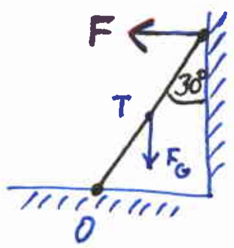
Př. 1. STATIKA TUHÉHO TĚLESA 1)

Žebřík o $m = 6\,kg$ opírá se o stěnu dle obr.



$\alpha = 30°$

těžiště uprostřed, délka žebříku l

Jakou nejmenší vodorovnou silou F odkloníme žebřík od stěny?

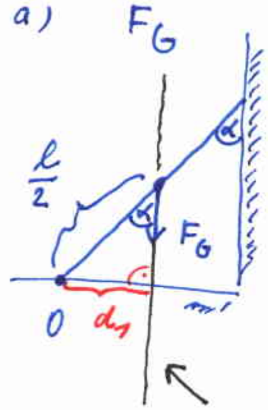
- v těžišti T působí na žebřík tíhová síla F_G
- aby se žebřík odklonil, musí být moment síly F > než moment síly F_G
- osa otáčení je v bodě dotyku žebříku se zemí

⇒ pro obě síly (F a F_G) musíme nejprve určit ramena sil vzhledem k ose otáčení

$F \rightarrow d_2$ $F_G \rightarrow d_1$

- oběma silami proložíme přímku a najdeme kolmou vzdálenost od přímky k ose otáčení (bod 0)

a)

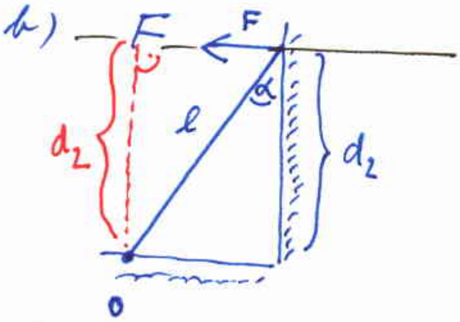


$$\sin\alpha = \frac{d_1}{\frac{l}{2}} \Rightarrow d_1 = \frac{l}{2} \cdot \sin\alpha$$

$$M_1 = F_G \cdot d_1 = mg\,\frac{l}{2}\sin\alpha$$

vektorová přímka síly F_G, F

b)



$$\cos\alpha = \frac{d_2}{l} \Rightarrow d_2 = l \cdot \cos\alpha$$

$$M_2 = F \cdot l\cos\alpha$$

c) $M_2 \geq M_1$

dosadíme z a), b) za M_2 a M_1 a určíme podmínku pro sílu F

$$F \cdot l \cos\alpha \geq mg \frac{l}{2} \sin\alpha$$

– délka l se zkrátí –

$$F \geq \frac{mg}{2} \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$$

$$F \geq \frac{mg}{2} \operatorname{tg}\alpha$$

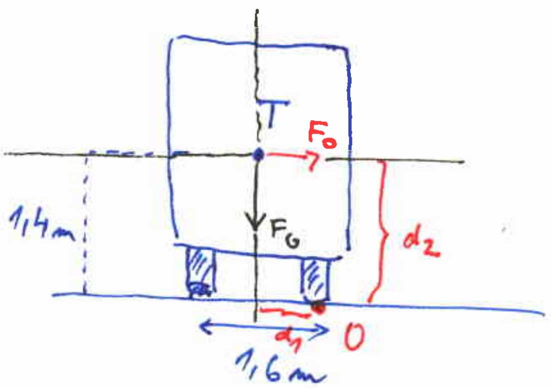
dosadíme konkrétní zadané hodnoty

$$F \geq \frac{6 \cdot 10}{2} \cdot \operatorname{tg} 30^\circ$$

$$F \geq 30 \cdot 0{,}56 \Rightarrow \underline{\underline{F \geq 17{,}32\ N}}$$

Př. 2.

Auto v zatáčce o poloměru $r = 50\,m$. Rozchod kol auta je $1{,}6\,m$, výška těžiště nad silnicí $1{,}4\,m$. Jakou nejv. rychl. může auto jet, aby se nepřeklopilo? Tření je dostatečné, aby nedošlo smyku.



