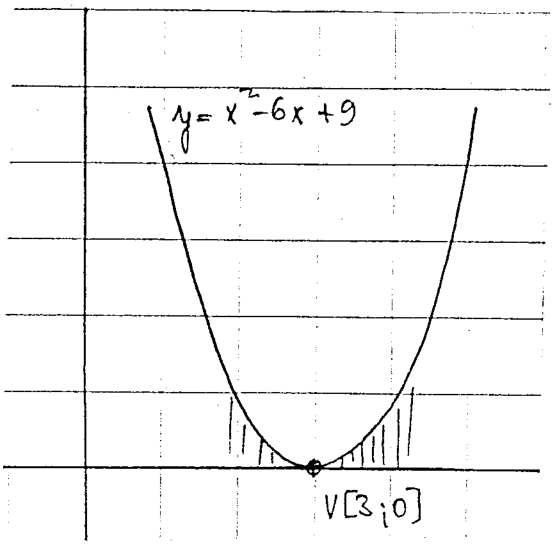
b) $x^2-6x+9\leqq 0$ Daná nerovnice platí jen pro $x=3$

$(x-3)^2\leqq 0$ $\boxed{P=\{3\}}$, viz dále graf b)

c) $x^2-6x+9>0$ Daná nerovnice platí pro každé

$(x-3)^2>0$ $x\in R$, $\boxed{P=R}$, viz graf c)

$V[-\frac{-6}{2}; 9-\frac{34}{4}]\ldots V[3;0]$



a) Žádná hodnota y funkce $y=x^2-6x+9$ není záporná.

b) Pouze pro $x=3$ je hodnota funkce $y=x^2-6x+9$ menší, nebo rovna 0 (v našem případě $=0$).

c) Pro každou hodnotu $x\in R$ platí, že hodnota funkce $y=x^2-6x+9$ je větší než 0.

Příklad 4: Řešte nerovnici $-2x^2+13x-15>0$ $[2x^2-13x+15<0]$.

Řešení: $-2x^2+13x-15=0 \mid \cdot(-1)$

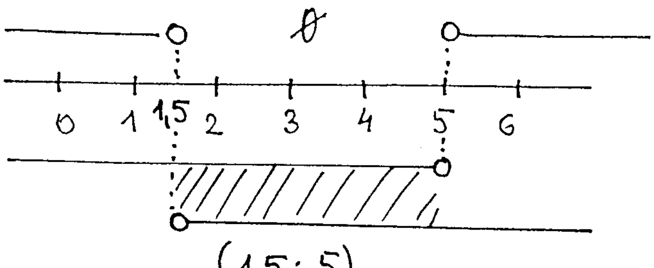
$$2x^2-13x+15=0$$

$$x_{1,2}=\frac{13\pm\sqrt{169-120}}{4}=\frac{13\pm 7}{4}=\begin{cases}5\\1{,}5\end{cases}$$

