# analytická geometrie - kuželosečky

## A. Kružnice, kružnice a přímka

### učebnice

144/5.1

a) $S[2;-1]$ $r=6$

napíšeme si nejprve obecný tvar středové rce kružnice: víme, že $S[m;n]$

$$(x-m)^2+(y-n)^2=r^2$$

stačí tedy dosadit

$$\underline{\underline{(x-2)^2+(y+1)^2=36}}$$

144/5.2 Úlohu řešíme metodou doplnění na □. Podaří-li se nám obecnou rovnici převést na středový tvar, jedná se o kružnici

b) $x^2+y^2+4x-8y+1=0$ nejprve „dáme k sobě"

$$x^2+4x+y^2-8y+1=0$$

$$(x+2)^2-4+(y-4)^2-16+1=0$$

$$\underline{\underline{(x+2)^2+(y-4)^2=19}} \qquad \underline{\underline{S[-2;4] \quad r=\sqrt{19}}}$$

c) $x^2+y^2-4x+7=0$

$$x^2-4x+y^2+7=0$$

$$(x-2)^2-4+(y-0)^2+7=0$$

$$(x-2)^2+(y-0)^2=-3$$

← poloměr² nemůže být záporný, nejedná se o kružnici

144 / 5.3 $S[5;-1]$ $B \in k$ $B[1;2]$

$r = ?$ rce kružnice $= ?$ $a = ?$ $A[a;-5]$ $A \in k$

napíšeme si nejprve středový tvar rce kružnice:

$$(x-m)^2+(y-n)^2=r^2$$

známe S, lze tedy dosadit za m, n

$$(x-5)^2+(y+1)^2=r^2$$

Bod B leží na kružnici, tj. jeho souřadnice lze dosadit do rce kružnice za x a y :

B: $(1-5)^2+(2+1)^2=r^2$

$16+9=r^2$

$r^2=25$

$\underline{\underline{r=5}}$

Z této rovnice již lze určit poloměr r

k: $\underline{\underline{(x-5)^2+(y+1)^2=25}}$

A :

$(x-5)^2+(-5+1)^2=25$

$(x-5)^2+16=25$

$(x-5)^2=9$

máme určit x-ovou souřadnici bodu A za předpokladu, že bod A leží na k. Stačí tedy dosadit za y do rce kružnice a dopočítat x. Vzhledem k tomu, že rce je kvadratická, vyjdou 2 body

klasicky:

$x^2-10x+25=9$

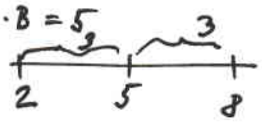
$x^2-10x+16=0$

$x_{1,2}=\frac{10\pm\sqrt{100+64}^{\,6}}{2} \begin{cases} 8 \\ 2 \end{cases}$

rychle:

$|x-5|=3$

n.B = 5



$x_1=2$

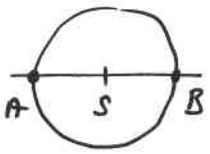
$x_2=8$

$\underline{\underline{A_1[2;-5] \quad A_2[8;-5]}}$

145 / 5.4

a) $A[0;7]$ $B[4;1]$

$A, B$ … krajní body průměru



⇒ jedná se tedy o Thaletovu kružnici se středem $S = \frac{A+B}{2}$

$r = |AS|$

- určíme souřadnice středu $S[2;4]$
- určíme poloměr

$$r = |\overrightarrow{AS}| = \sqrt{2^2+(-3)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$

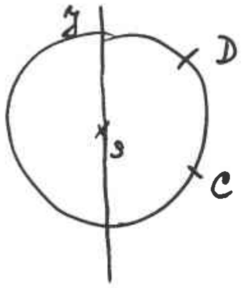
$$k: \underline{\underline{(x-2)^2+(y-4)^2 = 13}}$$

zapíšeme středový tvar rce $k$

b) $C \in k$, $D \in k$, $S \in y$ $C[2;5]$ $D[3;2]$

střed leží na ose $y$ ⇒ $S[0;?]$ $S[0;s_2]$

- neznáme $r$ a neznáme $s_2$
-



víme ale, že $r = |SC| = |SD|$

$$SC = \sqrt{2^2+(5-s_2)^2}$$
$$SD = \sqrt{3^2+(2-s_2)^2}$$

platí rovnost

$$\sqrt{4+25-10s_2+s_2^2} = \sqrt{9+4-4s_2+s_2^2} \quad /^2$$

$$29-10s_2+\cancel{s_2^2} = 13-4s_2+\cancel{s_2^2}$$

$$16 = 6s_2$$

$$\underline{\underline{s_2 = \frac{16}{6} = \frac{8}{3}}} \Rightarrow S\left[0;\frac{8}{3}\right]$$

ještě dopočítáme $r$ ⇒ $r = |SC| = \sqrt{4+(5-\frac{8}{3})^2} = \sqrt{4+\frac{49}{9}}$

$$k = \sqrt{\frac{85}{9}}$$

$$k: \underline{\underline{x^2+\left(y-\frac{8}{3}\right)^2 = \frac{85}{9}}}$$

c) $E \in k$ $E[1;3]$ $S \in p$ $p: x-y+4=0$

$r=2$

opět zadáme středovým tvarem kružnice:

$$(x-m)^2+(y-n)^2=r^2$$

doplníme poloměr

$$(x-m)^2+(y-n)^2=4$$

neznáme S ale víme, že kružnice prochází bodem E ⇒ lze tedy dosadit za x a y bod E

$E: \quad (1-m)^2+(3-n)^2=4$

současně z toho, že $S \in p$ lze napsat 2. rovnici:

$$m-n+4=0$$

⇒ získáme soustavu 2 rovnic pro m, n

I. $(1-m)^2+(\overset{3}{\cancel{y}}-n)^2=4$

II. $m-n+4=0 \Rightarrow n=m+4$

dosadit

$$(1-m)^2+(3-m-4)^2=4$$

$$(1-m)^2+(-1-m)^2=4$$

$$1-\cancel{2m}+m^2+1\cancel{+2m}+m^2=4$$

$$2m^2=2$$

$$m^2=1$$

$$|m|=1 \qquad m_1=1 \quad m_2=-1$$

dopočítáme druhou souřadnici středu S:

$n=m+4 \Rightarrow n_1=5 \Rightarrow S_1[1;5]$

$n_2=3 \Rightarrow S_2[-1;3]$

$k_1: \quad \underline{\underline{(x-1)^2+(y-5)^2=4}}$

$k_2: \quad \underline{\underline{(x+1)^2+(y-3)^2=4}}$

145/5.5 $C[4;7]$ $D[8;-1]$

od bodu C má bod X 3x větší vzdálenost než od D

tedy platí, že

$3 \cdot |DX| = |CX|$

- Vyjdeme ze vzorce pro velikost úsečky
- bod X má obecné souřadnice $x, y$ které neznáme $\Rightarrow X[x, y]$

$|DX| = \sqrt{(x-8)^2+(y+1)^2}$ $|CX| = \sqrt{(x-4)^2+(y-7)^2}$

dosadíme do vztahu $3 \cdot |DX| = |CX|$

$$3 \cdot \sqrt{(x-8)^2+(y+1)^2} = \sqrt{(x-4)^2+(y-7)^2}$$

$$9\left[x^2-16x+64+y^2+2y+1\right] = x^2-8x+16+y^2-14y+49$$

$$9x^2-144x+576+9y^2+18y+9 = x^2-8x+y^2-14y+65$$

$$8x^2-136x+8y^2+32y+520 = 0 \quad /:8$$

$$\underline{\underline{x^2-17x+y^2+4y+65=0}}$$

$$\left(x-\frac{17}{2}\right)^2+(y+2)^2-\frac{289}{4}-4+65=0$$

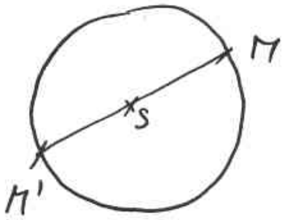
$$\underline{\underline{\left(x-\frac{17}{2}\right)^2+(y+2)^2=\frac{45}{4}}}$$

$$\underline{\underline{S\left[\frac{17}{2};-2\right]}} \qquad r=\sqrt{\frac{45}{4}}=\sqrt{\frac{9\cdot 5}{4}}=\underline{\underline{\frac{3\sqrt{5}}{2}}}$$

145/5.6

$k: (x-2)^2+(y+1)^2=25 \qquad M[-1;-5]$

$M' = ?$ souměrně sdružený dle středu S , $M' \in k$ ?



a) nejprve ověříme, že $M \in k$ :

$M: (-1-2)^2 + (-5+1)^2 = 25$

$9 + 16 = 25$

$25 = 25 \Rightarrow \underline{\underline{M \in k}}$

b) do bodu M' se „dostaneme" z bodu S posunutím o vektor $\vec{MS}$ : $M' = S + \vec{MS}$

$\vec{MS} = (3;4)$

S ... určíme z rce kružnice ze zadání: $S[2;-1]$

$$\left.\begin{array}{l} m_x' = 2+3 = 5 \\ m_y' = -1+4 = 3 \end{array}\right\} \underline{\underline{M'[5;3]}}$$