– svisle dolů působí F_G

– v zatáčce navíc F_o (odstředivá síla)

– aby se auto nepřeklopilo musí být moment síly F_G > moment síly F_o

– osa otáčení prochází pravým kolem (bod O)

– silami F_G a F_o proložíme vektorové přímky a určíme ramena sil vzhledem k bodu O (ose)

$F_G \Rightarrow d_1$

$F_o \Rightarrow d_2$

$d_1 = \frac{1,6}{2} = 0,8\ m$

$d_2 = 1,4\ m$

$M_1 \geq M_2$

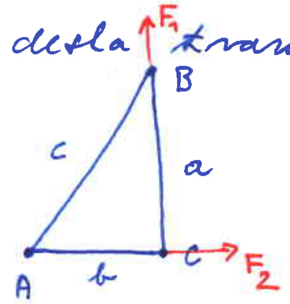
$F_G d_1 \geq F_o d_2$

$\cancel{m} g d_1 \geq \frac{\cancel{m} v_{max}^2}{r} \cdot d_2$ hmotnost se zkrátí

$v_{max}^2 \leq \frac{g d_1 r}{d_2}$

$v_{max} \leq \sqrt{\frac{g d_1 r}{d_2}} = \sqrt{\frac{10 \cdot 0,8 \cdot 50}{1,4}} \doteq 16,9 \doteq \underline{\underline{17\ m s^{-1}}}$

__Př. 3.__ deska tvaru Δ, bodem A jde osa otáčení ⊥ na desku



$a = 0,5\ m$
$b = 0,3\ m$
$F_1 = 7\ N$
$F_2 = 10\ N$

a) $M_1 = ?$ b) $M_2 = ?$ c) $F = ?$ – výsl. síl F_1 a F_2

a) rameno síly F_1 je velikost úsečky b

$d_1 = b = 0,3\ m$

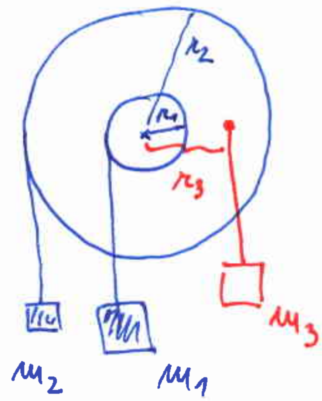
$M_1 = F_1 d_1 = 7 \cdot 0,3\ Nm = \underline{\underline{2,1\ Nm}}$

b) síla F_2 (vektor. přímka síly F_2) prochází osou ⇒ nemá otáčivý účinek

$\underline{\underline{M_2 = 0\ Nm}}$

c) $F_1 \perp F_2 \Rightarrow F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} = \sqrt{7^2 + 10^2} \doteq \sqrt{149}\ N \doteq \underline{\underline{12,2\ N}}$

Př. 4. Na otáčivém kotouči jsou umístěna závaží dle obr. V jaké vzdálenosti r musíme na druhé straně pověsit závaží o hmotnosti $m_3 = 0{,}6$ kg aby nastala rovnováha?



$m_1 = 0{,}5$ kg

$m_2 = 0{,}2$ kg

$r_1 = 0{,}2$ m

$r_2 = 0{,}4$ m

$r_3 = ?$ (m)

- závaží m_1 a m_2 vytváří momenty sil, které jdou stejným směrem ⊙ (před tabuli)
- závaží m_3 musí vykompenzovat tyto 2 momenty momentem stejně velkým opačného směru ⇒ pak nastane rovnováha, kotouč se netočí ⇒ výsl. moment je = 0

$$\vec{M} = 0$$

$$\vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \vec{M}_3 = 0$$

M_1, M_2 ⊙ - zvolíme (+)

M_3 ⊗ ⇒ (−)

$$M_1 + M_2 - M_3 = 0$$

$$M_1 + M_2 = M_3$$

$$F_{G1} r_1 + F_{G2} r_2 = F_{G3} r_3$$

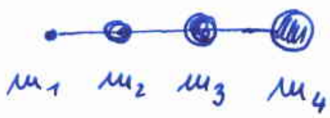
$$m_1 g r_1 + m_2 g r_2 = m_3 g r_3 \qquad g \text{ se krátí}$$

$$m_1 r_1 + m_2 r_2 = m_3 r_3$$

$$r_3 = \frac{m_1 r_1 + m_2 r_2}{m_3} = \frac{0{,}5 \cdot 0{,}2 + 0{,}2 \cdot 0{,}4}{0{,}6} = \frac{0{,}18}{0{,}6}$$

$$\underline{\underline{r_3 = 0{,}3 \text{ m}}}$$

Př. 5. Kuličky na drátě o zanedbatelné hmotnosti, viz obr. Vzájemné vzdálenosti středů kuliček jsou 0,5 m. Urči polohu těžiště této soustavy.



