Přírodní vědy moderně a interaktivně

Gymnázium Hranice

Sbírka řešených příkladů do semináře fyziky

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Kinematika

1. Až do roku 1883 se každé město ve Spojených státech řídilo svým vlastním časem. Cestujeme-li dnes, posouváme si hodinky jen tehdy, je-li časový posun roven celé hodině. Jakou nejkratší vzdálenost je třeba překonat při jízdě z Ostravy, abychom museli posunout své hodinky právě o jednu hodinu? (s. z. š. 49° 43“)

Řešení:

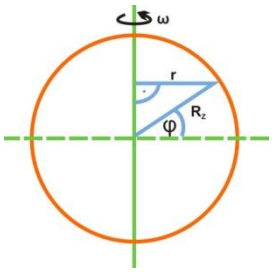
Pohybujeme se po kružnici o poloměru:

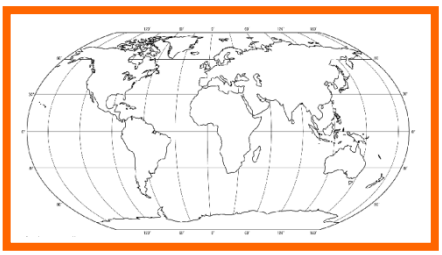
$r = R_Z . \cos\varphi$

Země je rozdělena 24 poledníky,

z obvodu této kružnice urazíme jen

$$\frac{1}{24} \Rightarrow s = \frac{2.\pi.r}{24} \Rightarrow s = \frac{\pi.R_Z.\cos\varphi}{12}$$





Po dosazení: $s = \frac{3,14.6378.10^3 .cos49°43'}{12}$ $m = 1079.10^3$ $m = 1079\ km$

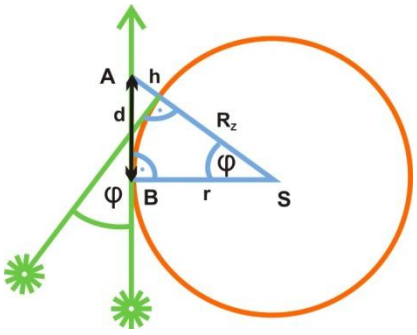
2. Užívám si prázdnin u moře. Vleže (se stopkami v ruce ☺) pozoruji západ Slunce. Stopky spustím v okamžiku, kdy mi Slunce zcela zmizí. Pak vyskočím na nohy a za 11,1s mi Slunce zmizí podruhé. Urči poloměr Země (oči mám nad Zemí ve výšce 1,7m).

Řešení:

Při náčrtku obrázku použijeme znalost matematiky. Dva ostré úhly v rovině, které mají navzájem kolmé ramena jsou shodné.

Trojúhelník ABS je pravoúhlý, platí Pythagorova věta:

$d^2 + R_Z^2 = (R_Z + h)^2$, $d^2 + R_Z^2 = R_Z^2 + 2R_Zh + h^2$, $d^2 = 2R_Zh + h^2$ (h^2 lze zanedbat) $\Rightarrow$ $d^2 = 2R_Zh$ $\Rightarrow$ $d = \sqrt{2R_Zh}$



Země se otočí kolem vlastní osy za 24 hodin, proto platí:

$\frac{\varphi}{360} = \frac{t}{24h}$, $\varphi = \frac{360t}{24.3600} = \frac{t}{240}$

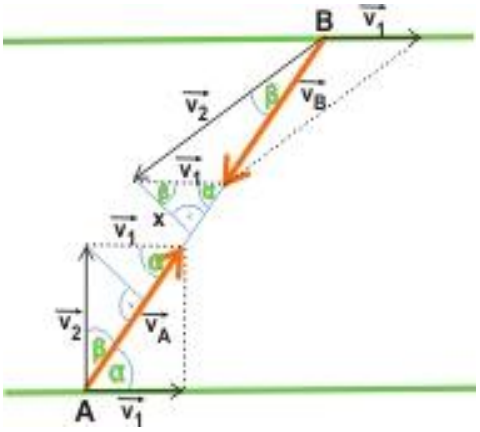
$tg\varphi = \frac{d}{R_Z}$, $R_Z = \frac{d}{tg\varphi}$, $R_Z = \frac{\sqrt{2hR_Z}}{tg\varphi}$ po umocnění dostaneme: $R_Z = \frac{2.h}{tg^2\frac{t}{240}}$

Po dosazení: $R_Z = \frac{2.1,7}{tg^2\frac{11,1}{240}}$ $m = 5,2.10^6 m$

Výsledek se sice liší od $6,4.10^6$m, ale určitě máte z příkladu radost! ☺

esf evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

3. **Dva** čluny současně vypluly stejnými rychlostmi z bodů A, B, které jsou na opačných březích řeky. Plují stále po přímce AB, která svírá se směrem toku úhel 60°. Vzdálenost bodů A,B je 450 m. Určete místo setkání obou lodí, úhel, pod kterým se musí pohybovat vzhledem k přímce AB a rychlost obou lodí vzhledem ke klidné vodě, jestliže se obě lodi setkaly za 1,5 min po výjezdu. Rychlost proudu je $v_1 = 2\ m.s^{-1}$.