$(x-5)\cdot(x-1{,}5)<0$

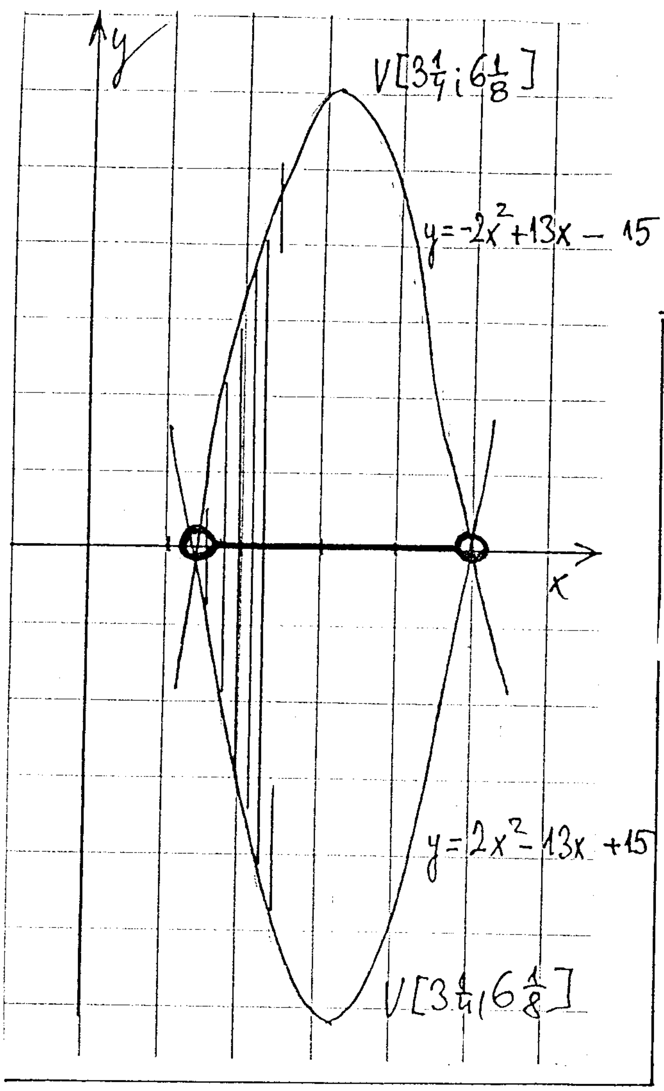
$(x-5>0 \wedge x-1{,}5<0) \vee (x-5<0 \wedge x-1{,}5>0)$

$(x>5 \wedge x<1{,}5) \vee (x<5 \wedge x>1{,}5)$



Řešení: $\boxed{P=(1{,}5;5) \text{ nebo } K=(1{,}5;5)}$

Ukažme si na grafu, že nerovnice $-2x^2+13x-15>0$ a $2x^2-13x+15<0$ mají stejné řešení.



$V_1\left[-\frac{13}{-4}; -15-\frac{169}{-8}\right]$

$V_1=\left[3\frac{1}{4}; 6\frac{1}{8}\right]$, V_2 obdobně

$V_2=\left[3\frac{1}{4}; -6\frac{1}{8}\right]$

Příklad 5: Řešte nerovnice v daném intervalu, výsledek zapište v množinách,

a) $x^2-\frac{7}{2}x+2 \leqq 0$ v $\left\langle -\frac{3}{2}; 2\right)$

Řešení:

$x^2-\frac{7}{2}x+2 \leqq 0 \quad | \cdot 2$

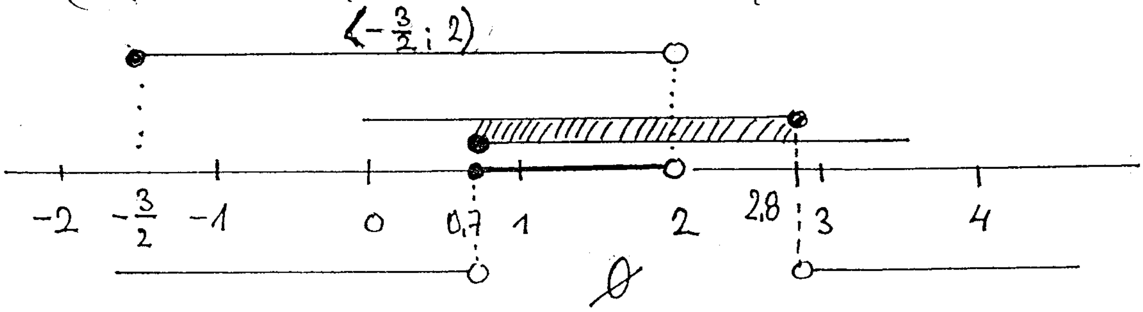
$2x^2-7x+4 \leqq 0$

$$x_{1,2}=\frac{7\pm\sqrt{49-32}}{4}=\frac{7\pm\sqrt{17}}{4}= \begin{cases} \frac{7+\sqrt{17}}{4} \\ \frac{7-\sqrt{17}}{4} \end{cases}$$

$\underbrace{x_1 \doteq 2{,}78, \quad x_2 = 0{,}719\ldots}_{\text{zaokrouhlené hodnoty}}$ $x_1=2{,}8,\ x_2 \doteq 0{,}7$