$m_1 = 0{,}1\ \text{kg}$ $\quad m_2 = 0{,}2\ \text{kg}$ $\quad m_3 = 0{,}3\ \text{kg}$ $\quad m_4 = 0{,}4\ \text{kg}$

– soustavu umístíme do osy x a použijeme vzorec pro výpočet těžiště

$$x_T = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots m_n x_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}$$

x_1, x_2, x_3, x_4 ... vzdálenosti středů kuliček od počátku

$x_1 = 0$

$x_2 = 0{,}5\ \text{m}$

$x_3 = 1\ \text{m}$

$x_4 = 1{,}5\ \text{m}$

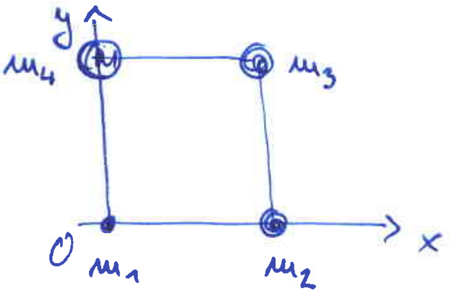
$$x_T = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + m_4 x_4}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4}$$

$$x_T = \frac{0 + 0{,}2 \cdot 0{,}5 + 0{,}3 \cdot 1 + 0{,}4 \cdot 1{,}5}{0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}3 + 0{,}4}\ \text{m}$$

$$x_T = \frac{1}{1}\ \text{m} = \underline{\underline{1\ \text{m}}}$$

– těžiště leží 1 m od počátku $\Rightarrow$ ve středu <u>3. kuličky</u>

Př. 6. Kuličky o hmotnosti $m_1 = 0{,}1\ kg$
jsou umístěny v $m_2 = 0{,}2\ kg$
drátěném čtverci $m_3 = 0{,}3\ kg$
dle obr. Strana □ je 1 m. $m_4 = 0{,}4\ kg$
Urči těžiště soustavy.



⇒ těžiště má v tomto případě x i y-ovou souřadnici

– momenty sil vůči ose x, resp. podélku tvoří pouze m_2 a m_3 (F_{G4} prochází osou)

$$m_2 d_2 + m_3 d_3 = (m_1 + m_2 + m_3 + m_4) \cdot x_T$$

$d_2 = d_3 = 1\ m$ $\qquad 0{,}2 + 0{,}3 = (0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}3 + 0{,}4)\, x_T$

$$\underline{\underline{x_T = 0{,}5\ m}}$$

– momenty sil vůči ose y (resp. podélku) tvoří pouze m_3 a m_4 (F_{G2} proch. osou)

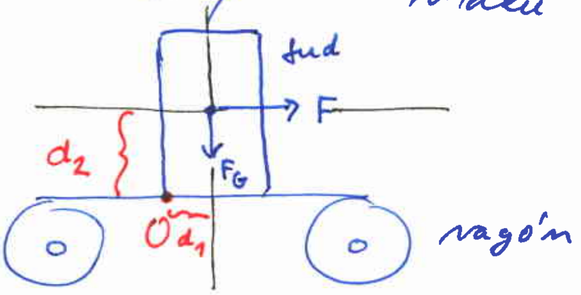
$$m_3 d_3 + m_4 d_4 = (m_1 + m_2 + m_3 + m_4)\, y_T$$

$$0{,}3 + 0{,}4 = 1 \cdot y_T$$

$$\underline{\underline{y_T = 0{,}7\ m}}$$

$$\underline{\underline{T\,[0{,}5;\ 0{,}7]}}$$

Př. 7. Sud tvaru válce stojí ve vagónu. Poloměr sudu $r = 0{,}2\ \text{m}$. Těžiště sudu je na ose válce ve výšce $h = 0{,}6\ \text{m}$ nad podlahou. Při jakém nejmenším zrychlení vlaku se sud převrhne?



