MATEMATICKÁ INDUKCE

Př. 1. Dokažte, že $\forall\, n \in N$ platí:

V1
$$\sum_{n=1}^{n} n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \text{neboli}$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

a) pro $n = 1$:

$$1^2 = \frac{1\cdot(1+1)(2+1)}{6} \qquad \text{platí}$$

$n = 2$:

$$1^2 + 2^2 = \frac{2 \cdot 3 \cdot 5}{6} \qquad \text{platí}$$

b) zobecnění pro $(n+1)$ člen

platí-li $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ $(*)$

pak platí

$$\underbrace{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}_{\text{dosadíme z } (*)} + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

upravíme na spol. jmenovatele:

$$\frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} = -\!\!/\!\!/\!\!-$$

$$\cancel{(n+1)}\left[n(2n+1) + 6(n+1)\right] = \cancel{(n+1)}(n+2)(2n+3)$$

$$2n^2 + 7n + 6 = \underbrace{(n+2)(2n+3)}_{2n^2+7n+6} \Rightarrow \text{ověříme,}$$

zda tato rovnost platí $\Rightarrow$ platí $\Rightarrow$ platí

přirozeně výrok V1

Př. 2. Dokažte, že $\forall n \in N$ platí $V1: 6 \mid (n^3 + 11n)$

čteme: šest dělí $n^3 + 11n$ neboli
pro libovolné n je výraz $n^3 + 11n$
vždy dělitelný 6

a) $n = 1$ $\quad 6 \mid (1 + 11) \Rightarrow 6 \mid 12 \Rightarrow$ platí

$n = 2$ $\quad 6 \mid (8 + 22) \Rightarrow 6 \mid 30 \Rightarrow$ platí

b) pro $(n+1)$ člen

jestliže $6 \mid (n^3 + 11n)$ pak $6 \mid \left[(n+1)^3 + 11(n+1)\right]$

upravme výraz

$$n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 11n + 11 = n^3 + 3n^2 + \underbrace{14n}_{\text{rozepíšeme na } 11n + 3n} + 12$$

$$= \underbrace{n^3 + 11n}_{} + (3n^2 + 3n + 12) \Rightarrow \text{vytkneme } 3$$

o tomto víme že je dělitelné 6 $\Rightarrow 6 \mid (n^3 + 11n)$

$3(n^2 + n + 4) \Rightarrow$ tento výraz je dělitelný 3

dokážeme-li že je dělitelný i 2 je dělitelný 6

stačí dokázat $2 \mid (n^2 + n + 4)$

$\Rightarrow$ pro libovolné n: $\quad n^2 + n + 4 = \underbrace{n(n+1)}_{\text{vždy sudé číslo}} + 4$

$\Rightarrow$ z výrazu $n^2 + n + 4$ lze
tedy pro lib. n VŽDY vytknout 2

$\Rightarrow$ tedy platí $2 \mid n^2 + n + 4 \Rightarrow 6 \mid 3(n^2 + n + 4)$

$\Rightarrow$ platí původní výrok V1

34/19 $a_1 = 0$

$a_{n+1} = a_n + 2n + 1$

Dokažte, že platí

$a_n = n^2 - 1$

$\Downarrow$

pro $n = 1$ $\quad a_1 = 0$ $\quad \overset{\text{platí}}{\longleftrightarrow}$ $\quad a_1 = 0$

~~tz~~ $\quad a_2 = a_1 + 2 + 1 = 3$ $\quad \overset{\text{platí}}{\longleftrightarrow}$ $\quad a_2 = 4 - 1 = 3$

pro $(n+1)$ člen:

$$a_{n+1} = (n+1)^2 - 1 = n^2 + 2n + 1 - 1 = \underbrace{n^2 - 1}_{a_n} + 2n + 1$$

$a_{n+1} = a_n + 2n + 1$ což souhlasí s rekurentním zadáním p-ti $\Rightarrow$ platí tedy i vztah $a_n = n^2 - 1$ cbd.