$(x-2{,}8 \leqq 0 \wedge x-0{,}7 \geqq 0) \vee (x-2{,}8 \geqq 0 \wedge x-0{,}7 \leqq 0)$

$(x \leqq 2{,}8 \wedge x \geqq 0{,}7) \vee (x \geqq 2{,}8 \wedge x \leqq 0{,}7)$



Poznámka: Podle poznámky nasl. 19 v předm. otázce 13a) stačilo použít při znaku < jen průnik, tedy

$x \leqq 2{,}8 \wedge x \geqq 0{,}7$ a pak vzít za výsledek průnik intervalů $\langle 0{,}7; 2{,}8\rangle \cap \left\langle -\frac{3}{2}; 2\right)$, tj. $\langle 0{,}7; 2)$

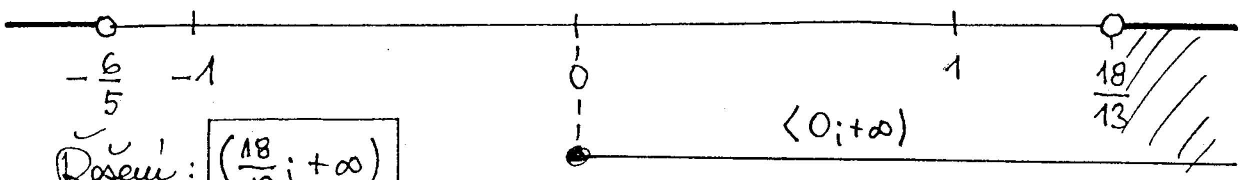
Řešení: $\boxed{K=\langle 0{,}7; 2)}$

b) $65x^2-12x-108>0$ v $\langle 0;+\infty)$

$65x^2-12x-108=0$

$$x_{1,2}=\frac{12\pm\sqrt{12^2+28080}}{130}=\frac{12\pm168}{130}=\begin{cases}\frac{180}{130}=\frac{18}{13}\ (\doteq 1{,}4)\\ -\frac{156}{130}=-\frac{6}{5}\ (\doteq -1{,}2)\end{cases}$$

Použít znak $>$, protože jde o sjednocení intervalů.



Řešení: $\boxed{\left(\frac{18}{13};+\infty\right)}$

---

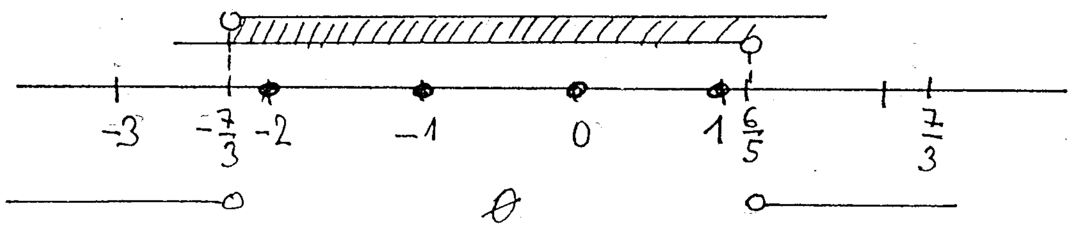
c) $15x^2+17x-42<0$ v množině Z

$15x^2+17x-42=0$

$$x_{1,2}=\frac{-17\pm\sqrt{2809}}{30}=\frac{-17\pm53}{30}=\begin{cases}\frac{36}{30}=\frac{6}{5}\\ -\frac{70}{30}=-\frac{7}{3}\end{cases}$$ Využijeme větu 2 na str. 1

$15x^2+17x-42=15\left(x+\frac{7}{3}\right)\cdot\left(x-\frac{6}{5}\right)$

$15\left(x+\frac{7}{3}\right)\cdot\left(x-\frac{6}{5}\right)<0$ ... jde o průnik intervalů



15 je kladné číslo, proto $\left(x+\frac{7}{3}\right)\cdot\left(x-\frac{6}{5}\right)$ musí být záporné číslo

$\left(x+\frac{7}{3}>0 \wedge x-\frac{6}{5}<0\right) \vee \left(x+\frac{7}{3}<0 \wedge x-\frac{6}{5}>0\right)$

