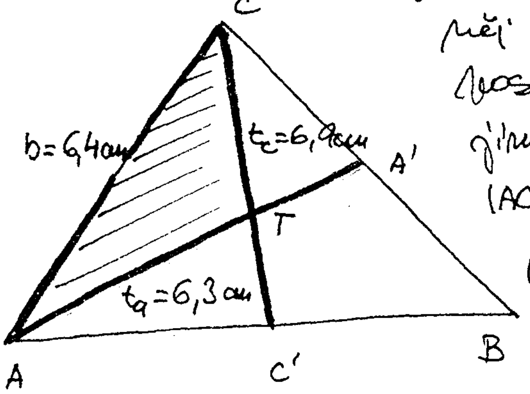
3 b) KONSTRUKCE TROJÚHELNÍKA DANÝCH VLASTNOSTÍ

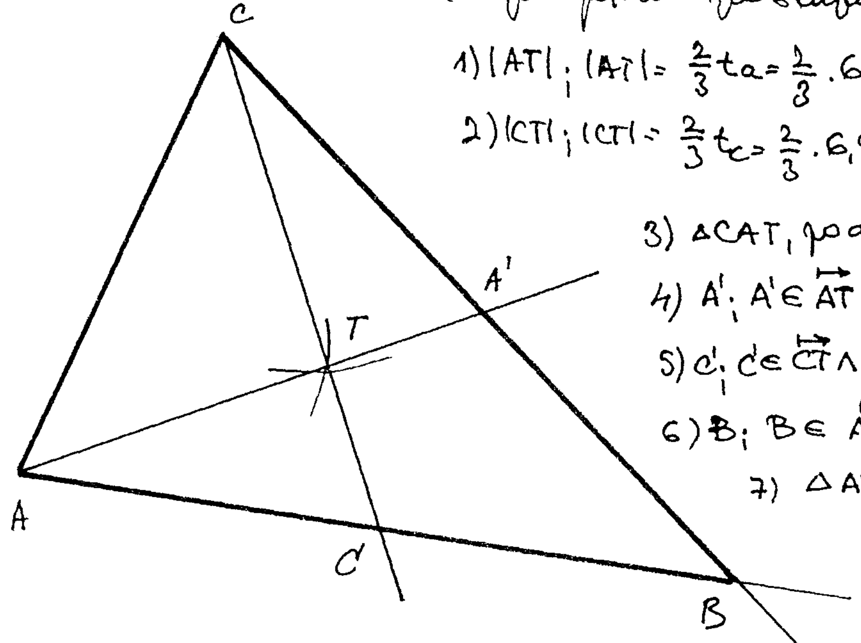
Příklad 1: Sestrojte $\triangle ABC$, je-li $|AC| = b = 6{,}4\,cm$, $t_a = 6{,}3\,cm$, $t_c = 6{,}9\,cm$.

1. Rozbor: Požadovaný $\triangle$ načrtneme od ruky, doplníme do něj dané údaje a hledáme konstrukční postup. V našem případě nejdříve sestrojíme $\triangle CAT$, kde T je těžiště $\triangle$. Platí:



$|AC| = 6{,}4\,cm$, $|AT| = \frac{2}{3} t_a = \frac{2}{3} \cdot 6{,}3\,cm = 4{,}2\,cm$, $|CT| = \frac{2}{3} t_c = \frac{2}{3} \cdot 6{,}9\,cm = 4{,}6\,cm$. $\triangle CAT$ sestrojíme podle věty sss. Pak polopřímku AT a na ni naneseme úsečku (t_a), poté polopřímku CT a na ni naneseme úsečku (t_c). Vzniklé body označíme A', C'. Bod B vznikne jako průsečík polopřímek CA' a AC'. Délky 6,4cm, 4,2cm a 4,6cm vyhovují trojúh. nerovnosti.

2. Konstrukce

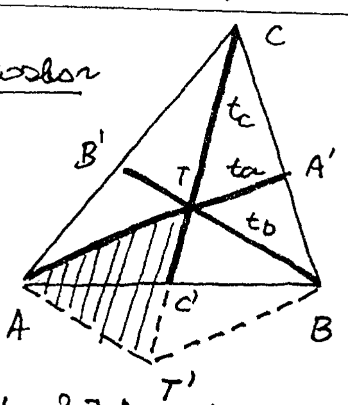


a Zápis jejího postupu:

1) $|AT|$; $|AT| = \frac{2}{3} t_a = \frac{2}{3} \cdot 6{,}3\,cm = 4{,}2\,cm$
2) $|CT|$; $|CT| = \frac{2}{3} t_c = \frac{2}{3} \cdot 6{,}9\,cm = 4{,}6\,cm$
3) $\triangle CAT$, podle věty sss
4) A'; $A' \in \overrightarrow{AT} \wedge |AA'| = t_a = 6{,}3\,cm$
5) C'; $C' \in \overrightarrow{CT} \wedge |CC'| = t_c = 6{,}9\,cm$
6) B; $B \in \overrightarrow{AC'} \cap \overrightarrow{CA'}$
7) $\triangle ABC$