145/5.8 $k: x^2+y^2+6x-8y-39=0$

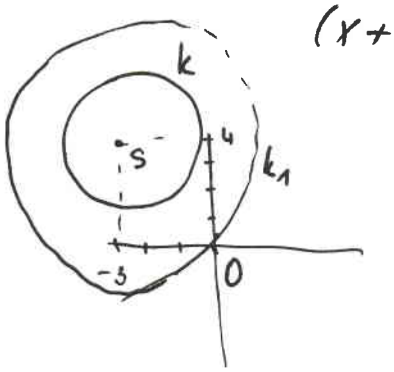
kružnice soustředná ... $k_1$

$O[0;0] \in k_1$

- doplněním na □ vypočítáme nejdříve středový tvar kružnice k

$(x+3)^2-9+(y-4)^2-16-39=0$

$(x+3)^2+(y-4)^2 = 64 \Rightarrow S[-3;4]$



soustředná kružnice má stejný střed, ale jiný poloměr $r_1$

$r_1 = |SO| = \sqrt{(0+3)^2+(0-4)^2} = \sqrt{9+16} = \underline{\underline{5}}$

$$k_1: \underline{\underline{(x+3)^2+(y-4)^2 = 25}}$$

153 / 5.11

k : $x^2 - 2x + y^2 + 6y = 0$

p : $y = 2x$

nejprve upravíme OR kružnice na středový tvar:

$$(x-1)^2 - 1 + (y+3)^2 - 9 = 0$$

$$\underline{\underline{(x-1)^2 + (y+3)^2 = 10}}$$

- průsečíky kružnice s přímkou najdeme jako <u>řešení soustavy 2 ric o 2 neznámých</u>

⇒ snadnější je dosadit přímku do kružnice

$$x^2 - 2x + (2x)^2 + 6(2x) = 0$$

$$x^2 - 2x + 4x^2 + 12x = 0$$

$$5x^2 + 10x = 0 \quad /:5$$

$$x^2 + 2x = 0$$

$$x(x+2) = 0$$

$x_1 = 0$

$x_2 = -2$

musíme dopočítat ještě y-ové hodnoty dosazením do $y = 2x$

$x_1 = 0 \Rightarrow y_1 = 0$

$x_2 = -2 \Rightarrow y_2 = -4$

- nakonec zapíšeme průsečíky jako body:

$$\underline{\underline{R_1[0;0] \quad R_2[-2;-4]}}$$

153/5.12 $\quad p: \; y = 2x + d$ má být tečnou kružnice

$k: \; x^2 + y^2 - 2x + 6y = 0 \qquad T = ?$

- řešíme jako průnik přímky s kružnicí

⇒ dosadíme přímku do kružnice

⇒ aby to byla tečna musí platit $D = 0$ (diskriminant kvadrat. rce)

$$x^2 + (2x+d)^2 - 2x + 6(2x+d) = 0$$

$$x^2 + 4x^2 + \underline{4xd} + d^2 \underline{-2x} \underline{+12x} + 6d = 0$$

$$5x^2 + x(4d+10) + d^2 + 6d = 0$$

$A = 5$

$B = 4d + 10$

$C = d^2 + 6d$

$$D = B^2 - 4AC = 0$$

$$(4d+10)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (d^2 + 6d) = 0$$

$$16d^2 + 80d + 100 - 20d^2 - 120d = 0$$

$$-4d^2 - 40d + 100 = 0 \quad /:(-4)$$

$$d^2 + 10d - 25 = 0$$

$$d_{1/2} = \frac{-10 \pm \sqrt{100 + 100}}{2} = \frac{-10 \pm \sqrt{200}}{2}$$

$$d_{1/2} = \begin{cases} \dfrac{-10 + 10\sqrt{2}}{2} = \underline{\underline{-5 + 5\sqrt{2}}} \\ \dfrac{-10 - 10\sqrt{2}}{2} = \underline{\underline{-5 - 5\sqrt{2}}} \end{cases}$$

- souřadnice bodu T určíme z původní kvadrat. rce pro x: $\; 5x^2 + x(4d+10) + d^2 + 6d = 0$

- víme že $D = 0$

$$x_{1/2} = \frac{-B}{2A} = \frac{-(4d+10)}{10}$$

pro $d_1$: $\quad x_1 = x_2 = x_0 = \dfrac{-(-20 + 20\sqrt{2} + 10)}{10} = 1 - 2\sqrt{2}$

$y_0 = 2x_0 + d_1 = 2 - 4\sqrt{2} - 5 + 5\sqrt{2} = -3 + \sqrt{2}$ $\quad \underline{\underline{T_1[1 - 2\sqrt{2}; -3 + \sqrt{2}]}}$

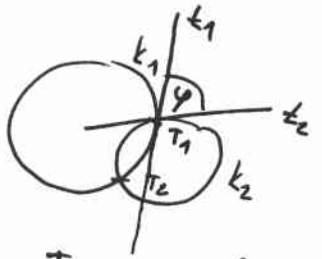
pro $d_2$ $T_2$ analogicky

154/5.13 analog. 149/ Př. 3 (řešený)

154/ 5.14, 5.15 analog. 150/ Př. 4 (řešený)

154/ 5.16

$$k_1: x^2+y^2-4x-2y+3=0$$
$$k_2: x^2+y^2-4x-4y+7=0$$



$T_2$ ... analogicky

$t_1 = ?$ $t_2 = ?$ $\varphi = ?$

- určíme nejprve $T_1, T_2$ jako průsečíky kružnic

⇒ řešíme soust. 2 rce o 2 neznámých

$$\begin{array}{l} x^2+y^2-4x-2y+3=0 \\ x^2+y^2-4x-4y+7=0 \quad /\cdot(-1) \end{array} \quad \oplus$$

$2y-4=0 \quad 2y=4 \quad \underline{y=2}$ ⇒ dosadit do libovol. rce a řešit $x = ?$

$$x^2+4-4x-4+3=0 \qquad x_{1/2} = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}\,{}^{2}}{2} \left\langle \begin{matrix} 3 \\ 1 \end{matrix} \right.$$
$$x^2-4x+3=0$$

$\underline{\underline{T_1[3;2]}}$ $\underline{\underline{T_2[1;2]}}$

- upravíme obě kružnice na střed. tvar a napíšeme obecný tvar rce tečny

I. $k_1: (x-2)^2-4+(y-1)^2-1+3=0$

$\underline{(x-2)^2+(y-1)^2=2}$

$k_2: (x-2)^2-4+(y-2)^2-4+7=0$

$\underline{(x-2)^2+(y-2)^2=1}$

$t_1: (x-2)(x_0-2)+(y-1)(y_0-1)=2$

dosadíme za $x_0$ a $y_0$ bod $T_1$

$(x-2)(3-2)+(y-1)(2-1)=2$

$x-2+y-1=2$

$t_1: \underline{\underline{x+y-5=0}}$

$t_2: (x-2)(x_0-2)+(y-2)(y_0-2)=1$

$(x-2)(3-2)+(y-2)(2-2)=1$

$x-2=1$

$t_2: \underline{\underline{x=3}}$

II. úhel tečen $|\sphericalangle t_1, t_2| = |\sphericalangle \vec{n}_1, \vec{n}_2|$ $\vec{n}_1=(1;1)$ $\vec{n}_2=(1;0)$

$$\cos\varphi_1 = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|n_1|\cdot|n_2|} = \frac{|1\cdot1+0|}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \underline{\underline{\varphi_1 = 45^\circ}}$$

bod $T_2$, $t_3$, $t_4$, $\varphi_2$ analogicky

154/5.17 $K[\overbrace{2+3\cos t}^{x} ; \overbrace{7+3\sin t}^{y}]$

$k$: $S[2;7]$ $r=3$ Důkaz provedeme tak, že formulujeme středový tvar rce kružnice, dosadíme bod $K$ a ověříme že pokud

$0=0 \Rightarrow K\in k$

$$(x-m)^2+(y-n)^2=r^2$$

$S, r$: $(x-2)^2+(y-7)^2=9$

$K$: $x=2+3\cos t$ $\quad (2+3\cos t-2)^2+(7+3\sin t-7)^2=9$

$y=7+3\sin t$ $\quad (3\cos t)^2+(3\sin t)^2=9$

$$9\cos^2 t+9\sin^2 t=9$$

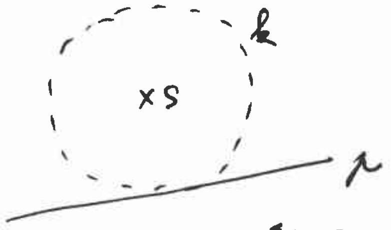
$$9(\underbrace{\cos^2 t+\sin^2 t}_{=1})=9 \quad \Rightarrow \underline{\underline{K\in k}}$$

$$9=9 \Rightarrow \underline{\underline{0=0}}$$ c.b.d.