$\left(x>-\frac{7}{3} \wedge x<\frac{6}{5}\right) \vee \left(x<-\frac{7}{3} \wedge x>\frac{6}{5}\right)$

Řešení: $\boxed{x\in\{-2,-1,0,1\}}$

---

d) $x^2 - x - 20 \leqq 0 \quad v \ N \qquad \ldots \ x^2 - x - 20 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+80}}{2} = \frac{1 \pm 9}{2} = \begin{cases} 5 \\ -4 \end{cases}$$

Protože je použit znak <, jde o uzavřených intervalech.

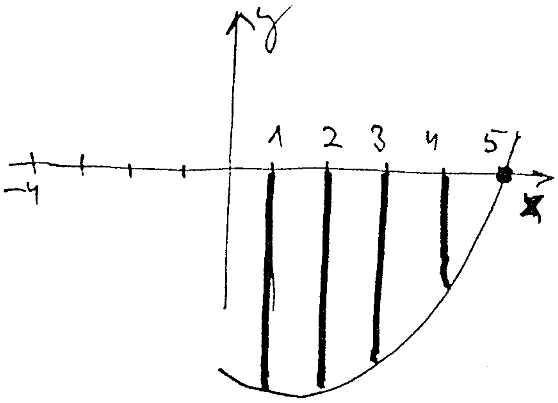
$(x-5)\cdot(x+4) \leqq 0$

$(x-5 \geqq 0 \wedge x+4 \leqq 0) \quad \vee \quad (x-5 \leqq 0 \wedge x+4 \geqq 0)$

$(x \geqq +5 \wedge x \leqq -4) \qquad \underbrace{x \leqq 5 \quad \wedge \quad x \geqq -4}$

$x \in \langle -4; 5 \rangle$ a v tomto intervalu jsou tato přirozená čísla 1, 2, 3, 4, 5

$x \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$



Příklad 6: Řešte nerovnice

a) $x^2 - 14x + 55 \geqq 0 \qquad x^2 - 14x + 55 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{14 \pm \sqrt{-24}}{2}$$

Protože D = −24 nelze nerovnici řešit dřívějším postupem. Musíme hledat jinou cestu:

$x^2 - 14x + 55 = 0 \qquad \left(\frac{14}{2}\right)^2 = 49 \ ; \ 49 + x = 55$

$x = 6$

$(x^2 - 14x + 49) + 6 = 0$

$(x-7)^2 + 6 = 0$

$(x-7)^2 + 6 \geqq 0$

Výraz $(x-7)^2$ je kladný nebo nula pro každé $x \in R$. Přičteme-li k němu 6, je opět $\geqq 0$

$\boxed{K = R}$

b) $-4x^2+12x-9 \leqq 0 \quad /\cdot(-1)$

$$4x^2-12x+9 \geqq 0$$

$$(2x-3)^2 \geqq 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{K=R}$$

---

c) $3x^2+4x+2 \leqq 0 \qquad D=16-24=-8<0$

Proto zvolíme jiný postup:

$$3x^2+4x+2=0$$

$$3\left(x^2+\frac{4}{3}x+\frac{2}{3}\right)=0$$

$$\left(\frac{4}{3}:2\right)^2=\left(\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{2}\right)^2=\left(\frac{4}{6}\right)^2=\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$$

$$\frac{4}{9}+x=\frac{2}{3}$$

$$x=\frac{2}{3}-\frac{4}{9}=\frac{2}{9}$$

$$3\left(\underbrace{x^2+\frac{4}{3}x+\frac{4}{9}}+\frac{2}{9}\right)=0$$

$$3\left[\left(x+\frac{2}{3}\right)^2+\frac{2}{9}\right]=0$$

$$3\left[\underbrace{\left(x+\frac{2}{3}\right)^2}_{+}+\underbrace{\frac{2}{9}}_{+}\right] \leqq 0$$

Výraz na levé straně nerovnice je vždy >0, pro $x \in \emptyset$ ... $\boxed{K=\emptyset}$.

Nerovnice nemá řešení.