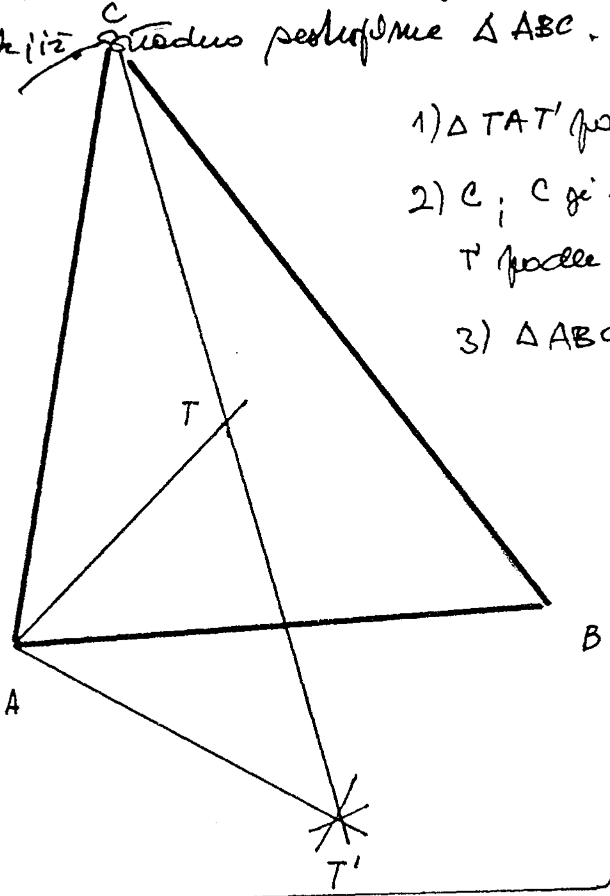
Příklad 2: Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno: $t_a = 6\,cm$, $t_b = 7{,}2\,cm$, $t_c = 8{,}1\,cm$.

1. Rozbor



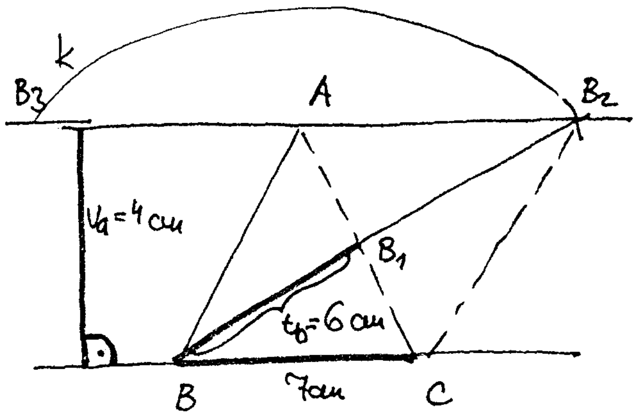
T je těžiště $\triangle ABC$. Bod C' je středem souměrnosti pomocného rovnoběžníku $AT'BT$, je tedy středem úsečky TT'. Délky stran $\triangle TAT'$ jsou: $|AT| = \frac{2}{3} t_a = \frac{2}{3} \cdot 6\,cm = 4\,cm$, $|AT| = \frac{2}{3} t_b = \frac{2}{3} 7{,}2\,cm = 4{,}8\,cm$, $|TT'| = \frac{2}{3} t_c = \frac{2}{3} \cdot 8{,}1\,cm = 5{,}4\,cm$.

Délky 4,8 cm, 7,2 cm a 5,4 cm vyhovují trojúhelníkové nerovnosti. Konstrukci △ABC začneme proto konstrukcí △TAT'. Z něj pak již snadno sestrojíme △ABC.