Řešení:

AB = 450 m, $v_1 = 2\ m.s^{-1}$, t = 1,5 min, $\alpha = 60°$

Označíme v_2 hledanou rychlost člunů, β hledaný úhel; z obrázku vidím:

* $v_A = v_2.\cos\beta + v_1.\cos\alpha$ $v_B = v_2.\cos\beta - v_1.\cos\alpha$

Je jasné, že:

$$s_1 = \frac{s}{2} + v_1.t.cos\alpha = \left(\frac{450}{2} + 2.1{,}5.60, cos60°\right) m = 315\ m$$

$$s_{21} = \frac{s}{2} - v_1.t.cos\alpha = \left(\frac{450}{2} - 2.1{,}5.60, cos60°\right) m = 135\ m$$

z * platí $v_A + v_B = 2.v_2.\cos\beta$ $\frac{s}{2} = (v_A + v_B).t$ $\frac{s}{2} = 2.v_2.\cos\beta.t$

$\Rightarrow$

$$** \quad v_2.\cos\beta = \frac{s}{2t}$$

z obrázku pro délku úsečky x platí: $v_2.\sin\beta = v_1.\sin\alpha$ $\Rightarrow$ vydělením obou rovnic dostanu

$\mathbf{tg\ \beta = \frac{2.v_1.t.\sin\alpha}{s}}$ Po dosazení: $tg\beta = tg\beta = \frac{2.2.1{,}5.60.sin60°}{450} \Rightarrow \beta = 24°43'$

Oba čluny se vzhledem ke klidné vodě pohybovaly stejnou rychlostí v_2, kterou určíme ze **

$\mathbf{v_2 = \frac{s}{2.t.cos\beta}}$ Po dosazení: $v_2 = \frac{450}{2.1{,}5.60.\cos 34°43'}\ m.s^{-1} = 3\ m.s^{-1}$

4. **První** část cyklistické trasy tvoří stoupání dlouhé 3 km, zbylou část klesání dlouhé 13 km. Honzova průměrná rychlost na celé trase byla dvojnásobkem jeho rychlosti v první části trasy, jenž byla o 16 $km.h^{-1}$ menší než na druhé části trasy. Za jak dlouho ujel Honza celou trasu?

Řešení:

1. část trati je popsána fyzikálními veličinami (dále jen **fv**): s_1, v_1, t_1

2. část trati je popsána **fv**: s_2, v_2, t_2

dle zadání platí $v_p = 2v_1$, $v_2 = (v_1 + 16)\ km.h^{-1}$; víme, že $v_p = \frac{s}{t} = \frac{s_1 + s_2}{t_1 + t_2}$

vyjdeme z celkového času potřebného k uražení dráhy:

$t = t_1 + t_2 \Rightarrow \frac{s}{v_p} = \frac{s_1}{v_1} + \frac{s_2}{v_2} \Rightarrow \frac{s_1 + s_2}{2v_1} = \frac{s_1}{v_1} + \frac{s_2}{v_1 + 16}$

V tomto případu by bylo obecné řešení zbytečně nepřehledné, proto dosadíme číselné hodnoty pro dráhy (u rychlosti už jsme tak stejně provedli ☺). Dostaneme tak rovnici s jednou neznámou ve jmenovateli, kterou lehce vyřešíme.

$$\frac{16}{2v_1} = \frac{3}{v_1} + \frac{13}{v_1 + 16} \Rightarrow \frac{8}{v_1} = \frac{3}{v_1} + \frac{13}{v_1 + 16} \Rightarrow 8v_1 + 128 = 3v_1 + 48 + 13v_1 \Rightarrow 8v_1 = 80 \Rightarrow v_1 = 10\ km.h^{-1}$$

$\Rightarrow$ vp = 20 km.h-1 $\mathbf{t = \frac{s}{v_p}}$ Po dosazení: $t = \frac{16}{20}h = \frac{4}{5}h = \frac{4}{5}60\ \text{min} = 48\ \text{min}$

Honza projede trať za 48 minut.

5. Auto ujelo vzdálenost 120 km. Kdyby zvýšilo svou průměrnou rychlost o 10 km.h^{-1}, byla by doba jeho jízdy o 24 minut kratší. Jak dlouho auto skutečně jelo?