$F = m \cdot a$

• osa otáčení!

- moment síly F musí být > moment F_G

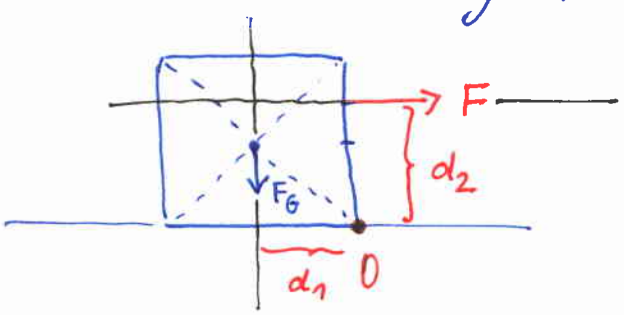
$M_2 \geq M_1$ $\qquad$ $m a h \geq m g r$

$F d_2 \geq F_G d_1$ $\qquad$ $a \geq \frac{g r}{h} = \frac{10 \cdot 0{,}2}{0{,}6} \doteq 3{,}3\ \text{ms}^{-2}$

$d_2 = h \qquad d_1 = r$

Př. 8 Na stole je stejnorodá krychle o hraně $0{,}2\ \text{m}$ a hmotnosti $26\ \text{kg}$. Jak velkou vodorovnou silou působící ve výšce $0{,}15\ \text{m}$ nad stolem můžeme krychli překlopit kolem hrany?

- zakreslíme krychli v řezu, vyznačíme F_G, F a určíme d_1, d_2
- moment síly F $\geq$ moment F_G



$d_1 = 0{,}1\ \text{m}$

$d_2 = 0{,}15\ \text{m}$

$M_2 \geq M_1$

$F d_2 \geq F_G d_1$

$F \geq \frac{m g d_1}{d_2}$

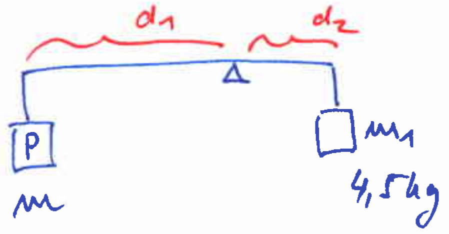
$F \geq \frac{26 \cdot 10 \cdot 0{,}1}{0{,}15}\ \text{N}$

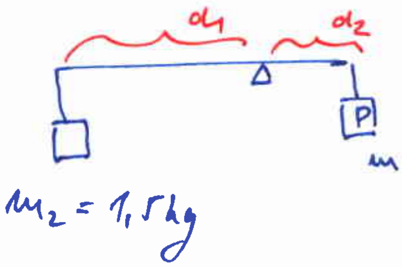
$F \geq 173\ \text{N}$

Př. 9. Chlapci zjišťovali hmotnost předmětu pomocí nerovnoramenné páky.

Předmět zavěšený na delším rameni vyvážili závažím o hmotnosti 4,5 kg. Při zavěšení předmětu na kratší rameno vyvážili závažím o hmotnosti 1,5 kg. Jakou hmotnost měl předmět?

– situaci si nejprve zakreslíme a označíme ramena sil





$$M_1 = M_2 \qquad\qquad M_1 = M_2$$

$$m d_1 = m_1 d_2 \qquad\qquad m_2 d_1 = m d_2$$

– zapíšeme obě rovnice pod sebe

$$\left.\begin{aligned} m d_1 &= m_1 d_2 \\ m_2 d_1 &= m d_2 \end{aligned}\right\} \text{ vydělíme I. druhou}$$

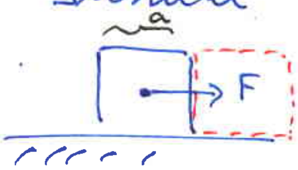
$$\frac{m}{m_2} = \frac{m_1}{m} \iff m^2 = m_1 \cdot m_2 \iff m = \sqrt{m_1 m_2}$$

$$m = \sqrt{4{,}5 \cdot 1{,}5}\ \text{kg} \doteq \underline{\underline{2{,}6\ \text{kg}}}$$

Př. 10 Odlitek tvaru krychle máme přemístit po vodorovné podlaze do určité vzdálenosti. Lze to učinit buď vlečením vodorovnou silou nebo odvalováním kolem hrany krychle. Při jakém součiniteli tření mezi odlitkem a podlahou vykonáme při obou způsobech stejnou práci?