154/5.18 analog. 5.17

154/5.19 a) analog. 143/Př. 6 s tím, že určíme body $S_1, S_2, S_3$ jako $\frac{A+B}{2}$, $\frac{A+C}{2}$, $\frac{B+C}{2}$

b) $S[5;4]$ a dotýká se $p: 5x-12y-29=0 \Rightarrow p$ je tečnou kružnice!



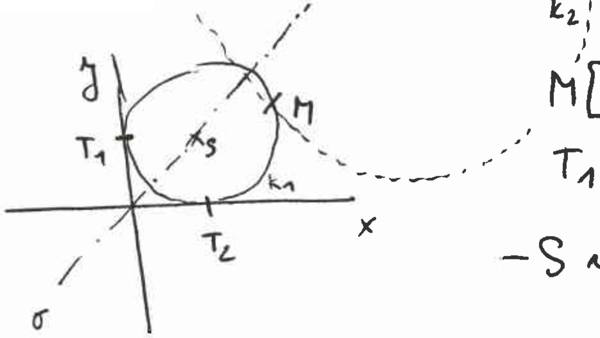
– neznáme poloměr kružnice $r$ ⇒ nejprve ho určíme jako vzdálenost bodu $S$ od přímky $p$

$$v(S;p)=\frac{|\overset{\overset{p}{\downarrow}}{5}.\overset{\overset{S}{\downarrow}}{5}-\overset{\overset{p}{\downarrow}}{12}.\overset{\overset{S}{\downarrow}}{4}-29|}{\sqrt{5^2+(-12)^2}}=\frac{|25-48-29|}{\sqrt{169}}=\frac{52}{13}=\underline{\underline{4=r}}$$

$k$: $\underline{\underline{(x-5)^2+(y-4)^2=16}}$

11)

c)



$M[2;4]$ → plyne ze zadání ← $T_2[x_2;0]$

$T_1[0;y_1]$

− S neznáme ⇒ $S[m,n]$

- současně si musíme uvědomit, že pokud se kružnice dotýká obou souřadných os, musí střed kružnice S ležet stejně daleko od osy x jako od osy y ⇒ leží na ose I. a III. kvadrantu, která má rovnici $y = x$, resp. II. a IV. s rovnicí $y = -x$ ⇒ dle polohy bodu M (I. kvadrant) lze druhou variantu vyloučit
- platí tedy pro bod S, že $m = n$ $S[m,m]$
- dále platí $|ST_1| = |ST_2| = |SM|$

$$|SM| = \sqrt{(2-m)^2+(4-m)^2} = \sqrt{4-4m+m^2+16-8m+m^2}$$

ze symetrie situace dále plyne, že vzdálenost

$y_1$ = vzdálenost $x_2$ ⇒ $y_1 = x_2 = p$

$$|ST_1| = \sqrt{(0-m)^2+(p-m)^2} = \sqrt{2m^2-2mp+p^2}$$

$$|ST_2| = \sqrt{(p-m)^2+(0-m)^2} = -||-$$

$$|SM| = |ST_1|$$

$$\sqrt{2m^2-12m+20} = \sqrt{2m^2-2mp+p^2}$$

$p^2-2mp+12m-20=0$ ... kvadratická s param. $\underline{m}$

⇒ vzdálenost $p$ musí být vždy jednoznačná

⇒ $p_1 = p_2$ ⇒ $D = 0$

$A = 1$
$B = -2m$
$C = 12m-20$

$B^2-4AC=0$
$4m^2-4(12m-20)=0$

$4m^2-48m+80=0$
$m^2-12m+20=0$

$$m_{1/2} = \frac{12 \pm \overset{8}{\sqrt{144-80}}}{2} \begin{matrix} \nearrow 10 \\ \searrow 2 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} m_1 = 10 \\ m_2 = 2 \end{matrix}$$

$$\underline{\underline{S_1[10;10]}} \qquad \underline{\underline{S_2[2;2]}}$$

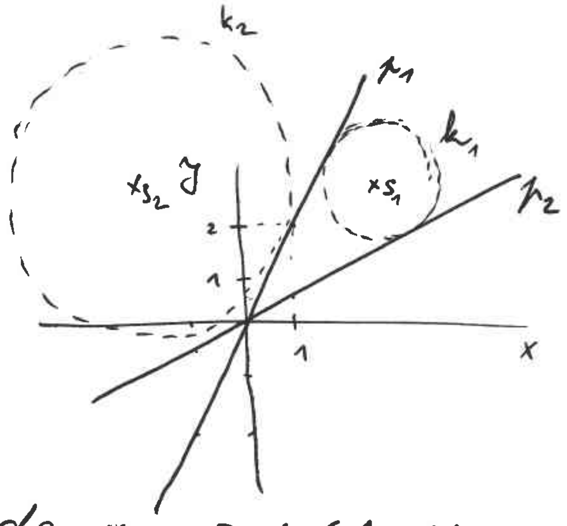
$M[2;4]$

$$r_1 = |S_1M| = \sqrt{(-8)^2+(-6)^2} = \sqrt{64+36} = \underline{\underline{10}}$$

$$r_2 = |S_2M| = \sqrt{0^2+2^2} = \sqrt{4} = \underline{\underline{2}}$$

$$k_1: \quad \underline{\underline{(x-10)^2+(y-10)^2 = 100}}$$

$$k_2: \quad \underline{\underline{(x-2)^2+(y-2)^2 = 4}}$$



154/5.20 $\quad S[m;n] \quad r = 3$

$p_1: y = 2x \quad p_2: y = \frac{1}{2}x$

- nejprve si nakreslíme do souřadných os grafy fcí $y=2x$, $y=\frac{1}{2}x$ => vidíme, že úhel $|\sphericalangle p_2, x| = |\sphericalangle p_1, y|$ => střed S musí ležet na ose I. a III. kvadrantu => $S[m,m]$ $(n=m)$
- napíšeme střed. tvar kružnice

$$(x-m)^2+(y-m)^2 = 9$$

I. - přímka $p_1: y=2x$ je tečna => dosadíme přímku do kružnice a víme, že $D=0$

$$(x-m)^2+(2x-m)^2 = 9$$

$$x^2-2mx+m^2+4x^2-4mx+m^2-9=0$$

$$5x^2 - 6mx + 2m^2 - 9 = 0$$

$A = 5$
$B = -6m$
$C = 2m^2 - 9$

$$B^2 - 4AC = 0$$
$$36m^2 - 4.5.(2m^2 - 9) = 0$$
$$36m^2 - 40m^2 + 180 = 0$$
$$4m^2 = 180$$
$$m^2 = \frac{180}{4} \Rightarrow |m| = \frac{\sqrt{180}}{2} = \frac{\sqrt{9.4.5}}{2}$$

$$\underline{\underline{m = \pm 3\sqrt{5}}}$$

$S_1\left[3\sqrt{5}; 3\sqrt{5}\right]$

$S_2\left[-3\sqrt{5}; -3\sqrt{5}\right]$

II. přímka $p_2 : y = \frac{1}{2}x$ je tečna ⇒ dosadíme ...

$$(x-m)^2 + \left(\frac{1}{2}x - m\right)^2 = 9$$
$$x^2 - 2mx + m^2 + \frac{x^2}{4} - xm + m^2 = 9$$
$$\frac{5}{4}x^2 - 3mx + 2m^2 - 9 = 0 \qquad /.4$$
$$5x^2 - 12mx + 4(2m^2 - 9) = 0$$

$A = 5$
$B = -12m$
$C = 4(2m^2 - 9)$

$$B^2 - 4AC = 0$$
$$144m^2 - 4.5.4(2m^2 - 9) = 0$$
$$144m^2 - 160m^2 + 720 = 0$$
$$16m^2 = 720$$
$$m^2 = \frac{720}{16} \Rightarrow |m| = \frac{6\sqrt{10.2}}{4} = \frac{3\sqrt{10.2}}{2} = 3\sqrt{5}$$

$$\underline{m = \pm 3\sqrt{5}}$$

→ dostaneme stejný výsledek jako v předchozím případě

III. Střed S může rovněž ležet i na ose II. a IV. kvadrantu $\Rightarrow S[+m; -m]$ $(m = -n)$

rce kružnice je pak

$$(x-m)^2 + (y+m)^2 = 9$$

analog. dle I. a II. dosadíme $y = 2x$ nebo $y = \frac{1}{2}x$
(už víme, že stačí pouze jedna přímka)

$y = 2x$ $\quad x^2 - 2mx + m^2 + 4x^2 + 4mx + m^2 - 9 = 0$

$$5x^2 + 2mx + 2m^2 - 9 = 0$$

$A = 5$
$B = 2m$
$C = 2m^2 - 9$

$$4m^2 - 4.5.(2m^2 - 9) = 0$$

$$4m^2 - 40m^2 + 180 = 0$$

$$36m^2 = 180$$

$$m^2 = \frac{180}{36} \Rightarrow |m| = \frac{\sqrt{180}}{6} = \frac{\sqrt{9.4.5}}{6} = \frac{3.2\sqrt{5}}{6}$$

$$|m| = \sqrt{5}$$

$$\underline{\underline{m = \pm\sqrt{5}}}$$

$$\underline{\underline{S_3\,[+\sqrt{5}\,;\,-\sqrt{5}]}}$$

$$\underline{\underline{S_4\,[-\sqrt{5}\,;\,+\sqrt{5}]}}$$

154/21 analog. 5.19

154/22 analog. 5.16 + kolmost ověříme

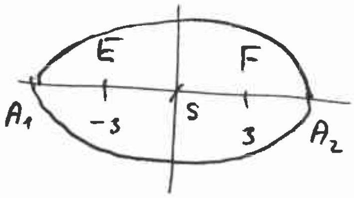
$\overrightarrow{T_1T_2} \cdot \overrightarrow{S_1S_2} = 0$ (skalární součin vektorů = 0)

# B. Elipsa, elipsa a přímka

165/5.23

$E[-3;0]$ $F[3;0]$ $a=5$ rce E. = ?