Řešení:

Příklad má opět dvě fáze:

1) auto jede dráhu **s** průměrnou rychlostí **v** za čas **t** $\Rightarrow$ s , v , t $\Rightarrow s = vt$ *

2) auto jede dráhu **s** rychlostí (**v** + 10) km.h^{-1} za čas (t - $\frac{2}{5}$) h $\Rightarrow s = (v+10).(t-\frac{2}{5})$ **

Pro jednoduchý a přehlednější zápis je lepší **fv** neindexovat: 24 min = 24.$\frac{1}{60}h = \frac{2}{5}h$, dosadíme také číselný údaj pro dráhu s = 120km. Sestavíme dvě rovnice o dvou proměnných **v, t** : * 120 = v . t $\Rightarrow v = \frac{120}{t}$

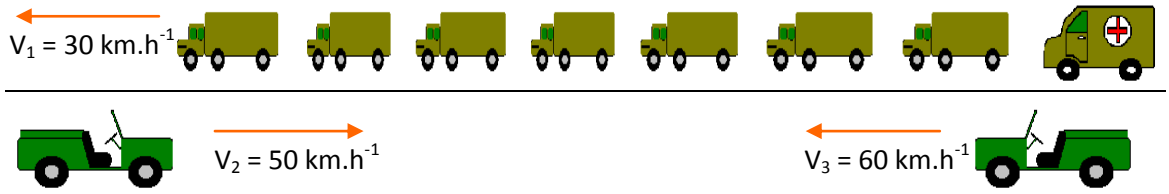
** 120 = (v + 10).(t - $\frac{2}{5}$)

Výraz pro v z * dosadíme do ** a dostaneme: $5t^2 - 2t - 24 = 0$. Řešením této jednoduché kvadratické rovnice jsou dvě hodnoty: $t_1 = \frac{12}{5}h = \frac{12}{5}60\,\text{min} = 144\,\text{min} = 2h24\,\text{min}$, t_2 = -2h

Je zřejmé, že vyhovuje jen první hodnota. Auto projelo trasu za 2 h 24 min.

6. Kolona vojenských vozidel má délku 2 km. Pohybuje se stálou rychlostí 30 km.h-1. Spojka projela vzdálenost od čela kolony k poslednímu vozidlu průměrnou rychlostí 50kmh^{-1}. Zpět jela rychlostí 60 km.h^{-1}. Jaký čas spojka potřebovala, jakou dráhu při tom urazila?

Řešení:



d = 2 km, v_1 = 30 km.h^{-1}, v_2 = 50 km.h^{-1}, v_3 = 60 km.h^{-1}

Cesta spojky proti směru jízdy kolony trvala: $t_1 = \frac{d}{v_1 + v_2}$

Cesta spojky ve směru jízdy kolony trvala: $t_2 = \frac{d}{v_3 - v_1}$

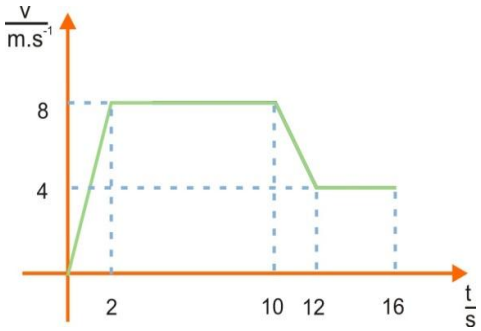
Celková doba jízdy spojky: t = $t_1 + t_2 \Rightarrow$ t = $d.\frac{v_2 + v_3}{(v_1 + v_2).(v_3 - v_1)}$

t = $2.\frac{50+60}{(30+50).(60-30)}h = 2.\frac{110}{80.30}h = \frac{11}{120}60\,\text{min} = \frac{11}{2}\text{min} = 5{,}5\,\text{min}$

Spojka urazila dráhu: $s = v_2t_1 + v_3t_2 \Rightarrow s = d.\frac{2v_2v_3 - v_1v_2 + v_1v_3}{(v_1 + v_2).(v_3 - v_1)} = 2.\frac{2.50.60 - 30.50 + 30.60}{(30+50).(60-30)}$ km =

= 5,25 km

7. Závislost rychlosti běžce na čase je popsána grafem v= f(t):

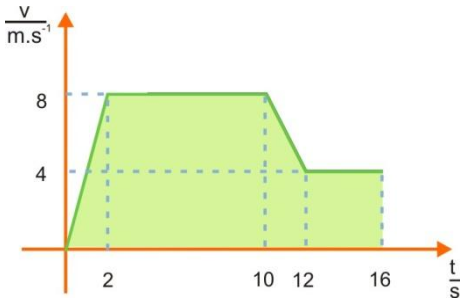


Určete: a) jakou dráhu uběhl za 16 s

b) průměrnou rychlost běžce na trase

Řešení :

Příklad bychom mohli řešit tak, že situaci rozdělíme na 4 fáze. V první fázi běží běžec se zrychlením 4 $m.s^{-2}$, v druhé fázi běží stálou rychlostí 8 $m.s^{-1}$, v třetí fázi zpomaluje se zrychlením 2$m.s^{-2}$ a ve čtvrté fázi běží opět stálou rychlostí 4 $m.s^{-1}$. Pomocí základních rovnic pro rovnoměrný a rovnoměrně zrychlený pohyb pak určit celkovou dráhu běžce.