- zvolíme délku hrany krychle : a
- zvolíme, že krychli posuneme o tuto délku což odpovídá jednomu převalení
- pro oba případy vypočítáme obecně práci a obě práce dáme do rovnosti

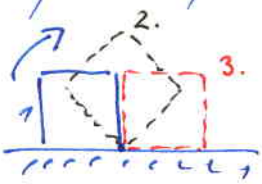
a) sunutí



– síla F musí překonat třecí sílu F_t

$$W_1 = F.a = F_t . a = f . F_n . a = f . mg . a$$

b) překlopení



$$W_2 = mg(h_2 - h_1) \qquad W = \Delta E_p$$

h_1 ... výška těžiště ve stabilní poloze 1

$$h_1 = \frac{a}{2}$$

h_2 ... výška těžiště v labilní poloze 2

⇒ polovina úhlopříčky čtverce (v řezu)

$$h_2 = \frac{u}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$W_2 = mg\left(\frac{a\sqrt{2}}{2} - \frac{a}{2}\right) = mg\frac{a}{2}(\sqrt{2} - 1)$$

c) $W_1 = W_2$

$$f . \cancel{m} . \cancel{g} . \cancel{a} = \cancel{m} . \cancel{g} . \frac{\cancel{a}}{2}(\sqrt{2} - 1)$$

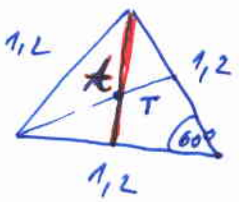
$$f = \frac{\sqrt{2} - 1}{2} \doteq \underline{0{,}21}$$

Př. 11 Na podlaze leží deska tvaru rovnostran. Δ. o straně 1,2 m. Hmotnost desky je 20 kg. Jakou práci musíme vykonat, abychom desku postavili do svislé polohy na 1 stranu? Tloušťku desky zanedbejte.

$W = mg(h_2 - h_1)$

deska leží na zemi, zanedbatelná tloušťka $\Rightarrow h_1 = 0$

– stačí tedy vypočítat h_2 když deska stojí



T je v $\frac{1}{3}$ délky těžnice

– u rovnostr. Δ je těžnice zároveň výškou:

$\sin 60° = \dfrac{t}{1,2}$ $\quad t = 1,2 \cdot \sin 60° = 1,04\,m$

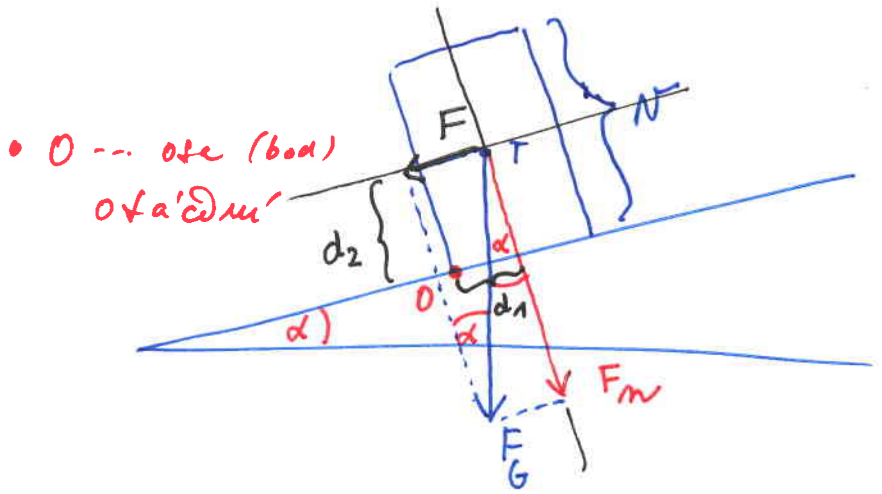
$h_2 = \frac{1}{3} t = \frac{1}{3} \cdot 1,04 \doteq \underline{0,35\,m}$

$W = mg h_2 = 20 \cdot 10 \cdot 0,35\,J \doteq \underline{\underline{69\,J}}$

Př. 12

Na nakloněnou rovinu svírající s vodorovnou rovinou úhel 20° chceme postavit stejnorodý válec o poloměru podstavy 0,12 m. Jaká může být max. výška válce, aby se nepřeklopil?