- nejprve črtneme ohniska a umístíme si elipsu do souřadných os ⇒ stačí přibližně



$S = \frac{E+F}{2}$ $S[0;0]$ - určíme střed elipsy

- napíšeme obecný středový tvar rce E.

$$\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$$

⇒ známe $m, n, a$ ⇒ musíme ještě dopočítat $b$ ⇒ $e^2 = a^2 - b^2$

$e = |ES| = |FS| = 3$

⇒ plyne z obr. nebo vypočítáme klasicky jako velikost úsečky

$b^2 = a^2 - e^2 = 25 - 9 = 16$

$\underline{b = 4}$

- nyní již známe vše a můžeme zapsat konkrétní rovnici E:

$$\frac{(x-0)^2}{25} + \frac{(y-0)^2}{16} = 1 \iff \underline{\underline{\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1}} \iff$$

$$\iff \underline{\underline{16x^2 + 25y^2 = 400}}$$

165/5.24

$E: \quad a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2 \quad / : a^2b^2$

$k: \quad x^2+y^2=r^2 \quad \Rightarrow \quad y^2=r^2-x^2$

– řešíme obecně soustavu 2 rovnic o 2 neznámých

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{r^2-x^2}{b^2}=1$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{r^2}{b^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$$

$$x^2\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)=1-\frac{r^2}{b^2}$$

$$x^2\left(\frac{b^2-a^2}{a^2b^2}\right)=\frac{b^2-r^2}{b^2}$$

$$x^2=\frac{a^2(b^2-r^2)}{b^2-a^2}$$

$$y^2=r^2-\frac{a^2(b^2-r^2)}{b^2-a^2}$$

165/5.25

$X[a\cdot\cos t;\, b\sin t]$

$X\in E. \qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

⇒ dosadíme bod X do rce elipsy a pokud $X\in E$.
⇒ musíme dojít k $0=0$

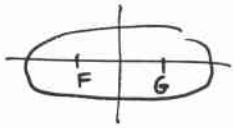
$$\frac{\cancel{a}^2\cos^2 t}{\cancel{a}^2}+\frac{\cancel{b}^2\sin^2 t}{\cancel{b}^2}=1$$

$\cos^2 t+\sin^2 t=1 \iff 1=1 \iff 0=0 \Rightarrow X\in E.$

165/5.27 $\quad S[2;-3] \quad a=5 \quad e=3 \quad$ rce $E=?$ $\quad F,G=?$

$a>b$

$e^2=a^2-b^2$



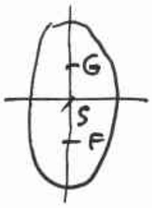
$b^2=a^2-e^2=25-9=16$

$b=4$

$$\frac{(x-2)^2}{25}+\frac{(y+3)^2}{16}=1$$

– y-ové souřadnice ohnisek F, G musí být stejné jako S, x-ové ± 3 od S

$F[-1;-3] \quad G[5;-3]$



$a<b \qquad b=5$

$e^2=b^2-a^2$

$a^2=b^2-e^2=25-9=16$

$a=4$

$$E: \frac{(x-2)^2}{16}+\frac{(y+3)^2}{25}=1$$

– x-ové souřadnice ohnisek F, G jsou stejné jako S

– y-ové ±3 ↑↓

$F[2;-6]$

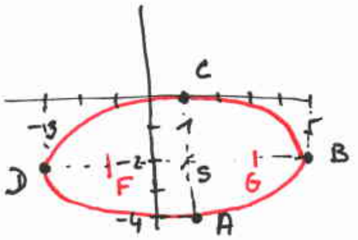
$G[2;0]$

165/5.29 analogicky 161/Př.1

165/530 vrcholy elipsy (není řečeno jaké)

$A[1;-4]$ $B[5;-2]$ $C[1;0]$ $D[-3;-2]$

- zakreslíme nejprve všechny body do souřadných os a uvědomíme si polohu elipsy



vidíme, že $|AC| < |DB|$

$\Rightarrow$ B, D ... hlavní vrcholy

A, C ... vedlejší vrcholy

- určíme střed E. $S = \frac{B+D}{2}$ $\underline{\underline{S[1;-2]}}$
- určíme velikost hl. poloosy $a = |SD| = |SB| = 4$ (rychle lze z obrázku)
- určíme velikost vedlejší poloosy $b = |SC| = |SA| = 2$ (z obr.)
- zapíšeme nejprve obecný tvar E, pak do něj dosadíme konkrétní hodnoty

$$\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$$

$$\underline{\underline{\frac{(x-1)^2}{16} + \frac{(y+2)^2}{4} = 1}}$$

- určíme excentricitu $e^2 = a^2 - b^2 = 16 - 4 = 12$

$\Rightarrow e = \sqrt{12} = \underline{\underline{2\sqrt{3}}}$

- y-ová hodnota ohnisek F, G je dle obr. stejná jako S
- x-ové hodnoty jsou $\pm 2\sqrt{3}$ od S

$\underline{\underline{F[1-2\sqrt{3}; -2]}}$ $\underline{\underline{G[1+2\sqrt{3}; -2]}}$

169/5.31 $c = ?$ $y = x + c$ tečna $E: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$

- dosadíme přímku do elipsy
- tečna je to ⇔ $D = 0$

$$\frac{x^2}{4} + (x+c)^2 = 1$$

$$\frac{x^2}{4} + x^2 + 2cx + c^2 - 1 = 0 \quad /\cdot 4$$

$$x^2 + 4x^2 + 8cx + 4(c^2-1) = 0$$

$$5x^2 + 8cx + 4(c^2-1) = 0 \qquad A = 5 \quad B = 8c \quad C = 4(c^2-1)$$

$$D = 0 \qquad 64c^2 - 4 \cdot 5 \cdot 4(c^2-1) = 0$$

$$64c^2 - 80c^2 + 80 = 0$$

$$16c^2 = 80$$

$$c^2 = \frac{80}{16} = 5$$

$$\underline{\underline{c = \pm\sqrt{5}}}$$

169/5.32

$E: \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ tečna v bodě $T[4; -\frac{9}{5}]$

- zapíšeme nejprve obecný tvar tečny

$$\frac{(x-m)(x_0-m)}{a^2} + \frac{(y-n)(y_0-n)}{b^2} = 1$$

- z rce E. vidíme, že $S[0;0]$ ⇒ $m = 0$, $n = 0$
- z bodu T dosadíme za $x_0$ a $y_0$ :

$$\frac{x \cdot 4}{25} + \frac{y \cdot (-\frac{9}{5})}{\cancel{9}} = 1$$

$$\frac{4x}{25} - \frac{y}{5} = 1 \quad /\cdot 25$$

$t$: $\underline{\underline{4x - 5y = 25}}$ ⇔ $\underline{\underline{4x - 5y - 25 = 0}}$

169/5.33, 5.34 analogicky 166/Př. 2 (řešená úloha)

169/5.35 – nejprve určíme souřadnice obou průsečíků E. s přímkou ⇒ určíme $x_0, y_0$

– dosadíme do rce tečny hodnoty $x_0, y_0$

$$(x-1)(x_0-1) + \frac{(y+2)(y_0+2)}{4} = 1$$

– upravíme na OR přímky

169/5.37 – dosadíme přímku do elipsy

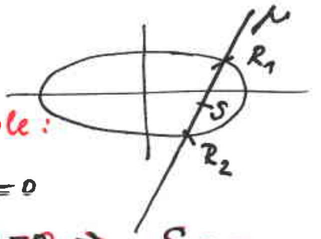
– tečna je to ⇔ $D=0$ ⇒ určíme $q$

169/5.39 $p: y = 2x + c$ $E: 4x^2 + 9y^2 = 36$

$S \in q: 2x + 9y = 0$ $\longrightarrow$ * dosadíme výsledek získaný úplně dole:

$$-\frac{18}{20}c + \frac{9c}{10} = 0$$

$0=0 \Rightarrow \underline{\underline{S \in q}}$



– určíme průsečíky přímky $p$ s elipsou

⇒ dosadíme $p$ do $E$.

$$4x^2 + 9(2x+c)^2 = 36$$
$$4x^2 + 9(4x^2 + 4cx + c^2) = 36$$
$$4x^2 + 36x^2 + 36cx + 9c^2 - 36 = 0$$
$$40x^2 + 36cx + 9c^2 - 36 = 0$$