Průměrná rychlost je pak dána jednoduchým vztahem: $v_p = \frac{s}{t}$

Mnohem rychlejší, přehlednější a hlavně lehčí je grafické řešení. Víme přece, že plocha pod grafem funkce v = f(t) má význam vykonané dráhy. Zaměříme se na výpočet obsahu této plochy, což bude pro každého jednoduché. ☺.

a) $s = (\frac{1}{2}2.8 + 8.8 + \frac{1}{2}2.4 + 4.4)\,m = 92\,m$

b) $v_p = \frac{s}{t} = \frac{92}{16}\,m.s^{-1} = \frac{23}{4}\,m.s^{-1} = \frac{23}{4}.\frac{\frac{1}{1000}}{\frac{1}{3600}}\frac{km}{h}$ = 20,7 km. h^{-1}

8. Dvě zastávky metra jsou od sebe vzdálené 1100 m. Souprava se první polovinu cesty rozjíždí s konstantním zrychlením +1,2 $m.s^{-2}$, ve druhé polovině trati brzdí se stejným zrychlením: a) jaký je celkový čas jízd mezi stanicemi, b) jaká je nejvyšší rychlost soupravy, c) jaká je průměrná rychlost souprav, d) výpočet ověřte pomocí grafu v=f(t) .

Řešení :

a) Celkový čas jízdy opět rozdělíme na dvě fáze:

1) pohyb zrychlený a = 1,2 $m.s^{-2}$, doba jízdy $\mathbf{t_1}$, konečná rychlost $\mathbf{v_1}$

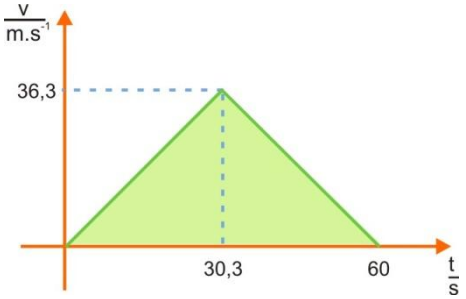
2) pohyb zpomalený a = - 1,2 $m.s^{-2}$, doba jízdy $\mathbf{t_2}$

t_1 : $\frac{s}{2} = \frac{1}{2}.a_1.t_1^2 \Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{s}{a_1}} = \sqrt{\frac{1100}{1,2}}\,s = 30,3\,s$

t_2 : je jasné, že bude platit $t_1 = t_2 \Rightarrow t = t_1 + t_2 \Rightarrow t = 60,6\,s$

b) $v_1 = a_1.t_1 = a_1.$

$\sqrt{\frac{s}{a_1}} = \sqrt{a_1 s} = \sqrt{1,2.1100}\ m.s^{-1} = 36,4\ m.s^{-1}$



Mohli bychom použít vypočítaný čas t_1, ale z fyzikálního hlediska by to nebylo správné.

c) $v_p = \frac{s}{t} = \frac{1100}{60,6}\ m.s^{-1} = 18,15\ m.s^{-1}$

d) z grafu $v_p = \frac{s}{t} = \frac{\frac{1}{2}.60,6.36,3}{60,6}\ m.s^{-1} = 18,15\ m.s^{-1}$

9. Strojvůdce rychlíku, který se pohyboval rychlostí $v_1 = 108 km h^{-1}$ uviděl ve vzdálenosti 180m před sebou nákladní vlak pohybující se stejným směrem rychlostí $v_2 = 32,4 km h^{-1}$. Začal brzdit se zrychlením $a = -1,2 ms^{-2}$. Zabránil srážce vlaků?