Příklad 7: Řešte kvadr. nerovnici s absolutní hodnotou

a) $x^2-5|x|+6<0$

Pro $x \geqq 0$ ... $x^2-5x+6<0$

$$x^2-5x+6=0$$

$$x_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{25-24}}{2}=\frac{5\pm 1}{2}=\left\langle\begin{matrix}3\\2\end{matrix}\right.$$

$$(x-3)\cdot(x-2)<0$$

$$(x-3>0 \wedge x-2<0) \vee (x-3<0 \wedge x-2>0)$$

$$\underbrace{(x>3 \wedge x<2)}_{\emptyset} \vee \underbrace{(x<3 \wedge x>2)}_{K_1=(2;3)}$$

Pro $x<0$ ... $x^2-5(-x)+6<0$

$$x^2+5x+6<0$$

$$x^2+5x+6=0$$

$$x_{1,2}=\frac{-5\pm 1}{2}=\left\langle\begin{matrix}-3\\-2\end{matrix}\right.$$

$$(x+3)\cdot(x+2)<0$$

$$(x+3>0 \wedge x+2<0) \vee (x+3<0 \wedge x+2>0)$$

$$\underbrace{(x>-3 \wedge x<-2)}_{K_2=(-3;-2)} \vee \underbrace{(x<-3 \wedge x>-2)}_{\emptyset}$$

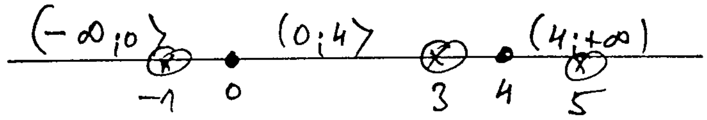
$$K=K_1 \cup K_2$$

$$\boxed{K=(-3;-2)\cup(2;3)}$$

7 Správnost jsem ověřil.

b) $|x^2-4x|<5$ Nulové body $x=0$, $x=4$

$|x(x-4)|<5$



x	$(-\infty;0\rangle$	$\langle 0;4\rangle$	$(4;+\infty)$
x^2-4x	$+$	$-$	$+$
$\lvert x^2-4x\rvert$	x^2-4x	$-x^2+4x$	x^2-4x

1. interval:

$x^2-4x<5$

$x^2-4x-5<0$

$x^2-4x-5=0$

$x_{1,2}=\dfrac{4\pm\sqrt{16+20}}{2}=\begin{cases}5\\-1\end{cases}$

$(x-5)\cdot(x+1)<0 \iff (x-5>0 \wedge x+1<0) \vee (x-5<0 \wedge x+1>0)$

$\underbrace{(x>5 \wedge x<-1)}_{\emptyset} \vee \underbrace{(x<5 \wedge x>-1)}_{K_1=(-1;5)}$

2. interval:

$-x^2+4x<5$

$-x^2+4x-5<0$

$x_{1,2}=\dfrac{4\pm\sqrt{16-20}}{2}$

$x\in\emptyset$

3. interval má též řešení $K_1=(-1;5)$

Daná nerovnice má řešení $\boxed{K=(-1;5)}$

Následující úlohy ze sbírky pro OA ze str. 43 a 44 (jen výběr)

Příklad 8:

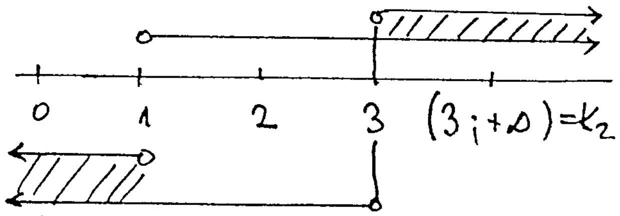
1a/1430A: Pro která x jsou dané výrazy kladné?