$A = 40$
$B = 36c$
$C = 9c^2 - 36$

$$x_{1/2} = \frac{-36c \pm \sqrt{(36c)^2 - 4\cdot 40(9c^2-36)}}{80}$$

⇒ x-ové souřadnice bodů $R_1, R_2$

– $S = \dfrac{R_1 + R_2}{2}$

– x-ová souřadnice bodu S:

$$s_x = \frac{\frac{-36c + \sqrt{\quad}}{80} + \frac{(-36c - \sqrt{\quad})}{80}}{2} = \frac{-72c}{2\cdot 80} = -\frac{36c}{80} = \underline{\underline{-\frac{9}{20}c}}$$

– y-ová souřadnice $s_y = 2x + C = -\frac{18}{20}c + c = \frac{c}{10}$ $\underline{S\left[-\frac{9}{20}c; \frac{c}{10}\right]}$ *

170/5.40. $p = ?$ tak aby tečny bodem $X[p;0]$ k elipse byly navzájem kolmé

$E: \quad 4x^2 + 9y^2 = 36$

$$t_1 \perp t_2 \quad \Rightarrow \quad \vec{t_1} \cdot \vec{t_2} = 0 \quad \text{resp} \quad \vec{n_1} \cdot \vec{n_2} = 0$$

- tečny k elipse určíme podobně jako tečny ke kružnici dle 150/př.4 (řešený) (polára)
  152/př.5 –||–
- upravíme nejdříve rci E na středový tvar:

$$\frac{4x^2}{36} + \frac{9y^2}{36} = 1 \Leftrightarrow \underline{\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1} \Rightarrow S[0;0]$$

- polára elipsy (podobně jako tečna)

$$\frac{x x_1}{9} + \frac{y y_1}{4} = 1 \quad \Rightarrow \text{dosadíme za } x_1, y_1 \; [p;0]$$

⇒ upravíme na tvar

$$\frac{x \cdot p}{9} + \underbrace{\frac{y \cdot 0}{4}}_{=0} = 1 \Leftrightarrow \frac{xp}{9} = 1 \Leftrightarrow \underline{x = \frac{9}{p}}$$

- najdeme průsečíky poláry s elipsou ⇒ tečné body

$$4\left(\frac{9}{p}\right)^2 + 9y^2 = 36 \quad \Rightarrow \text{dopočítáme } y$$

$$\frac{4 \cdot 81}{p^2} + 9y^2 = 36 \; /:9 \Rightarrow \frac{36}{p^2} + y^2 = 4 \Rightarrow y^2 = 4 - \frac{36}{p^2} = \frac{4p^2 - 36}{p^2}$$

$$T_1\left[\frac{9}{p}; \frac{2\sqrt{p^2-9}}{p}\right] \quad T_2\left[\frac{9}{p}; \frac{-2\sqrt{p^2-9}}{p}\right] \quad y^2 = \frac{4(p^2-9)}{p^2} \quad y = \frac{\pm 2\sqrt{p^2-9}}{p}$$

$t_1 = XT_1$ $\quad XT_1 \cdot XT_2 = 0 \quad (t_1 \perp t_2)$

$t_2 = XT_2$ $\quad XT_1 = \left(\frac{9}{p} - p; \frac{2\sqrt{\ }}{p}\right)$

$$\boxed{\text{**} \quad p^2 = 9 \quad \cancel{p = \pm 3} \qquad p^2 = 13 \quad \underline{\underline{p = \pm\sqrt{13}}}}$$

aby $y \neq 0$ ⇒ $T_1 = T_2$ což nelze

$XT_2 = \left(\frac{9}{p} - p; \frac{-2\sqrt{\ }}{p}\right)$

$$\left(\frac{9}{p} - p\right)^2 + \frac{2\sqrt{\ }}{p}\left(\frac{-2\sqrt{\ }}{p}\right) = 0$$

$$\frac{(9-p^2)^2}{p^2} - \frac{4(p^2-9)}{p^2} = 0 \qquad z^2 = -4z \quad \text{**}$$

$$z^2 + 4z = 0 \quad z(z+4) = 0$$

$$(\underbrace{9-p^2}_{z})^2 = 4(\underbrace{p^2-9}_{-z}) \qquad z = 0 \quad z = -4 \qquad p^2 = 9 \; [illegible]$$

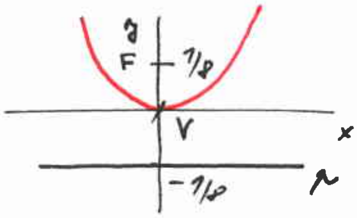
$$9 - p^2 = 0 \quad 9 - p^2 = -4 \quad p^2 = 13$$

# C. Parabola, parabola a přímka

180/5.41 máme ukázat, že rovnicí $y=2x^2$ je daná parabola s ohniskem $F[0;\frac{1}{8}]$ a řídicí přímkou $p: y=-\frac{1}{8}$

⇒ tzn. že známe F, p a máme dospět k rovnici paraboly $y=2x^2$

- nejprve si črtneme F a řídicí přímku do soustad. os ⇒ zjistíme typ paraboly ∪, ∩, ⊂, ⊃



⇒ z obr. lze zjistit další parametry paraboly:

a) vrchol V ⇒ leží v půlce mezi F a řídicí přímkou p (v hodinách značenou jako d)

$V[0;0]$

b) určíme hodnotu parametru p

$p = v(F, \vec{p})$ ... vzdál. ohniska od řídicí přímky

$p = 2\cdot\frac{1}{8} = \frac{1}{4}$

- zapíšeme obecný tvar rovnice paraboly daného typu:

$(x-m)^2 = 2p(y-n)$ - dosadíme za m, n z $V[0;0]$

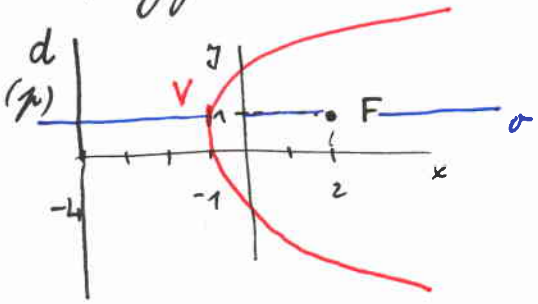
$x^2 = 2\cdot\frac{1}{4}\cdot y$ - dosadíme za $p=\frac{1}{4}$

$x^2 = \frac{1}{2}y$ ⇔ $y=2x^2$ což odpovídá zadání, důkaz je tímto proveden

180/5.42 $F[2;1]$ - ohnisko Rce $E$ = ?

$p: x=-4$ - řídící přímka $V$ = ? vrchol

- nejprve obrázek ⇒ vyjasní nám <u>typ paraboly</u>



a) - víme, že vrchol $V$ musí ležet na ose paraboly tj. přímce ⊥ na d a procházející ohniskem $F$
⇒ zakreslíme modře

b) - dále víme, že $V$ leží v půlce mezi $F$ a $d$ ⇒ zakreslíme $V$ a parabolu

c) - určíme tedy souřadnice vrcholu

$V[-1;1]$ a hodnotu parametru $p=6$ (vzdál. F od d)

d) napíšeme obecný tvar paraboly daného typu:

$(y-n)^2 = 2p(x-m)$ a dosadíme $V, p$

$(y-1)^2 = 2\cdot 6\cdot(x-(-1))$

$(y-1)^2 = 12(x+1)$

180/5.43 $M[2;2]$ $P: y^2-6x+8=0$

- $p$ nemá s P. další spol. bod ⇒ tečna v bodě M

- ze zadání plyne, že $M \in P$. (lze ověřit: $2^2-6\cdot 2+8=0$
$4-12+8=0$
$0=0$ )

a) rovnici P. upravíme na vrcholový tvar

$y^2 = 6x-8$

$y^2 = 6(x-\frac{8}{6})$

$y^2 = 6(x-\frac{4}{3})$

↙ ↘

$V[\frac{4}{3};0]$ $p=3$

b) napíšeme obec. tvar tečny

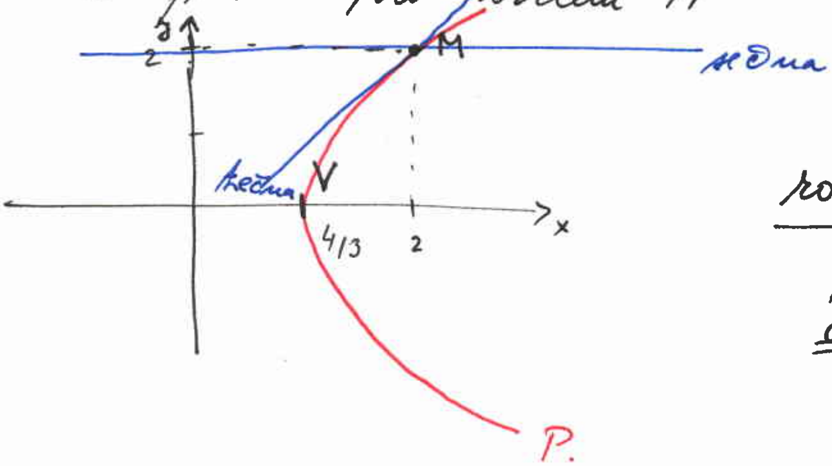
$(y-n)(y_0-n) = p(x-m) + p(x_0-m)$

c) dosadíme za $x_0=2$, $y_0=2$ (bod M)
a za $m=\frac{4}{3}$ $n=0$ (vrchol V) a $p=3$