Řešení:

$s_0 = 180$ m, $v_1 = 108$ km.h^{-1} = 30 m.s^{-1}, $v_2 = 32,4$ km.h^{-1} = 9 m.s^{-1}, a = 1,2 m.s^{-1}

dráha rychlíku: $s_1 = v_1 .t - \frac{1}{2} a.t^2$

dráha nákladního vlaku: $s_2 = s_0 + v_2 .t$

pokud dojde ke srážce, musí pro dráhu platit, že $s_1 > s_2$; budeme počítat krajní možnost, že dráhy jsou stejné:

$s_1 = s_2 \Rightarrow v_1.t - \frac{1}{2} a.t^2 = s_0 + v_2.t \Rightarrow \frac{1}{2} a.t^2 + (v_2 - v_1).t + s_0 = 0$

pro přehlednější výpočet dosadíme číselné hodnoty fyzikálních veličin a řešíme kvadratickou rovnici:

$\frac{1}{2} 1,2 .t^2 + (9 - 30).t + 180 = 0 \Rightarrow 0,6.t^2 - 21.t + 180 = 0 \Rightarrow \underline{0,2.t^2 - 7.t + 60 = 0}$ $t_1 = 20s$, $t_2 = 15s$

Z výsledku je jasné, že rychlík narazí do nákladního vlaku za 15s.

Jaké budou asi následky srážky? Rychlík bude mít rychlost $v = v_0 - at \Rightarrow v = (30 - 1,2.15)$ m.s^{-1} = 12 m.s^{-1}. Nákladní vlak před ním ujíždí rychlostí 9 m.s^{-1}, takže v okamžiku srážky bude jejich „relativní" rychlost 3 m.s^{-1}. Pro lepší představu 10,8 km.h^{-1}. Tak snad vlak nevykolejí !?

10. Automobil se pohybuje po přímé vodorovné silnici rychlostí 90 km.h^{-1}. Řidič spatří na silnici překážku ve vzdálenosti 72 m a začne brzdit se záporným zrychlením -4 m.s^{-2}. Jakou rychlostí narazí na překážku, je-li jeho reakční doba 0,6 s? Jaké by muselo být záporné zrychlení, aby řidič zastavil těsně před překážkou?

Řešení:

$v_0 = 90\ km.h^{-1} = 90 \frac{1000\ m}{3600\ s} = 25\ m.s^{-1}$, s = 72 m, a = -4 m.s^{-2}, t_R = 0,6 s

Pro rovnoměrně zpomalený pohyb platí rovnice:

* $v = v_0 - at$

** $s = v_0.t_R + v_0.t - \frac{1}{2} a.t^2$

Z rovnice pro dráhu vyjádříme čas, ten dosadíme do rovnice pro rychlost. Jedná se o kvadratickou rovnici. Pro zajímavost si ji vyřešíme obecně, bez dosazení číselných údajů.

$$\frac{1}{2} a.t^2 - v_0.t + s - v_0.t_R = 0$$

$$D = v_0^2 - 4.\frac{1}{2}.a.(s - v_0.t_R) = v_0^2 - 2.a.s + 2.a.v_0.t_R$$

$t_{1,2} = \frac{v_0 \pm \sqrt{D}}{a}$, dosazením časů do * dostaneme:

$$v_1 = v_0 - \left(v_0 + \sqrt{v_0^2 - 2.a.s + 2.a.v_0.t_R}\right) \Rightarrow \mathbf{v_1 = \sqrt{v_0^2 - 2.a.s + 2.a.v_0.t_R}}$$

Po dosazení: $v = \sqrt{25^2 - 2.4.72 + 2.4.25.0,6}\ ms^{-1} = 13\ m.s^{-1}$

Auto narazí do překážky rychlostí 13 m.s^{-1}.

Aby $v = 0$ $\sqrt{v_0^2 - 2a.s + 2a.v_0.t_R} = 0$

$\Rightarrow v_0^2 - 2a.s + 2a.v_0.t_R = 0 \Rightarrow a(2.s - 2v_0.t_R) = v_0^2$

$\mathbf{a = \frac{v_0^2}{2.s - 2.v_0.t_R}}$ Po dosazení: $a = \frac{25^2}{2.72 - 2.25.0,6}\, m.s^{-2} = 5,48\, m.s^{-2}$

Aby řidič zastavil těsně před překážkou, musel by mít automobil zrychlení -5,48 m.s^{-2}.

11. **V** okamžiku, kdy se vlak začíná rozjíždět, stojí pozorovatel u začátku prvního vagónu. Ten kolem něho projede za čas t_1. Za jaký čas projede kolem něho n-tý vagón? Pohyb vlaku je rovnoměrně zrychlený, mezery mezi vagóny zanedbáváme, vagóny jsou stejně dlouhé. Řešte nejprve obecně, pak pro hodnoty t_1 = 4 s, n = 7.