a) $(x-1)(x-3)$ ... to zapíšeme

$(x-1)\cdot(x-3)>0$

$(x-1>0 \wedge x-3>0) \vee (x-1)<0 \wedge (x-3)<0)$

$(x>1 \wedge x>3) \vee (x<1 \wedge x<3)$



$K=K_1\cup K_2=$

$\boxed{K=(-\infty;1)\cup(3;+\infty)}$

$K_1=(-\infty;1)$

1b/430A: $(x+2)\cdot(x-4)>0$

$(x+2>0 \land x-4>0) \lor (x+2<0 \land x-4<0)$

$\underbrace{(x>-2 \land x>4)} \lor \underbrace{(x<-2 \land x<4)}$

$K_2=(4;+\infty) \quad \lor \quad K_1=(-\infty;-2)$

$\boxed{K=(-\infty;-2)\cup(4;+\infty)}$

1c/430A: $(x+3)\cdot(x+2)>0$

$(x+3>0 \land x+2>0) \lor (x+3<0 \land x+2<0)$

$\underbrace{(x>-3 \land x>-2)} \lor \underbrace{(x<-3 \land x<-2)}$

$K_2=(-2;+\infty \qquad K_1=(-\infty;-3)$

$\boxed{K=(-\infty;-3)\cup(-2;+\infty)}$

1d/430A: $(x-5)(x+1)>0$

$(x-5>0 \land x+1>0) \lor (x-5<0 \land x+1<0)$

$\underbrace{(x>5 \land x>-1)} \lor \underbrace{(x<5 \land x<-1)}$

$K_2=(5;+\infty) \qquad K_1=(-\infty;-1)$

$\boxed{K=(-\infty;-1)\cup(5;+\infty)}$

2a/430A: $(x-1)\cdot(x+2)$ ... dopíšeme nerovnici

$(x-1)\cdot(x+2)<0$

$(x-1>0 \land x+2<0) \lor (x-1<0 \land x+2>0$

$\underbrace{(x>1 \land x<-2)} \lor \underbrace{x<1 \land x>-2}$

$K_2=\emptyset \qquad K_1=(-2;1)$

$K=\emptyset\cup K_1=(-2;1) \qquad \boxed{K=(-2;1)}$

2b/430A: $(x+3)(x-1)<0$

$(x+3>0 \land x-1<0) \lor (x+3<0 \land x-1>0)$

$\underbrace{(x>-3 \land x<1)} \lor \underbrace{(x<-3 \land x>1)}$

$K_1=(-3;1) \qquad K_2=0 \qquad \boxed{K=(-3;1)}$

3a/144 OA:

$$x^2-5x+6 \geqq 0 \qquad x_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{25-24}}{2}=\frac{5\pm 1}{2}=\left\langle \begin{matrix}3\\2\end{matrix}\right.$$

$$(x-3).(x-2)\geqq 0$$

$$(x-3\geqq 0 \wedge x-2\geqq 0) \vee (x-3\leqq 0 \wedge x-2\leqq 0)$$

$$\underbrace{(x\geqq 3 \wedge x\geqq 2)}_{K_2\langle 3;+\infty)} \vee \underbrace{(x\leqq 3 \wedge x\leqq 2)}_{K_1=(-\infty;2\rangle}$$

$$K_2\langle 3;+\infty) \cup K_1=(-\infty;2\rangle \qquad \boxed{K=(-\infty;2\rangle \cup \langle 3;+\infty)}$$

3c/144 OA:

$$x^2+4x+3\leqq 0 \qquad x^2+4x+3=0$$

$$x_{1,2}=\frac{-4\pm\sqrt{16-12}}{2}=\frac{-4\pm 2}{2}=\left\langle \begin{matrix}-3\\-1\end{matrix}\right.$$

$$(x+3\geqq 0 \wedge x+1\leqq 0) \vee (x+3\leqq 0 \wedge x+1\geqq 0)$$

$$\underbrace{(x\geqq -3 \wedge x\leqq -1)}_{K_1=\langle -3;-1\rangle} \vee \underbrace{(x\leqq -3 \wedge x\geqq -1)}_{K_2=\emptyset}$$

$$K_1=\langle -3;-1\rangle \cup K_2=\emptyset \qquad \boxed{K=\langle -3;-1\rangle}$$