$y\cdot 2 = 3(x-\frac{4}{3}) + 3(2-\frac{4}{3})$ ⇒ $3x-2y-2=0$ → rce tečny

23)

b) další přímka, která prochází bodem M a NEMÁ s P. další společný bod je kromě tečny [viz a)] i sečna ∥ s osou x a procházející bodem M



rovnice sečny:

$y = 2$

181/5.44 P: $y^2 - 4y + 12x = 0$ rce tečny v bodě O[0;0]

máme také dokázat, že tečna půlí úhel mezi osou x a přímkou OF (F... ohniska)

a) upravíme nejprve rci P. na vrcholový tvar

$$y^2 - 4y = -12x$$
$$(y-2)^2 - 4 = -12x \nearrow$$
$$(y-2)^2 = -12x + 4$$
$$(y-2)^2 = \boxed{-}12\left(x - \frac{1}{3}\right)$$

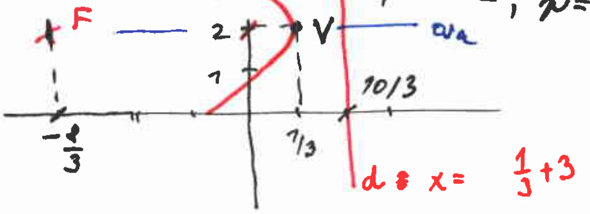
$\swarrow$ $V\left[\frac{1}{3}; 2\right]$ $\searrow$ $p = 6$ $\rightarrow$ $\boxed{-}$ otevření doleva )

b) napíšeme obecný tvar tečny

$$(y-n)(y_0-n) = -p(x-m) - p(x_0-m)$$
$$(y-2)(0-2) = -6(x-1/3) - 6(0-1/3)$$
$$-2y + \cancel{4} = -6x + \cancel{2} + \cancel{2}$$
$$-2y = -6x$$

$\underline{y = 3x}$ – rovnice tečny

a dosadíme za $x_0 = 0$ $y_0 = 0$, $m = 1/3$, $n = 2$, $p = 6$



c) určíme souřadnice ohniska F ⇒ leží na ose P. jako V ⇒ y-ová souřadnice je stejná 2

⇒ je-li vzdál. V od d $\frac{1}{3}+3$ musí být také $VF = \frac{1}{3} - 3$ ⇒

$$F\left[\frac{-8}{3}; 2\right]$$

d) určíme souřadnice vektoru OF

$$OF = (\overset{u_1}{-\tfrac{8}{3}} ; \overset{u_2}{2})$$

e) určíme úhel, který svírá OF s osou x :

⇒ nejlépe a nejrychleji pomocí směrnice

$$k_{OF} = \frac{u_2}{u_1} = \frac{2}{-\frac{8}{3}} = -\frac{6}{8} = -\frac{3}{4}$$

$$\varphi = tg^{-1}(k_{OF}) \qquad (tg\,\varphi = k_{OF}) \rightarrow \text{II. kvadrant}$$

$$\varphi = tg^{-1}\left(-\frac{3}{4}\right) = \underline{\overset{180° - 36{,}87}{143{,}13°}}$$

f) určíme úhel, který svírá tečna s osou x

rovnici tečny jsme určili jako $y = 3x$

$$\Rightarrow k_t = 3 \qquad tg\,\varphi_2 = 3 \quad \Rightarrow \underline{\varphi_2 = 71{,}57°}$$

g) ověříme, že $\underline{\underline{\varphi_2 \doteq \frac{\varphi}{2}}}$

181/ 5.45 $P: \; y = ax^2 + bx + c \qquad K[1;-3] \; L[0;-1] \; M[2;-1]$

– prochází-li P. body K, L, M, lze tyto body dosadit do rovnice paraboly (za x, y) ⇒ 3 rce o 3 neznámých

I. K: $-3 = a + b + c$

II. L: $-1 = 0 + 0 + c$ ⇒ lze přímo určit $\boxed{c = -1}$ a dosadit do

III. M: $-1 = 4a + 2b + c$

I. $a + b = -2 \qquad a + b = -2 \quad /\cdot(-1)$ ⊕ $\boxed{a = 2}$

III. $4a + 2b = 0 \quad /:2 \qquad 2a + b = 0 \qquad \boxed{b = -4}$

$$\underline{\underline{y = 2x^2 - 4x - 1}}$$

181/5.46   P: $y=2x^2-4x-1$ – rce paraboly z předchozí úlohy

– upravíme rci P. na vrcholový tvar

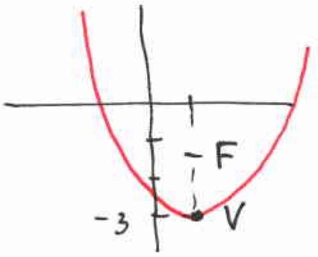
$$2x^2-4x = y+1$$
$$2(x^2-2x) = y+1$$
$$(x^2-2x) = \frac{1}{2}(y+1)$$

$$(x-1)^2-1 = \frac{1}{2}y+\frac{1}{2}$$
$$(x-1)^2 = \frac{1}{2}y+\frac{3}{2}$$
$$(x-1)^2 = \frac{1}{2}(y+3)$$

– z rovnice určíme vrchol $V[1;-3]$

a parametr $p \Rightarrow 2p = \frac{1}{2} \Rightarrow p = \frac{1}{4}$

– črtneme P.



$p \overset{\oplus}{=} \frac{1}{4} \Rightarrow$ otevřená nahoru U

$p$ ... vzdál. F od řídící přímky,

tj: $\frac{p}{2}$ je vzdál VF

– x-ová souřadnice F je stejná jako V ⇒ 1

– y-ová –||– je $V + \frac{p}{2} = -3 + \frac{\frac{1}{4}}{2} = -3 + \frac{1}{8} = \frac{-23}{8}$

$F\left[1;\ \frac{-23}{8}\right]$

181/5.47   P: $y^2-4y-6x+22=0$   $k \parallel p: y=x$

⇒ jakákoliv přímka ∥ s přímkou p musí mít rovnici $y=x+c$ (stejná směrnice, jiný posun c)

⇒ aby tato přímka byla tečna ⇒ $D=0$ po dosazení přímky do paraboly a řešení kvadrat. rce s parametrem

$$(x+c)^2-4(x+c)-6x+22=0$$

$$x^2+2cx+c^2-4x-4c-6x+22=0$$

$$x^2+x(2c-10)+c^2-4c+22=0$$

$A=1$

$B=2c-10=2(c-5)$

$C=c^2-4c+22$

$$D=B^2-4AC=0$$

$$4(c-5)^2-4(c^2-4c+22)=0$$

$$4(c^2-10c+25)-4c^2+16c-88=0$$

$$\cancel{4c^2}-40c+100-\cancel{4c^2}+16c-88=0$$

$$-24c=-12$$

$$c=\frac{1}{2}$$

rovnice tečny: $y=x+\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2y=2x+1$

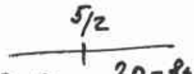
181/ 5.48 $P: y^2=2px$ $q: y=\frac{x}{2}+5$ ⇒ se zadání plyne, že přímka $q$ je tečna ⇒ dosadíme $q$ do $P$. a opět řešíme $D=0$

$$\left(\frac{x}{2}+5\right)^2=2px \Rightarrow \frac{x^2}{4}+5x+25=2px \quad /.4$$

$x^2+20x-8px+100=0$ $A=1$ $B=20-8p$ $C=100$

$D=0 \Leftrightarrow (20-8p)^2-4.1.100=0$ $(20-8p)^2=400 \Leftrightarrow |20-8p|=20$

N. B. $\frac{5}{2}$



$-20+8p=20$

$p=5$

$20-8p=20$

$p=0 \Rightarrow \emptyset$

$p_1=0 \Rightarrow \emptyset$ dle d

parabo

$p\neq0$

$\boxed{p_2=5}$ → pouze toto je řešení

lze řešit i klasicky

$$400-320p+64p^2-400=0$$

$$64p^2-320p=0 \quad /:64$$

$$p^2-5p=0$$

$$p(p-5)=0$$

$p_1=0 \Rightarrow \emptyset$

$\boxed{p_2=5}$

# D. Hyperbola, hyperbola a přímka

192 / 5.51 $H: \ x^2 - y^2 = 1$ zvolíme lib. bod $X[x, y]$

$E[\sqrt{2} ; 0] \quad F[-\sqrt{2} ; 0] \qquad \big||EX| - |FX|\big| = 2 \quad (*)$

− nejprve určíme vektory $\vec{EX}$ a $\vec{FX}$ a jejich velikost:

$\vec{EX} = (x - \sqrt{2} ; y)$

$\vec{Fx} = (x + \sqrt{2} ; y)$

$|EX| = \sqrt{(x-\sqrt{2})^2 + y^2}$

$|FX| = \sqrt{(x+\sqrt{2})^2 + y^2}$

− dosadíme do (*) a musíme dospět k výrazu $0 = 0$

$$\left| \sqrt{(x-\sqrt{2})^2 + y^2} - \sqrt{(x+\sqrt{2})^2 + y^2} \right| = 2 \qquad /^2$$

$$(x-\sqrt{2})^2 + y^2 - 2\sqrt{\ }\sqrt{\ } + (x+\sqrt{2})^2 + y^2 = 4$$

$$x^2 \cancel{- 2\sqrt{2}x} + 2 + y^2 - 2\sqrt{\ }\sqrt{\ } + x^2 \cancel{+ 2\sqrt{2}x} + 2 + y^2 = 4$$

$$2x^2 + 2y^2 + 4 - 2\sqrt{\ }\sqrt{\ } = 4$$

$$2x^2 + 2y^2 = 2\sqrt{\ }\sqrt{\ }$$

$$x^2 + y^2 = \sqrt{\ }\sqrt{\ }$$

$$x^2 + y^2 = \sqrt{\left[(x-\sqrt{2})^2 + y^2\right]\left[(x+\sqrt{2})^2 + y^2\right]}$$

⋮

192/5.52  H: $10x^2 - 5y^2 = 50$

rce H = ?  stejné asymptoty a proch. bodem $M[10;0]$

a) určíme nejprve rovnice asymptot

⇒ upravíme rci H.:

$$\frac{10x^2}{50} - \frac{5y^2}{50} = 1 \Leftrightarrow \underline{\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{10} = 1}$$

⇒ $S[0;0]$  $a^2 = 5$  $a = \sqrt{5}$  ⇒ typ.

$b^2 = 10$  $b = \sqrt{10}$  $e = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{15}$

⇒ rce asymptot

$$(y-n) = \pm\frac{b}{a}(x-m)$$

$m = 0$
$n = 0$ dle $S[0;0]$

$$y = \pm\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}}x \Rightarrow \underline{\underline{y = \pm\sqrt{2}x}}$$

b) odvodíme ze známých vlastností rovnici nové hyperboly

⇒ víme: $y = \pm\sqrt{2}x$ ... rce asymptot

$M[10;0]$  $M \in H.$

⇒ víme tedy, že $\frac{b}{a} = \sqrt{2}$ a $S[0;0]$

⇒ $b = \sqrt{2}a$
$b^2 = 2a^2$

obecně: $$\frac{(x-m)^2}{a^2} - \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$$

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  dosadíme za $b^2$ z

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{2a^2} = 1$  dosadíme bod M  $\frac{100}{a^2} - 0 = 1$

$a^2 = 100$  $\boxed{a = 10}$

c) dopočítáme b:

$$b^2 = 2a^2 = 2.100 = 200$$

$$\boxed{b = 10\sqrt{2}}$$

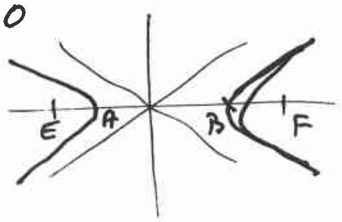
napíšeme rovnici H:

$$\frac{x^2}{100} - \frac{y^2}{200} = 1 \iff 200x^2 - 100y^2 = 20000$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{2x^2 - y^2 = 200}} \quad \iff 10x^2 - 5y^2 = 1000$$ (dle výsl. v učeb. ale lze ještě zkrátit 5)

d) ohniska H.: $10x^2 - 5y^2 = 50$

z a) $e = \sqrt{15}$



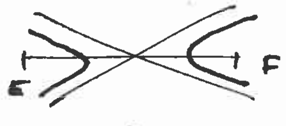
A, B ... vrcholy
E, F ... ohniska

- z obr. plyne, že y-ová souřadnice E, F je stejná jako S
- x-ová je ± e od S [0; 0]

$$\underline{\underline{E\left[-\sqrt{15}; 0\right]}} \quad \underline{\underline{F\left[\sqrt{15}; 0\right]}}$$ - ohniska

192/5.53 E[-5;0] F[5;0] M[1;0] M ∈ H. rce H = ?

a) - dle polohy E, F určíme typ H. ⇒



a souřadnice středu: $S = \frac{E+F}{2}$

$$S[\overset{\uparrow}{\underset{m}{0}}; \overset{\uparrow}{\underset{n}{0}}]$$

b) - dosadíme do obec. tvaru bod M a za $b^2$ z

$$\frac{(x-m)^2}{a^2} - \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$$

$$e = |SE| = |SF| = 5$$

$$e^2 = a^2 + b^2$$

$$25 = a^2 + b^2$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{25-a^2} = 1$$

c) rce H

$$M: \quad \frac{1}{a^2} - \frac{0}{25-a^2} = 1 \qquad a^2 = 1 \Rightarrow \boxed{a = 1}$$

$$b^2 = 25 - a^2 = 25 - 1 = 24 \quad b = \sqrt{24}$$

$$\underline{\underline{\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{24} = 1}}$$

192/5.54 $S, E, F = ?$ $H: x^2+6x-y^2+6y+4=0$

– metodou doplnění na □ převedeme OR H. na středový tvar:

$$(x+3)^2-9-(y^2-6y)+4=0$$

$$(x+3)^2-9-(y-3)^2\cancel{-}+9+4=0$$

– musíme přičíst protože před závorkou je ⊖

$$(x+3)^2-(y-3)^2=-\cancel{4}4 \quad /:\cancel{4}\,-4$$

$$\frac{(x+3)^2}{-4}+\frac{(y-3)^2}{4}=1$$

⇒ $S[-3;3]$

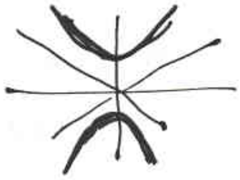
⇒ $a^2=b^2=4$

$a=b=\sqrt{4}=2$

$e^2=a^2+b^2=4+4=8$

$e=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

– rovnoosá H.



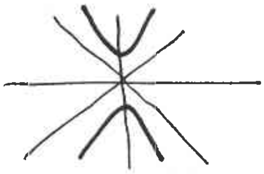
– z rce H. plyne typ:

⇒ ohniska E, F mají stejnou x-ovou souřadnici jako S

⇒ ~~x~~y-ová souřadnice E, F je ± e od S

$E[-3;\ 3-2\sqrt{2}]$ $F[-3;\ 3+2\sqrt{2}]$

192/5.55 analogicky dle 5.53 s tím, že dle souřadnic ohnisek $E[0;2]$ $F[0;6]$ se jedná o typ



197/ 5.58 $\quad H: \ 2x^2 - y^2 = 2 \qquad t \parallel p : y = 2x$

— analog. jako u paraboly, elipsy nebo kružnice

a) formulujeme rovnici libovolné přímky $\parallel p$ :

$$y = 2x + c$$

b) dosadíme tuto přímku do rce $H$.

tečna $\Leftrightarrow \quad D = 0$

$$2x^2 - (2x+c)^2 = 2$$

$$2x^2 - (4x^2 + 4cx + c^2) = 2$$

$$2x^2 - 4x^2 - 4cx - c^2 = 2$$ provedeme vše doprava

$$2x^2 + 4cx + c^2 + 2 = 0$$

$A = 2$

$B = 4c$

$C = c^2 + 2$

$D = 0 \Leftrightarrow (4c)^2 - 4 . 2 . (c^2+2) = 0$

$$16c^2 - 8c^2 - 16 = 0$$

$$8c^2 - 16 = 0 \qquad 8c^2 = 16$$

$$c^2 = 2 \qquad \underline{\underline{c = \pm\sqrt{2}}}$$

rce tečen:

$t_1: \ \underline{\underline{y = 2x + \sqrt{2}}}$

$t_2: \ \underline{\underline{y = 2x - \sqrt{2}}}$

197/5.59 $A[2;1]$ $H: x^2-2y^2=2$ analogicky dle 194/Př.1 (řešený)

$\Rightarrow$ jediný společný bod < tečna / přímka $\parallel$ s asymptotou

$\Rightarrow$ 3 řešení

a) upravíme rci H. na středový tvar

$$x^2-2y^2=2 \quad /:2$$

$$\underline{\frac{x^2}{2}-y^2=1} \quad \Rightarrow \quad S[0;0] \quad m=0, \; n=0$$

b) rce tečny : $\frac{x\cdot x_0}{2}-y y_0=1$

v bodě A:
(dosadíme za $x_0, y_0$) $\frac{x\cdot 2}{2}-y\cdot 1=1$

$$t: \underline{\underline{x-y=1}} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{y=x-1}}$$

c) určíme rovnice asymptot

obecně : $(y-n)=\pm\frac{b}{a}(x-m)$

víme: $S[0;0]$ $a^2=2$ $b^2=1$ $\Rightarrow$ $a=\sqrt{2}$ $b=1$

as: $\underline{y=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}x}$ $p \parallel$ as $y=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}x+c$