Řešení:

Při rozjíždění projel 1. vagón za čas $t_1 \Rightarrow$ délka vagónu je $d = \frac{1}{2} a.t_1^2 \Rightarrow$ vlak se pohyboval se zrychlením a = $\frac{2.d}{t_1^2} \Rightarrow \frac{d}{a} = \frac{t_1^2}{2}$ *

Označím t_{n-1}…doba, za kterou projede kolem pozorovatele (n-1) vagónů

t_n …. doba, za kterou projede kolem pozorovatele n vagónů

(n-1).d = $\frac{1}{2} a.t_{n-1}^2 \Rightarrow t_{n-1} = \sqrt{\frac{2.(n-1).d}{a}} = \sqrt{\frac{2.(n-1).t_1^2}{2}} = t_1.\sqrt{n-1}$ (po dosazení *)

n.d = $\frac{1}{2} a.t_n^2 \Rightarrow t_n = \sqrt{\frac{2.n.d}{a}} = \sqrt{\frac{2.n.t_1^2}{2}} = t_1.\sqrt{n}$

doba, za kterou projede kolem pozorovatele n-tý vagón je rovna:

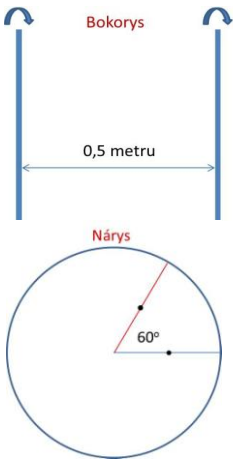
$\mathbf{t = t_n - t_{n-1} = t_1.(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})}$ Po dosazení: t = 4.($\sqrt{7} - \sqrt{6}$) s = 0,79 s

12. **D**va kartonové kotouče vzdálené od sebe 0,5 m se otáčejí uhlovou rychlostí 50 rad·s^{-1}. Střela letící rovnoběžně s osou otáčení prorazila oba kotouče tak, že oba průstřely spolu svírají úhel 60º. Jaká je rychlost střely? Kolikrát za sekundu se každý kotouč otočí?

Řešení:

ω = 50 rad.s^{-1}, s = 0,5 m, ϕ = 60°

Střela proletí mezi kotouči rychlostí v. Za tu dobu se druhý kotouč pootočí o úhel φ



$\Rightarrow \quad v = \frac{s}{t} \qquad \omega = \frac{\varphi}{t} \Rightarrow t = \frac{\varphi}{\omega}$

$\mathbf{v = \frac{s.\omega}{\varphi}}$ Po dosazení: $v = \frac{0,5.50}{\frac{\pi}{3}}\, m.s^{-1} = 23,9\, m.s^{-1}$

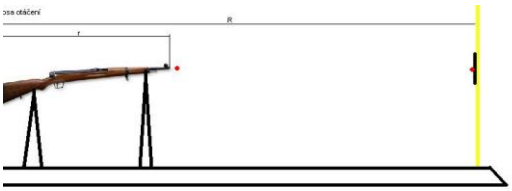
Mezi úhlovou rychlostí a frekvencí platí:

$\omega = 2.\pi.f \Rightarrow \mathbf{f = \frac{\omega}{2.\pi}}$ Po dosazení: $f = \frac{50}{2.3,14}\, Hz = 8\, Hz$

13. **N**a koníčkovém kolotoči je radiálně umístěna vzduchovka s ústím ve vzdálenosti r_s = 1 m od osy otáčení. Puška je namířena na střed terče upevněného na obvodu kolotoče o poloměru R_K = 5 m. Kolotoč se otočí kolem své osy se za 8 s. Rychlost střely vystřelené z pušky je 150 m.s^{-1}. Terč má poloměr 20 cm. Zasáhne střela cíl, případně v jaké hodnotě (hodnoty jsou 10-1 po 2 cm).

Řešení:

r_S = 1 m, R_K = 5 m, v_S = 150 m.s^{-1}, T_K = 8 s

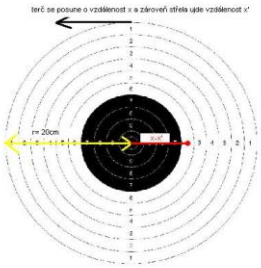


Střela doletí na okraj kolotoče za čas t: $t = \frac{R_K - r_s}{v}$

Za čas t se terč posune na okraji kolotoče o vzdálenost x:

x = v.t = ω .R_K.t =

$$\frac{2\pi}{T_K}.R_K.\frac{R_K - r_s}{v} = \frac{2\pi}{8}.5.\frac{5-1}{150}\,m = 10{,}5.10^{-2}\,m = 10{,}5\,cm$$



Za čas t urazí a vychýlí se střela na okraji kolotoče o vzdálenost x':

$$x' = \omega.R_K.t = \frac{2\pi}{T_K}.r_s.\frac{R_K - r_s}{T_K} =$$

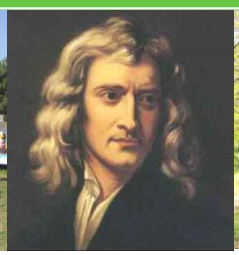
$$\frac{2.3{,}14}{8}.1.\frac{5-1}{150}\,m = 2{,}1.10^{-2}\,m = 2{,}1\,cm$$

Střela tedy zasáhne terč ve vzdálenosti x-x' od středu terče:

x– x´= 10,5 – 2,1 = 8,4 cm

Střela tedy zasáhne terč v hodnotě 6.