4a/144 OA:

$$3x^2-19x+6<0 \qquad 3x^2-19x+6=0$$

$$x_{1,2}=\frac{19\pm\sqrt{19^2-72}}{6}=\frac{19\pm 17}{6}=\left\langle \begin{matrix}6\\ \frac{1}{3}\end{matrix}\right.$$

$$(x-6)\cdot\left(x-\frac{1}{3}\right)<0$$

$$\left(x-6<0 \wedge x-\frac{1}{3}>0\right) \vee \left(x-6>0 \wedge x-\frac{1}{3}<0\right)$$

$$\underbrace{\left(x<6 \wedge x>\frac{1}{3}\right)}_{K_1=\left(\frac{1}{3};6\right)} \vee \underbrace{\left(x>6 \wedge x<\frac{1}{3}\right)}_{K_2=\emptyset}$$

$$K_1=\left(\frac{1}{3};6\right) \cup K_2=\emptyset \qquad \boxed{K=\left(\frac{1}{3};6\right)}$$

5a/144 OA: Podle příkladu 6 na str. 6

$$x^2+5x+14\geqq 0 \qquad x^2+5x+14=0$$

$$x_1=\frac{-5\pm\sqrt{25-56}}{2}=\frac{-5\pm\sqrt{-31}}{2}$$

Protože $D<0$, tak nelze řešit dřívějším postupem. Číslo 14 musíme rozdělit na 2 čísla tak, aby šlo pomocí vytvořit kvadrat. trojčlen.

To provedeme takto:

$$\left(\frac{5}{2}\right)^2=\frac{25}{4}$$

$$14=\frac{25}{4}+x$$

$$x=14-\frac{25}{4}$$

$$x=\frac{31}{4}$$

$\underbrace{x^2+5x+\frac{25}{4}}+\frac{31}{4}\geqq 0$

$\sqrt{x^2} \qquad \sqrt{\frac{25}{4}}$

$\underbrace{\left(x+\frac{5}{2}\right)^2}+\frac{31}{4}\geqq 0$

Druhá mocnina je vždy kladné číslo.

Kladné číslo $+\frac{31}{4}$ je vždy kladné číslo. Proto nerovnici vyhovuje každé $x \in R$.

$\boxed{K=R}$

5b1440A

$3x^2+7x+15\leqq 0 \qquad |\cdot\frac{1}{3}$

nejdříve dělme číslem 3 nebo násobme $\frac{1}{3}$

$3x^2+7x+15=0$

$D=b^2-4ac = 49-180=-131$

$D<0$, proto zvolíme stejný (obdobný) postup jako v předchozím příkladu.

$x^2+\frac{7}{3}x+5\leqq 0$

$\left(\frac{7}{3}:2\right)^2=\left(\frac{7}{3}\cdot\frac{1}{2}\right)^2=\frac{49}{36} \quad \ldots \quad \frac{49}{36}+x=5 \ldots x=5-\frac{49}{36}=\frac{131}{36}$

$\underbrace{x^2+\frac{7}{3}x+\frac{49}{36}}+\frac{131}{36}\leqq 0$

$\underbrace{\left(x-\frac{7}{6}\right)^2}_{+}+\underbrace{\frac{131}{36}}_{+}\leqq 0$

Výraz na levé straně nerovnice je kladný a nemůže být menší, nebo rovno 0. Nerovnice nemá řešení, čili $\boxed{K=\emptyset}$.

6a1440A

$21-29x\geqq 2(3-2x)^2$

$21-29x\geqq 2(9-12x+4x^2)$

$21-29x\geqq 18-24x+8x^2$

$8x^2+5x-3\leqq 0$

$8x^2+5x-3\leqq 0$

$x_{1,2}=\frac{-5\pm\sqrt{121}}{16}= \begin{cases}-1\\ \frac{3}{8}\end{cases}$

$(x+1)\cdot\left(x-\frac{3}{8}\right)\leqq 0$

$\left(x+1\geqq 0 \wedge x-\frac{3}{8}\leqq 0\right) \vee \left(x+1\leqq 0 \wedge x-\frac{3}{8}\geqq 0\right)$

$\underbrace{\left(x\geqq -1 \wedge x\leqq\frac{3}{8}\right)}_{\langle -1;\frac{3}{8}\rangle} \vee \underbrace{\left(x\leqq -1 \wedge x\geqq\frac{3}{8}\right)}_{\emptyset}$