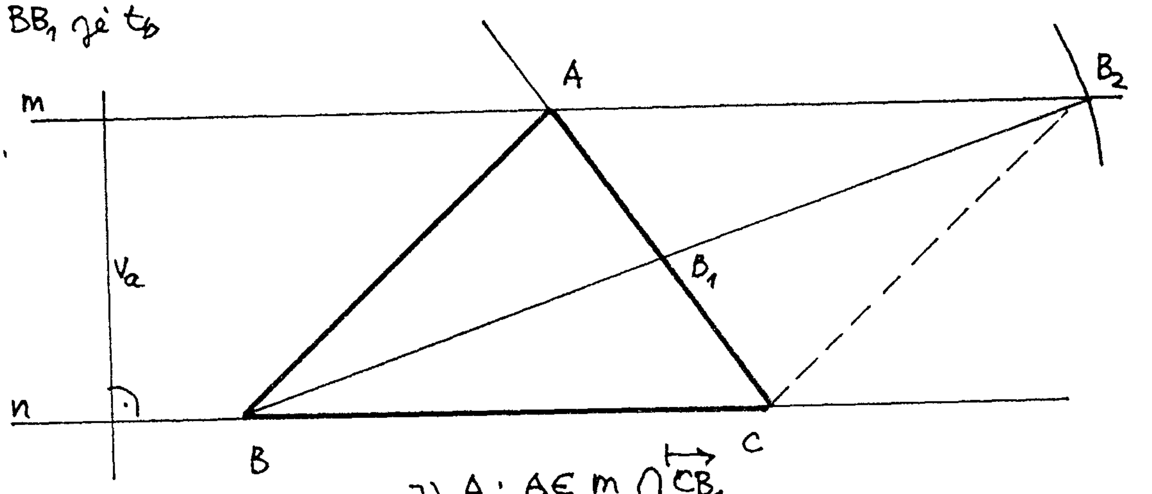
1) △TAT' podle věty sss
2) C; C je bod souměrně sdružený s bodem T' podle středu T
3) △ABC

Příklad 3: Sestrojte △ABC, je-li $|BC| = 7\,cm$, $t_b = 6\,cm$, $v_a = 4\,cm$



Rozbor: △ABC doplníme na rovnoběžník $ABCB_2$, kde BB_1 je t_b

Konstrukce zkr.



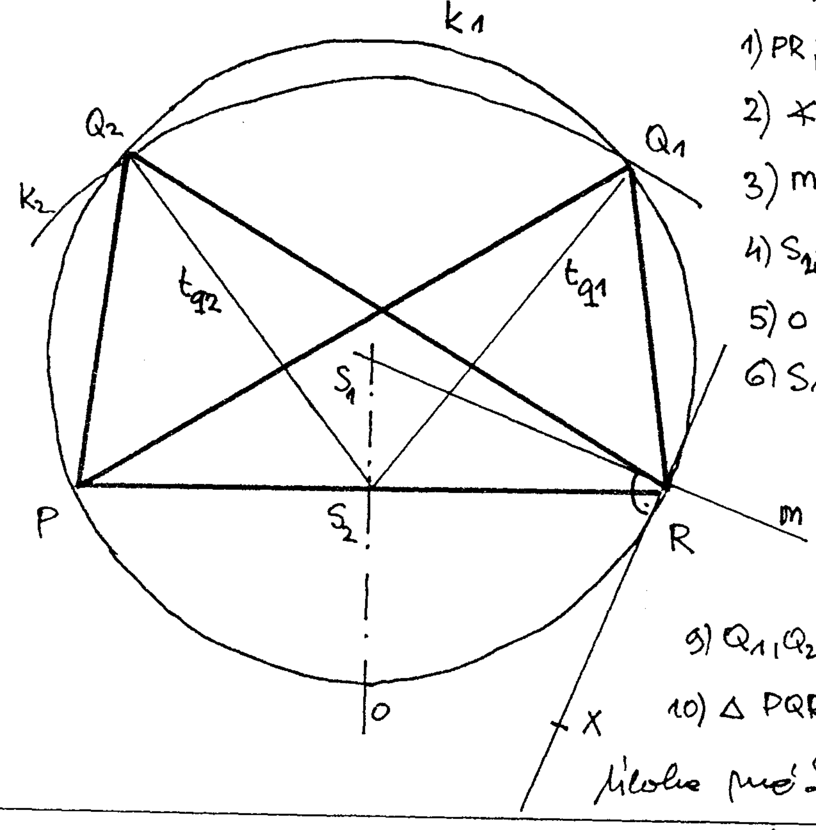
1) BC; $|BC| = 7\,cm$
2) m; $m \parallel \overleftrightarrow{BC} = n$, $|mn| = v_a = 4\,cm$
3) k; $k(B; 2 \cdot t_b) \ldots k(B; 12\,cm)$
4) B_2; $B_2 \in m \cap k$
5) $\triangle BCB_2$
6) B_1; $B_1 \in BB_2 \wedge |BB_1| = |B_1B_2|$
7) A; $A \in m \cap \overrightarrow{CB_1}$
8) △ABC

Poznámka: Bod B_3 v rozboru nevede k řešení.

Příklad 4: Sestrojte $\triangle PQR$, je-li $|PR| = q = 7{,}7\,cm$, $t_q = 5{,}5\,cm$, $|\sphericalangle PQR| = 66°$.

Rozbor: Při konstrukci využijeme vlastnost úsekového úhlu, neboť je dána velikost úhlu proti jedné straně (viz množinová úloha 29b) - úhly).