34/20 $a_1 = 1$

$a_{n+1} = \dfrac{n \cdot a_n + 2}{n+1}$

Dokažte, že platí

$a_n = 2 - \dfrac{1}{n} = \dfrac{2n-1}{n}$

pro $n = 1$ $\quad a_1 = 1$ $\quad\quad a_1 = 2 - 1 = 1$

$a_2 = \dfrac{3}{2}$ $\quad\quad a_2 = 2 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2}$

pro $(n+1)$ člen

$$a_{n+1} = 2 - \frac{1}{n+1} = \frac{2(n+1)-1}{n+1} = \underbrace{\frac{2n + 2 - 1}{n+1} \cdot \frac{n}{n}}_{a_n}$$

$$a_{n+1} = \frac{n(2n-1) + 2n}{n(n+1)} = \underbrace{\frac{n(2n-1)}{n(n+1)}}_{a_n} + \frac{2\cancel{n}}{\cancel{n}(n+1)} =$$

$$a_{n+1} = \frac{n \cdot a_n}{n+1} + \frac{2}{n+1} = \frac{n \cdot a_n + 2}{n+1} \quad \text{cbd.}$$

34/22 Dokaž MI že platí:

a) $2+4+6+\dots+2n = n(n+1)$ (V1)

pro: $n=1$ $2 = 1(1+1)$ platí

$n=2$ $2+4 = 2(2+1)$ platí

pro $(n+1)$ člen

$$\underbrace{2+4+6+\dots+2n}_{n(n+1)} + 2(n+1) = (n+1)(n+2)$$

$$n(n+1) + 2(n+1) = (n+1)(n+2)$$

$(n+1)(n+2) = (n+1)(n+2)$ cbd. $\Rightarrow$ platí V1

b) $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$ (V1)

pro $n=1$

$$\frac{1}{1.2} = 1 - \frac{1}{1+1} \Rightarrow \text{platí}$$

pro $(n+1)$: $\underbrace{\frac{1}{1.2} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}}_{} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = 1 - \frac{1}{n+2}$

$$\cancel{1} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \cancel{1} - \frac{1}{n+2}$$

$$\frac{1-(n+2)}{(n+1)(n+2)} = -\frac{1}{n+2}$$

$$\frac{-\cancel{(1+n)}}{\cancel{(n+1)}(n+2)} = -\frac{1}{n+2}$$

$-\frac{1}{(n+2)} = -\frac{1}{(n+2)}$ cbd. $\Rightarrow$ platí V1

34/25 Dokažte, že $\forall n \in N$ platí:

a) $4 \mid (2n^2+2n) \Rightarrow$ upravíme na $2 \mid n^2+n$ (V1)

pro $n=1$ $\quad 2 \mid 2$ platí

pro $(n+1)$

$$2 \mid (n+1)^2 + (n+1) \Rightarrow 2 \mid n^2+2n+1+n+1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \mid n^2+n+\underbrace{2n+2}_{2 \mid}$$

o výrazu n^2+n předp. že $2 \mid (n^2+n)$ ← platí cbd.

výraz $2n+2$ je dělitelný 2 ⇒ platí V1

b) $6 \mid (n^3+5n)$ V1

$n=1$ $\quad 6 \mid 6$ platí

pro $(n+1)$

$$6 \mid \left[(n+1)^3+5(n+1)\right] \Rightarrow 6 \mid \left[\underline{n^3}+3n^2+3n+1+\underline{5n}+5\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6 \mid (\underbrace{n^3+5n}_{\text{je dělitel. 6}} + 3n^2+3n+6)$$

⇒ zbývá dokázat $6 \mid (3n^2+3n+6) \Rightarrow 3 \mid 3(n^2+n+2)$

$2 \mid (n^2+n+2)$

⇒ zbývá dokázat $2 \mid (n^2+n+2) \Rightarrow 2 \mid [\underbrace{n(n+1)}_{\text{vždy sudé číslo, tedy dělitelné 2}}+2]$

⇒ platí tedy $2 \mid (n^2+n+2)$ a

$6 \mid (3n^2+3n+6)$ cbd.

⇒ platí V1