Řešení: $\boxed{K=\langle -1;\frac{3}{8}\rangle}$

Ověříme správnost např. pro $x=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}=0{,}25$

$L=21-29\cdot 0{,}25=13{,}75 \ldots P=2(3-2\cdot 0{,}25)^2=12{,}5$

$13{,}75\geqq 12{,}5 \ldots L\geqq P$

6a 1440A:

$21-29x \geqq 2(3-2x)^2$

$21-29x \geqq 2(9-12x+4x^2)$

$21-29x \geqq 18-24x+8x^2$

$\underline{8x^2+5x-3 \leqq 0}$ → $8x^2+5x-3=0$

$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25+96}}{16} = \frac{-5 \pm 11}{16} = \left\langle \begin{matrix} -1 \\ \frac{3}{8} \end{matrix} \right.$

$(x+1)\cdot(x-\frac{3}{8}) \leqq 0$

$(x+1 \geqq 0 \wedge x-\frac{3}{8} \leqq 0) \vee (x+1 \leqq 0 \wedge x-\frac{3}{8} \geqq 0)$

$\underbrace{(x \geqq -1 \wedge x \leqq \frac{3}{8})}_{K_1 = \langle -1; \frac{3}{8} \rangle} \cup \underbrace{(x \leqq -1 \wedge x \geqq \frac{3}{8})}_{K_2 = \emptyset}$ $\boxed{K = \langle -1; \frac{3}{8} \rangle}$

Ověření správnosti: např. pro $x = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} = 0{,}25$ platí:

$L = 21 - 29 \cdot 0{,}25 = 13{,}75 \ \dots \ P = 2(3-2\cdot 0{,}25)^2 = 2\cdot(3-0{,}5)^2 = 12{,}5$; $L \geqq P$

Další příklady z jiných zdrojů (náročnější)

Příklad 9:

a) $x^3 > x$

$x^3 - x > 0$

$x(x^2-1) > 0$

$x(x-1)\cdot(x+1) > 0$

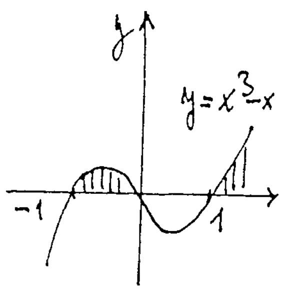
Nulové body:
$x=0, x=1, x=-1$

$(-\infty;-1)$ $(-1;0)$ $(0;1)$ $(1,\infty)$

-2 -1 $-0{,}5$ 0 $0{,}5$ 1 2

je větší než 0

	$(-\infty;-1)$	$(-1;0)$	$(0;1)$	$(1;\infty)$
x	−	−	+	+
$x-1$	−	−	−	+
$x+1$	−	+	+	+
x^3-x $x(x-1)\cdot(x+1)$	−	+	−	+



$\boxed{K = (-1;0) \cup (1,\infty)}$

---

b) $x^3 + x^2 - 12x \geqq 0$

$\underline{x(x^2+x-12) \geqq 0}$ → $x^2+x-12=0$

$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+48}}{2} = \frac{-1 \pm 7}{2} = \left\langle \begin{matrix} 3 \\ -4 \end{matrix} \right.$

$x(x+4)\cdot(x-3) \geqq 0$ Nulové body: $x=0, x=-4; x=3.$

$(-\infty;-4)$ $\langle -4;0 \rangle$ $\langle 0;3 \rangle$ $\langle 3,\infty)$

-5 -4 -1 0 2 3 4

	$(-\infty; 4)$	$\langle -4; 0 \rangle$	$\langle 0; 3)$	$\langle 3; \infty)$
x	$-$	$-$	$+$	$+$
$x+4$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$-$	$+$
$x^3+x^2-12x \geqq 0$	$-$	$+$	$-$	$+$

$K_1 = \langle -4; 0 \rangle$ $\qquad$ $K_2 = \langle 3; \infty)$

$$\boxed{K = \langle -4; 0 \rangle \cup \langle 3; \infty)}$$