Konstrukce

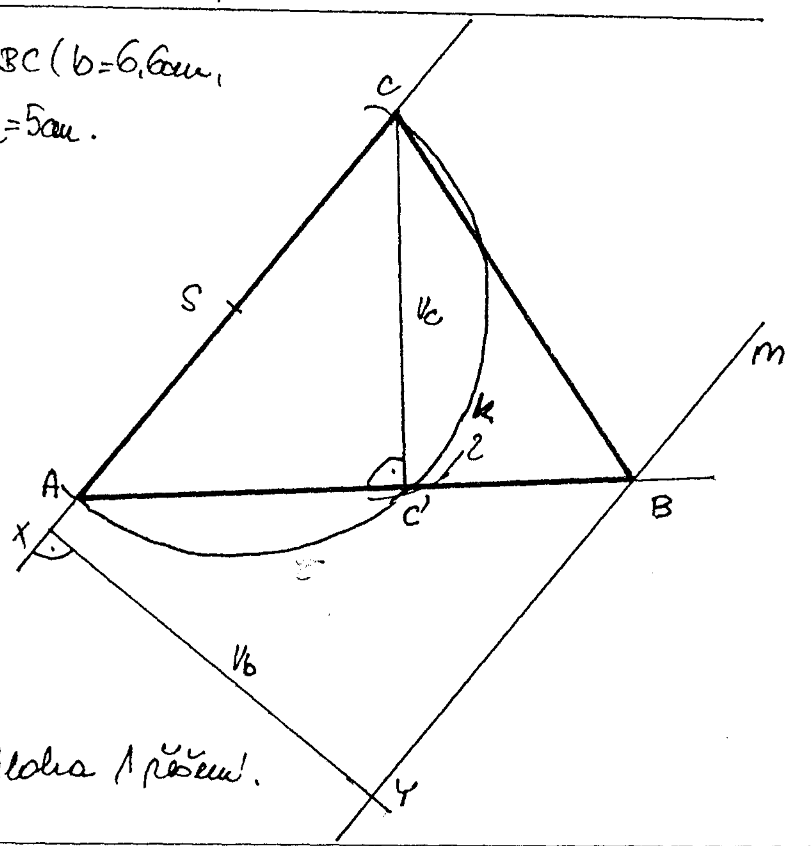


Postup:

1) PR; $|PR| = 7{,}7\,cm$
2) $\sphericalangle XRP$; $|\sphericalangle XRP| = 66°$
3) m; $m \perp \overleftrightarrow{XR} \wedge R \in m$
4) S_2; $S_2 \in PR \wedge S_2P \cong S_2R$
5) o; osa PR
6) S_1; $S_1 \in o \cap m$
7) k_1; $k_1(S_1; |S_1R|)$
8) k_2; $k_2(S_2; t_q)$
$k_2(S_2; 5{,}5)$
9) Q_1, Q_2; $Q_1, Q \in k_1 \cap k_2$
10) $\triangle PQR_1$, $\triangle PQR_2$

Úloha má 2 řešení.

Příklad 5: Sestrojit $\triangle ABC$ ($b = 6{,}6\,cm$, $v_b = 5{,}5\,cm$, $v_c = 5\,cm$).



1) b; $b = |AC| = 6{,}6\,cm$
2) S; $S \in AC \wedge SA \cong SC$
3) k; $k(S; \frac{b}{2} = 3{,}3\,cm)$
4) l; $l(C; v_c = 5\,cm)$
5) C'; $C' \in k \cap l$
6) v_b; $v_b = |XY| = 5{,}5\,cm$
7) m; $m \parallel \overleftrightarrow{AC} \wedge Y \in m$
8) B; $B \in \overrightarrow{AC'} \cap m$
9) $\triangle ABC$

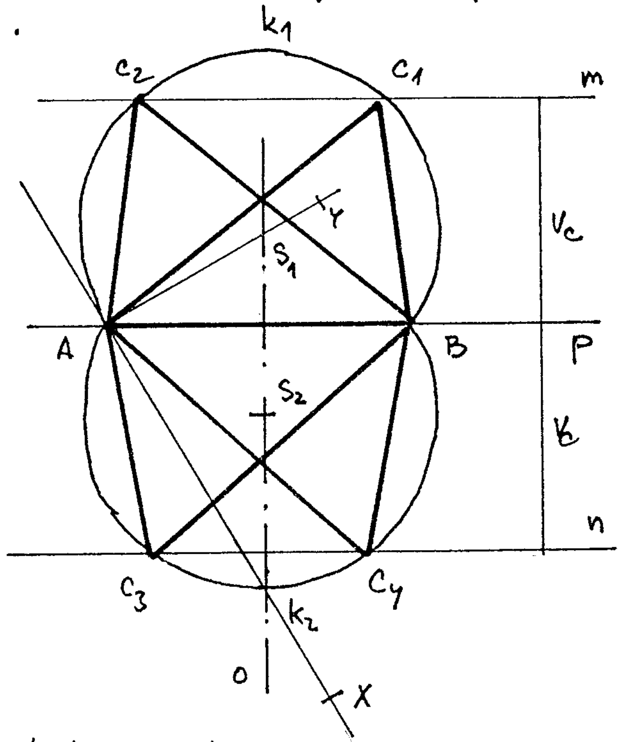
V polorovině ACC' má úloha 1 řešení.