- zakreslíme válec v řezu na nakloněnou rovinu a vyznačíme působící síly
- aby se válec nepřeklopil, musí být moment síly F < moment síly F_n



připomeneme že platí

$$\sin\alpha = \frac{F}{F_G}$$

$$\cos\alpha = \frac{F_n}{F_G}$$

- síla F má působiště v těžišti, které se nachází v polovině výšky válce
- dále z obr. vidíme, že $d_1 = r$ $\quad d_2 = \frac{v}{2}$

$$M_1 > M_2$$

$$F_n \cdot d_1 > F \cdot d_2$$

$$\cancel{F_G} \cdot \cos\alpha \cdot d_1 > \cancel{F_G} \cdot \sin\alpha \cdot d_2$$

$$\cos\alpha \cdot r > \sin\alpha \cdot \frac{v}{2}$$

$$2r > \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \cdot v$$

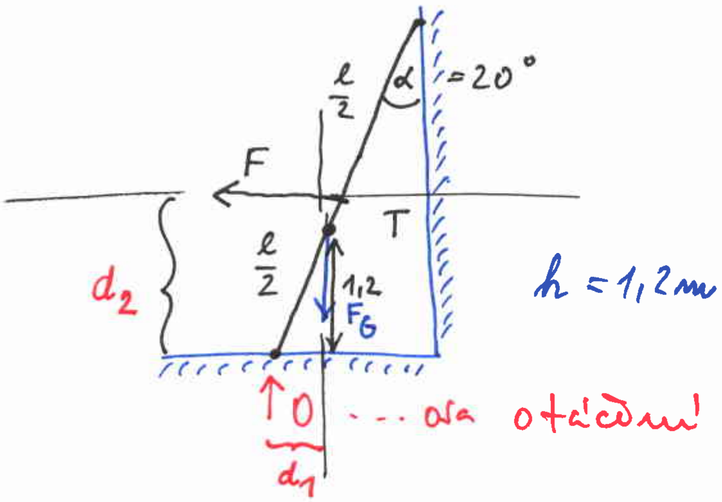
$$2r > \operatorname{tg}\alpha \cdot v$$

$$v < \frac{2r}{\operatorname{tg}\alpha}$$

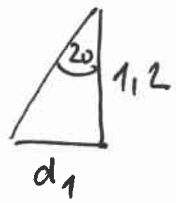
$$v < \frac{2 \cdot 0{,}12}{\operatorname{tg} 20°} \doteq \underline{\underline{0{,}66\ \text{m}}}$$

Př. 13

Žebřík o délce 3 m a hmotnosti 12 kg je opřen o stěnu dle obr. $\alpha = 20°$. Výška těžiště nad podlahou je 1,2 m, těžiště není uprostřed žebříku! Jakou nejmenší vodorovnou silou působící v polovině žebříku odklopíme žebřík od stěny?



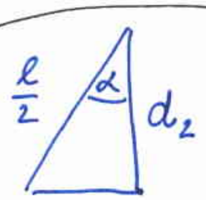
$h = 1{,}2\,m$



$$\mathrm{tg}\,20° = \frac{d_1}{1{,}2}$$

$$d_1 = 1{,}2 \cdot \mathrm{tg}\,20°$$

obecně $d_1 = h \cdot \mathrm{tg}\,\alpha$



$$\cos\alpha = \frac{d_2}{\frac{l}{2}}$$

$$d_2 = \frac{l}{2} \cdot \cos\alpha$$

$$M_2 \geq M_1$$

$$F \cdot d_2 \geq F_G\, d_1$$

$$F \cdot \frac{l}{2} \cdot \cos\alpha \geq mg\, h\, \mathrm{tg}\,\alpha$$

$$F \geq \frac{2 \cdot mgh \cdot \mathrm{tg}\,\alpha}{l \cdot \cos\alpha} = \frac{2 \cdot 12 \cdot 10 \cdot 1{,}2 \cdot \mathrm{tg}\,20°}{3 \cdot \cos 20°}$$

$$\underline{\underline{F \geq 37{,}2\ N}}$$