Dynamika



1. Vlak o hmotnosti 4.10^6 kg pohybující se rychlostí 36 km.h^{-1} začal brzdit silou 2.10^5 N. Jakou vzdálenost urazí za 1 minutu od začátku brzdění? Za jakou dobu se vlak zastaví a jakou dráhu při tom urazí?

Řešení:

m = 4.10^6 kg, v_o = 36 km.h^{-1} = 10 m.s^{-1}, F = 2.10^5 N, t = 1 min = 60 s

Vlak brzdí konstantní silou, vykonává tedy rovnoměrně zpomalený pohyb. Pro jeho dráhu platí:

$s = v_o t - \frac{1}{2}at^2$ z 2NPZ platí: $a = \frac{F}{m}$ * $\Rightarrow$ po dosazení tohoto vztahu dostáváme:

$$s = v_o t - \frac{1}{2}\frac{F}{m}t^2 \Rightarrow s = (10.60 - \frac{1}{2}\frac{2.10^5}{4.10^6}60^2)\ m = 510\ m$$

$$t_z = \frac{v_o}{a} = \frac{v_o}{\frac{F}{m}} = \frac{m.v_0}{F} \Rightarrow t_Z = \frac{4.10^6.10}{2.10^5}\ s = 200\ s = 3\ \text{min}\ 20\ s$$

Pro rychlost vlaku platí rovnice: $v = v_0 - a.t$; jestliže vlak zastaví, je v = 0 m.s^{-1}. Pro čas, potřebný k zastavení vlaku platí:

tz = $\frac{v_0}{a} = \frac{v_0}{\frac{F}{m}} = \frac{m.v_0}{F}$ Po dosazení: $t_Z = \frac{4.10^6.10}{2.10^5}s = 200s = 3\ \text{min}\ 20\ s$

Za tuto dobu vlak urazí brzdnou dráhu:

$$s_z = v_o t - \frac{1}{2}at^2 = v_0\frac{v_0}{a} - \frac{1}{2}a\frac{v_0^2}{a^2} = \frac{v_0^2}{a} - \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{a} = \frac{v_0^2}{2a} \Rightarrow s_z = \frac{v_0^2}{2.\frac{F}{m}} = \frac{v_0^2.m}{2.F}$$

Po dosazení: $s_z = \frac{4.10^6.10^2}{2.2.10^5}m = 1000\ m = 1\ km$

2. Automobil s hmotností 2000kg jede rovnoměrným pohybem do kopce s 4% stoupáním. Určete tažnou sílu motoru. F = 0,04.

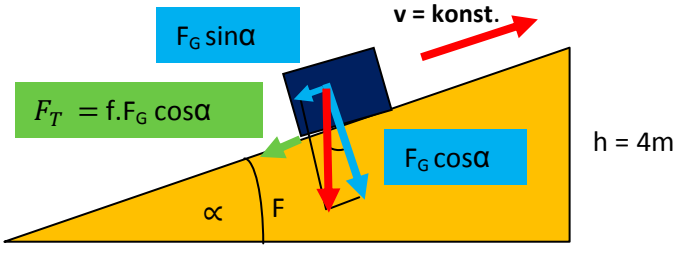
Řešení:

m = 2000 kg, f = 0,04, tgα = 0,04 ⟹ α = 2°17´

Dynamickou charakteristikou rovnoměrného pohybu je, Že výslednice všech sil působících na těleso je nulová.

⟹ Pro tažnou sílu F motorů musí platit:

F = m.g.(sinα + f.cosα)



Po dosazení: F = 2000 . 9,8 . (sin 2°17´+ 0,04.cos 2°17´) N = 1564 N

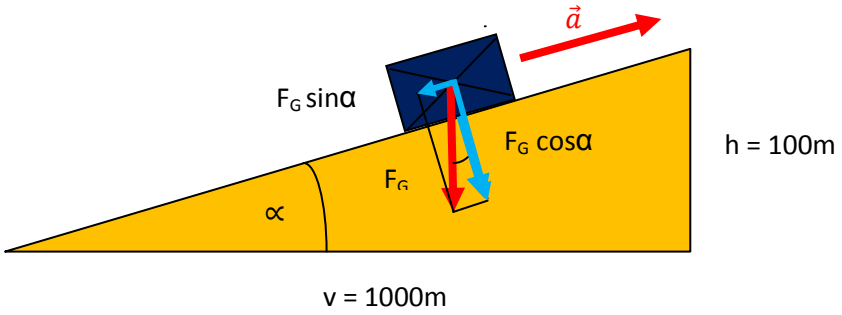
3. S jakým stálým zrychlením se bude rozjíždět autobus o celkové hmotnosti 60 t do svahu se stoupáním 10%, jestliže se po vodorovné silnici rozjíždí stejnou tahovou silou se zrychlením 1,6 $m.s^{-2}$?