Existuje matematická úmluva, že trojúhelníky sestrojujeme jen v jedné polorovině. Pokud je požadavek sestrojovat je v obou polorovinách, musí to být v úloze požadováno. Tomu odpovídají následující příklady 6, 7

Příklad 6 (1/99-uč.): Je dána úsečka AB, $|AB| = 4cm$. Sestrojte všechny $\triangle ABC$, kde $\gamma = \frac{\pi}{3}$, $v_c = 3cm$.

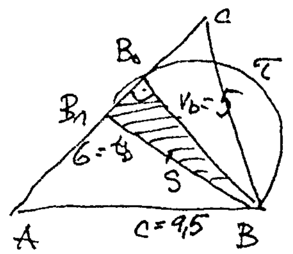
Rozbor a zápis:

$\frac{\pi}{3} \rightarrow 60°$

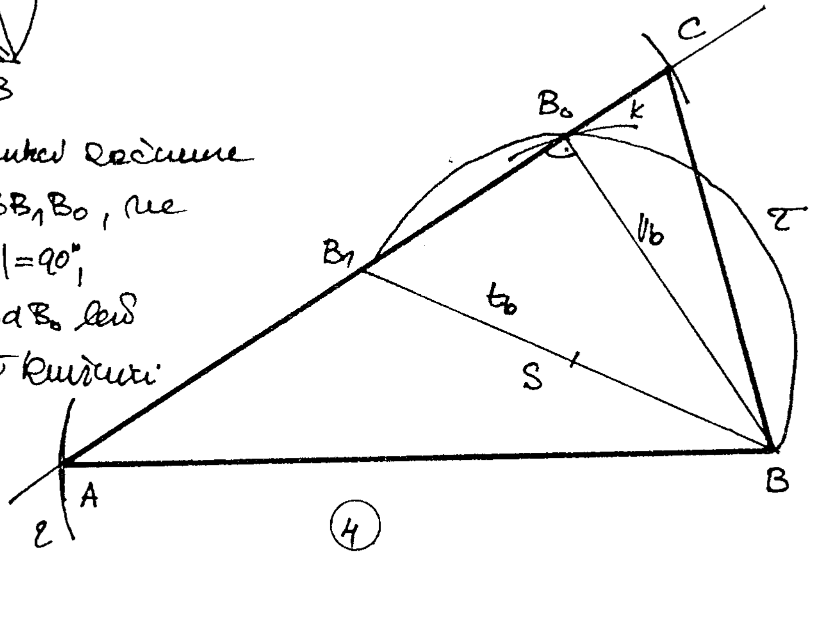


1) AB; $|AB| = 4cm$
2) $\measuredangle BAX$; $|\measuredangle BAX| = 60°$ (úsekový úhel)
3) $\overrightarrow{AY}$; $\overrightarrow{AY} \perp \overleftrightarrow{AX}$
4) o; osa AB
5) S_1; $S_1 \in \overrightarrow{AY} \cap o$
6) S_2; S_2 je souměrně sdružený s S_1 podle $\overleftrightarrow{AB}$
7) k_1; $k_1(S_1; |AS_1|)$
8) k_2; $k_2(S_2; |AS_2|)$
9) m, n; $m \parallel p = \overleftrightarrow{AB}$, $n \parallel p$, $|m, p| = v_c$, $|n, p| = v_c$
10) $m \cap k_1 = \{C_1; C_2\}$, $n \cap k_2 = \{C_3; C_4\}$
11) $\triangle ABC_1$, $\triangle ABC_2$, $\triangle ABC_3$, $\triangle ABC_4$ ... to jsou 4 řešení dané úlohy.

Příklad 7 (2/101-uč) Rozměr AB upraven z textu. Sestrojte trojúhelník ABC, ve kterém je $|BB_1| = t_b = 6cm$, $v_b = 5cm$, $c = |AB| = 9,5cm$.



Rozbor: Konstrukci začneme trojúhelníkem $\triangle BB_1B_0$, ve kterém je $|\measuredangle BB_0B| = 90°$, $|BB_1| = 6cm$; bod B_0 leží na Thaletově kružnici τ se středem S úsečky BB_1 ...