$A\in p$: musíme dopočítat c

I. $1=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot 2+c_1$

$c_1=1-\frac{2}{\sqrt{2}}=1-\sqrt{2}$

II. $1=-\frac{1}{\sqrt{2}}2+c_2$

$c_2=1+\frac{2}{\sqrt{2}}=1+\sqrt{2}$

$p_1: y=\frac{x}{\sqrt{2}}+1-\sqrt{2} \Leftrightarrow (y-1)=\frac{x}{\sqrt{2}}-\sqrt{2} \quad /\cdot\sqrt{2}$

$$\boxed{\sqrt{2}(y-1)=x-2}$$

$p_2: y=-\frac{x}{\sqrt{2}}+1+\sqrt{2}$

$$\boxed{\sqrt{2}(y-1)=-x+2}$$

197/5.60  H: $(x-3)^2 - 4y^2 = 1$  $R_y = ?$

tečny v $R_y$ = ?

a) určíme priesečníky
priesečník s osou y má $x=0$

$R_y[0;?]$

⇒ dosadíme za $x=0$ a dopočítame $y$

$(0-3)^2 - 4y^2 = 1$  $4y^2 = 8$

$9 - 4y^2 = 1$  $y^2 = 2$  $|y| = \sqrt{2}$

$y_1 = +\sqrt{2}$  $y_2 = -\sqrt{2}$

$R_{y1}[0;\sqrt{2}]$

$R_{y2}[0;-\sqrt{2}]$

b) napíšeme obecný tvar tečny H

– najprve upravíme rci H. na stredový tvar

$$\frac{(x-3)^2}{1} - \frac{y^2}{\frac{1}{4}} = 1 \qquad a^2 = 1 \quad b^2 = \frac{1}{4} \qquad S[3;0]$$
$$a = 1 \quad b = \frac{1}{2}$$

tečna: $$\frac{(x-m)(x_0-m)}{a^2} - \frac{(y-n)(y_0-n)}{b^2} = 1$$

$t_1$: ($R_{y1}$) $$\frac{(x-3)(0-3)}{1} - \frac{(y-0)(\sqrt{2}-0)}{\frac{1}{4}} = 1$$

$-3x + 9 - 4\sqrt{2}y = 1 \Rightarrow 3x + 4\sqrt{2}y - 8 = 0$ ($t_1$)

$t_2$: ($R_{y2}$) $$\frac{(x-3)(0-3)}{1} - \frac{(y-0)(-\sqrt{2}-0)}{\frac{1}{4}} = 1$$

$-3x + 9 + 4\sqrt{2}y = 1 \Rightarrow 3x - 4\sqrt{2}y - 8 = 0$ ($t_2$)

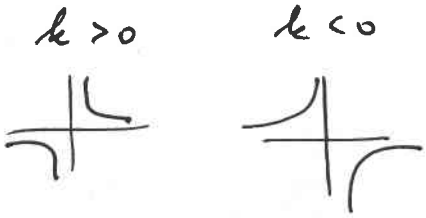
* úlohy pro náročnější studenty

192/ 5.57 S, as., osy, vrcholy hyperboly

$$xy + 3x - 2y - 4 = 0$$

⇒ vzpomeneme-li na lineární lomenou fci jejímž grafem je hyperbola v I a III nebo II. a IV kvadrantu

$$y = \frac{ax+b}{cx+d}$$



a) upravíme rovnici hyperboly na lomený tvar, tj. vyjádříme $y = \dots$

$$xy - 2y = -3x + 4$$

$$y(x-2) = -3x+4$$

$$y = \frac{-3x+4}{x-2} = \frac{-3(x-\frac{4}{3})}{x-2} = -3 \cdot \frac{x-2+2-\frac{4}{3}}{x-2}$$

$$y = -3\left[\underbrace{\frac{x-2}{x-2}}_{=1} + \frac{2-4/3}{x-2}\right] = -3 + \frac{-6+4}{x-2}$$

$$y = -3 + \frac{-2}{x-2} \iff (y+3) = \frac{-2}{x-2} \to \text{II. a IV. kv.}$$

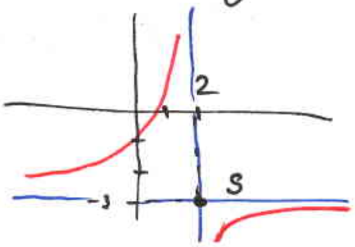
b) ze závorek u x a y vidíme souřadnice středu H.:

$$S[2;-3]$$

c) asymptoty jsou přímky ∥ s osou x a y a procházejí středem ⇒

$$x = 2$$

$$y = -3$$



d) hlavní osa H. je ∥ s ~~p~~ osou II. a IV. kvadr.

tj: s přímkou $y = -x$

lib. ∥ je tedy $y = -x + c$

– hlav. osa prochází středem S:

S: $-3 = -2 + c \Rightarrow c = -1$

hlavní osa: $y = \textcircled{$-$}x - 1$ ⇒ směrnice je $k_1 = -1$

e) vedlejší osa je ⊥ na hlavní a prochází také bodem S

⇒ připomeneme, že pro směrnice kolmých přímek platí: $k_1 \cdot k_2 = -1$   $k_1 = -1 \Rightarrow k_2 = 1$

vedl. osa: $y = x + c$

S: $-3 = 2 + c \Rightarrow c = -5$

vedl. osa: $y = x - 5$

f) vrcholy H. najdeme jako průsečíky hl. osy s H.

H: $xy + 3x - 2y - 4 = 0$

o: $y = -x - 1$

$$x(-x-1) + 3x - 2(-x-1) - 4 = 0$$

$$-x^2 - x + 3x + 2x + 2 - 4 = 0$$

$$-x^2 + 4x - 2 = 0$$

$$x^2 - 4x + 2 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{4 \pm \overset{\sqrt{8}}{\sqrt{16-8}}}{2} \left< \begin{array}{l} \frac{4+2\sqrt{2}}{2} = 2+\sqrt{2} \Rightarrow y_1 = -2-\sqrt{2}-1 = -3-\sqrt{2} \\ \frac{4-2\sqrt{2}}{2} = 2-\sqrt{2} \Rightarrow y_2 = -2+\sqrt{2}-1 = -3+\sqrt{2} \end{array} \right.$$

$A[2+\sqrt{2}; -3-\sqrt{2}]$

$B[2-\sqrt{2}; -3+\sqrt{2}]$

198/ 5.61. H: $(x-2)(y+3) = -2$     $R_x, R_y = ?$

$t_1, t_2 = ?$

Obrázek

⇒ jedná se o stejnou hyperbolu jako v úloze 192/5.57

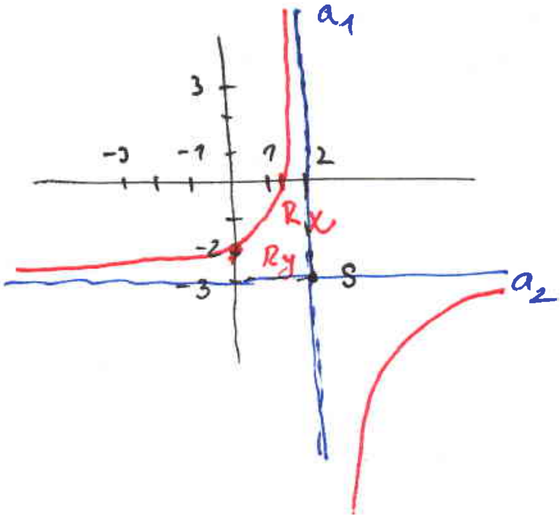
⇒ rci nejprve upravíme do lineární lom. fce a určíme střed

$S[2; -3]$     $y+3 = \frac{-2}{x-2}$

$y = -3 + \frac{\boxed{-2}}{x-2} \rightarrow \ominus$ znamená II a IV. kvadrant.

asymptoty $x = 2$

$y = -3$



- v bodě S uděláme nejdříve asymptoty ⇒ přímky ∥ s x a y
- větev ve II. kv. načrtneme až po výpočtu $R_x, R_y$

$R_x$: $y = 0$     $3 = \frac{-2}{x-2}$

$3(x-2) = -2$

$3x - 6 = -2$

$3x = 4$     $x = \frac{4}{3}$

$R_x\left[\frac{4}{3}; 0\right]$

$R_y$: $x = 0$     $y+3 = \frac{-2}{-2}$     $y = -2$     $R_y[0; -2]$

⇒ rce tečny (viz str. 196 dole) v bodě $[x_0, y_0]$ má tvar $(x_0-m)(y-n) + (y_0-n)(x-m) = 2k$

⇒ v našem případě $k = -2$ (dle zadání)

$t_1$ pro $R_x$: $\left(\frac{4}{3}-2\right)(y+3) + (0+3)(x-2) = -4 \Rightarrow 9x - 2y - 12 = 0$

$t_2$ pro $R_y$: $(0-2)(y+3) + (-2+3)(x-2) = -4 \Rightarrow x - 2y - 4 = 0$