Postup: 1) BB_1; $|BB_1| = 6\,\text{cm}$

2) S; $S \in BB_1 \wedge |SB_1| = |SB|$

3) τ; $\tau(S; \frac{t_b}{2} = 3\,\text{cm})$

4) k; $k(B; v_b = 5\,\text{cm})$

5) B_0; $B_0 \in \tau \cap k$

6) $\overleftrightarrow{B_0B_1} \wedge l$; $l(B; c = |AB| = 9{,}5\,\text{cm})$

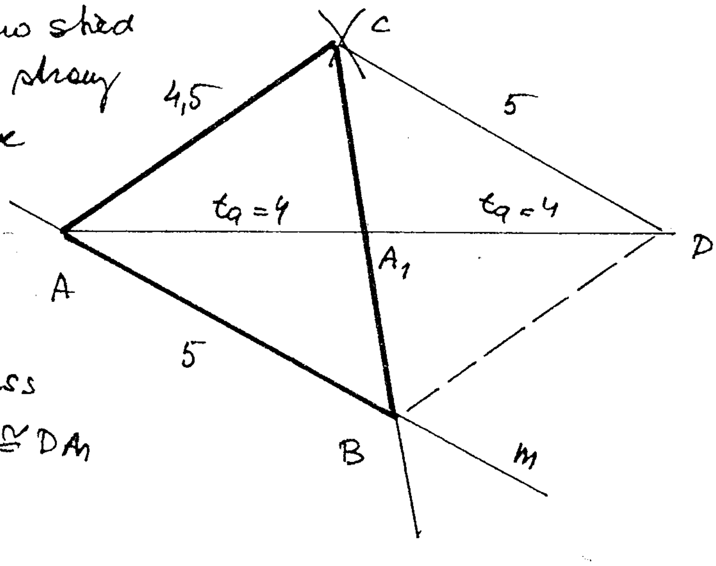
7) A; $A \in \overleftrightarrow{B_0B_1} \cap l$

8) C; C je souměrně sdružený s bodem A podle středu B_1 (těžnice t_b je středem úsečky AC).

9) $\triangle ABC$ ... je jediné řešení dané úlohy

Příklad 8: Sestrojte $\triangle ABC$, ve kterém je $b = 4{,}5\,\text{cm}$, $c = 5\,\text{cm}$, $t_a = 4\,\text{cm}$.

Doplníme hledaný $\triangle ABC$ na rovnoběžník $ABDC$, jeho střed A_1 je zároveň středem strany BC. Konstrukci začneme $\triangle ADB$, ve kterém je $|AD| = 8$, $|CD| = 5$, $|AC| = 4{,}5$ vše v cm



1) $\triangle ADC$ podle věty sss

2) A_1; $A_1 \in AD \wedge A_1A \cong DA_1$

3) m; $m \parallel \overleftrightarrow{CD} \wedge A \in m$

4) B; $B \in \overrightarrow{CA_1} \cap m$

5) $\triangle ABC$ ... 1 řešení

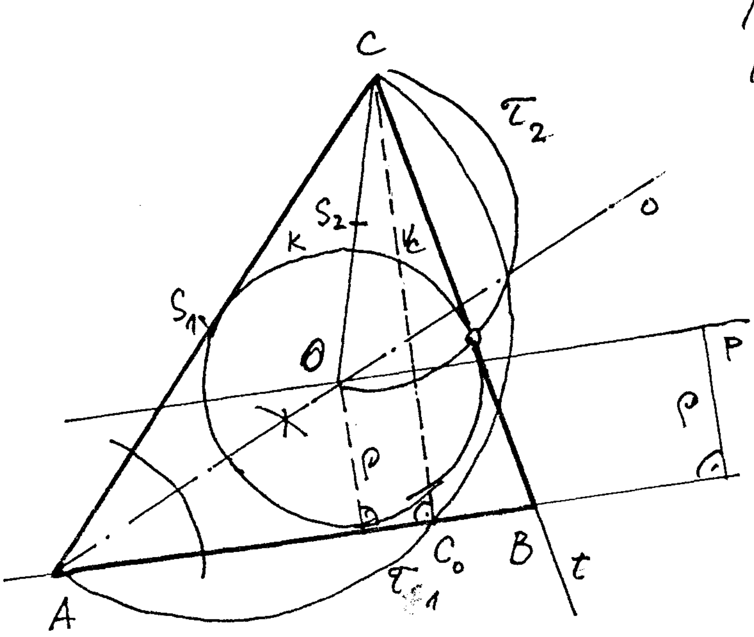
Příklad 9: Sestrojte $\triangle ABC$: $v_c = 6\,\text{cm}$, $b = 8\,\text{cm}$, $\rho = 2\,\text{cm}$ (poloměr kružnice vepsané)

1) AC; $|AC| = b = 8\,\text{cm}$

2) S_1; $S_1 \in AC \wedge S_1A \cong S_1C$

3) τ_1; $\tau_1(S_1; \frac{|AC|}{2} = 4\,\text{cm}$

$\triangle ACC_0$ je pravoúhlý, kde $|CC_0| = v_c = 6\,\text{cm}$, jeho osu o úhlu CAC_0, rovnoběžku p s přímkou AC_0, $O = p \cap o$. O je střed vepsané kružnice.



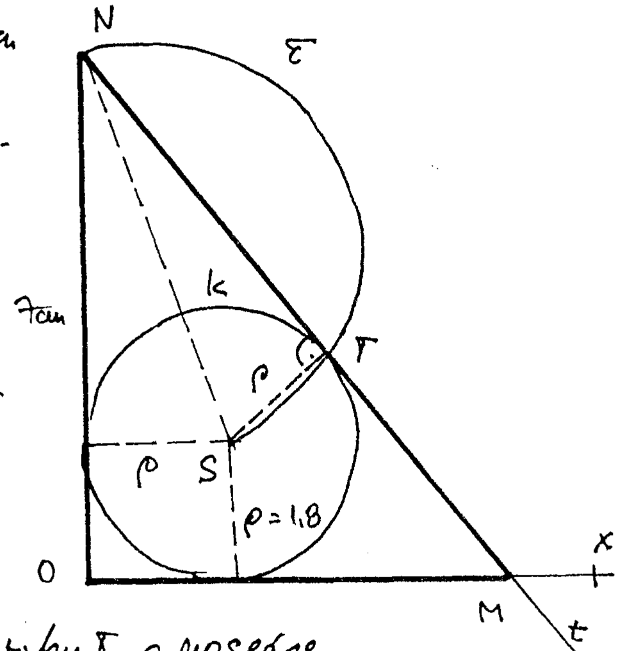
Ak narýsujeme, tak sestrojíme tečnu t z bodu C ke kružnici $k(O;\ \rho = 2cm)$ pomocí Thal. kružnice τ_2 s průměrem $|OC|$

$B;\ B \in t \cap \overleftrightarrow{AC_0}$

a $\triangle ABC$ jako jediné řešení sestrojíme

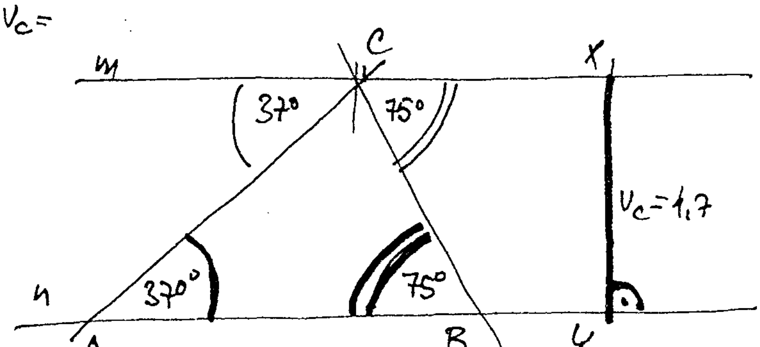
Příklad 10: V pravoúhlém trojúhelníku MNO s pravým úhlem při vrcholu O je $m = |NO| = 7cm$ a poloměr $\rho = 1{,}8$ cm kružnice k, která je tomuto trojúhelníku vepsána. Sestrojte tento trojúhelník.

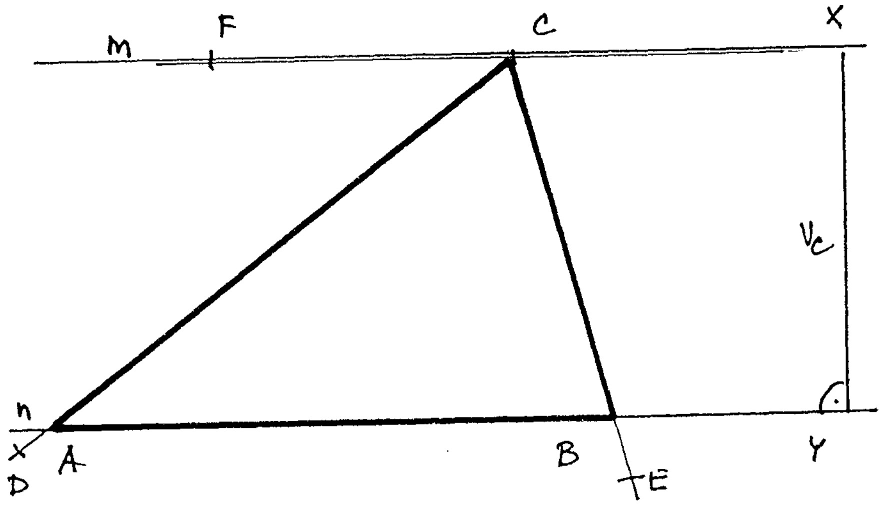
Po narýsování strany NO a polopřímky OX ($NO \perp \overrightarrow{OX}$) sestrojíme kružnici $k(S;\ \rho)$ a pomocí konstrukce tečny z bodu N ke kružnici k sestrojíme bod dotyku T a posléze přeponu MN; 1 řešení.



Příklad 11: Sestrojte trojúhelník ABC, je-li $\alpha = 37°$, $\beta = 75°$, $v_c = 4{,}7cm$

Při řešení využijeme vlastnosti střídavých úhlů

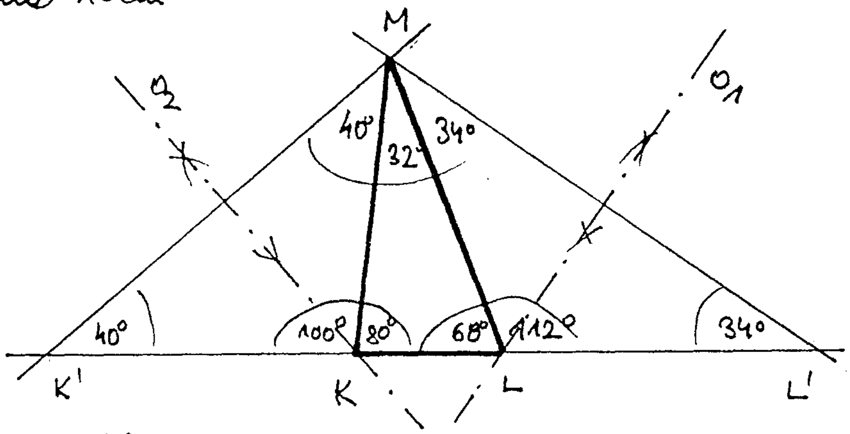




1) m, n; $m \parallel n$; $(m,n) = 4{,}7$
2) C; libovolný bod přímky m
3) $\sphericalangle DCF$; $|\sphericalangle DCF| = 37°$
4) $\sphericalangle XCE$; $|\sphericalangle XCE| = 75°$
5) A; $A \in \overrightarrow{CD} \cap n$
6) B; $B \in \overrightarrow{CE} \cap n$
7) $\triangle ABC$ – 1 řešení

Příklad 12: Sestrojte $\triangle KLM$, jestliže součet délek všech jeho stran se rovná 10 cm

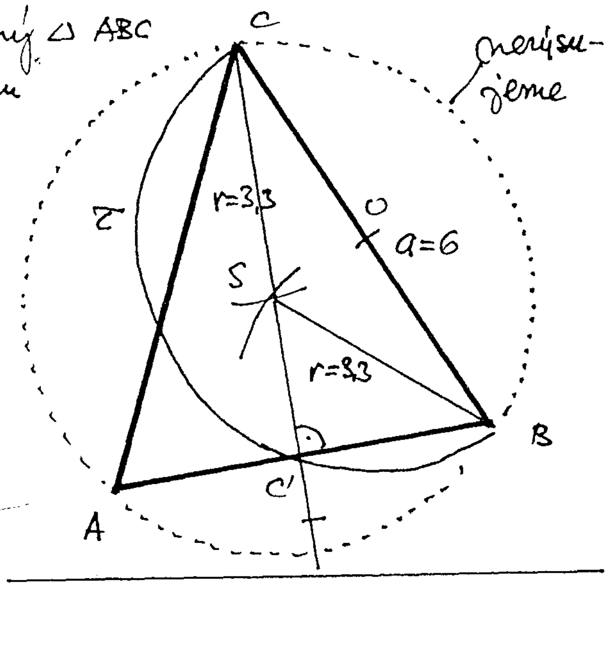
a) $|\sphericalangle MKL| = 80°$, $|\sphericalangle KLM| = 68°$



Sestrojíme pomocný $\triangle K'L'M$, ve kterém je $|K'L'| = 10$ cm, $|\sphericalangle MK'L'| = 40°$, $|\sphericalangle K'L'M| = 34°$.

Potom trojúhelníky $MK'K$ a $L'ML$ jsou rovnoramenné. Vrcholy K, L pak určíme pomocí os o_1, o_2 stran ML' a MK'.

Příklad 13: Sestrojte rovnoramenný $\triangle ABC$ se základnou AB, je-li $a = 6$ cm, $r = 3{,}3$ cm (poloměr kružnice opsané).



1) $\triangle BCS$; $|BC| = 6$ cm, $|BS| = |CS| = 3{,}3$ cm
2) O; $O \in BC \wedge |OC| = |OB|$
3) τ; $\tau\left(O; \frac{|BC|}{2} = 3 \text{ cm}\right)$
4) C'; $C' \in \overrightarrow{CS} \cap \tau$
5) A; A je souměrně sdružený s B podle osy (základny) CS.
6) $\triangle ABC$ – 1 řešení.