Řešení:

m = 60 t, a = 1,6 $m.s^{-2}$

10% stoupání znamená, že na 1000 m ve vodorovném směru je převýšení 100 m, jedná se tedy o nakloněnou rovinu s úhlem, pro který platí:

$$tg\alpha = \frac{100}{1000} \Rightarrow \alpha = 5^0 43'$$



Po vodorovné silnici platí pro tahovou sílu podle 2NPZ: $F_V = m.a_V$

Při jízdě do svahu působí proti pohybu složka tíhové síly, která je rovnoběžná s nakloněnou rovinou o velikosti $F_G.\sin\alpha$.

Výsledná síla, která způsobuje pohyb autobusu po nakloněné rovině se zrychlením $\vec{a}$:

$F = F_V - F_G.\sin\alpha$

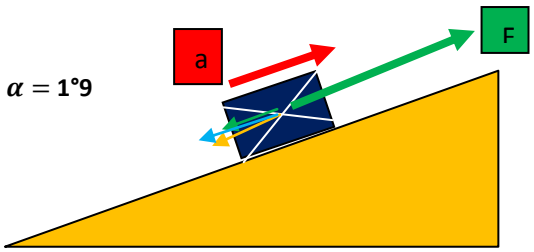
Podle 2NPZ: $m.a_s = m.a_v - F_G.sin \propto \Rightarrow a_s = \frac{m.a_v - F_G.sin\propto}{m} \Rightarrow \boldsymbol{a_s = a_v - g.sin \propto}$

Po dosazení: $a_s = (1,6 - 9,8.\sin 5^o 43') \; m.s^{-2} = 0,62 \; m.s^{-2}$

4. Automobil s hmotností 500 kg se rozjíždí do kopce s 2% stoupáním a konstantním zrychlením 2 $m.s^{-2}$. Určete tažnou sílu motoru(f= 0,02).

Řešení:

m = 500 kg, f = 0,02, a = 2 $m.s^{-2}$, tgα = 0,02 $\Rightarrow$ $\alpha = 1°9$



$F_{G1} = F_G.\sin\alpha$

$F_T = f.F_G.\cos\alpha$

$F_s = m.a$

Těleso se pohybuje po nakloněné rovině se zrychlením směrem nahoru $\Rightarrow$ proti pohybu působí:

- pohybová složka tíhové síly $F_{G1} = F_G.\sin\alpha$
- třecí síla $F_T = f.F_G.\cos\alpha$
- setrvačná síla $F_S = m.a$

$\Rightarrow$ tažná síla motoru musí být rovna součtu těchto sil $\Rightarrow$ **F = m.(g.sinα + g.f.cosα + a)**

Po dosazení: F = 500.(9,8.sin1°9´+ 0,02.9,8.cos1°9´+ 2) N= 1200 N

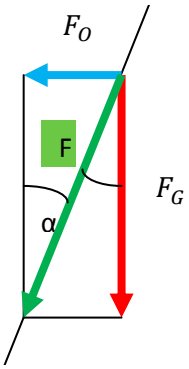
5. Rychlobruslař dosahuje při jízdě rychlosti 12 $m.s^{-1}$. V zatáčce se může ze svislého směru vyklonit o 30°až 40°, aby byla jeho jízda dostatečně bezpečná. Jaký musí být poloměr zatáčky na rychlobruslařské dráze?

Řešení:

v = 12 ms^{-1}, α = 30° – 40°

Příklad vysvětlíme z hlediska pozorovatele v NIVS – spojené s rychlobruslařem. Na rychlobruslaře působí tíhová síla a odstředivá síla. Výslednice těchto sil musí ležet v podélné ose rychlobruslaře.

$F_G = m.g$, $F_O = m.\frac{v^2}{r}$ z obrázku vidím: $tg\alpha = \frac{F_0}{F_G} = \frac{m.\frac{v^2}{r}}{m.g} = \frac{v^2}{r.g} \Rightarrow \boldsymbol{r = \frac{v^2}{tg\alpha \, .g}}$



Po dosazení: $r_1 = \frac{12^2}{\mathrm{tg}30^0 .9{,}8} = 25{,}5$ m $\qquad r_2 = \frac{12^2}{\mathrm{tg}40^0 .9{,}8} = 17{,}5$ m

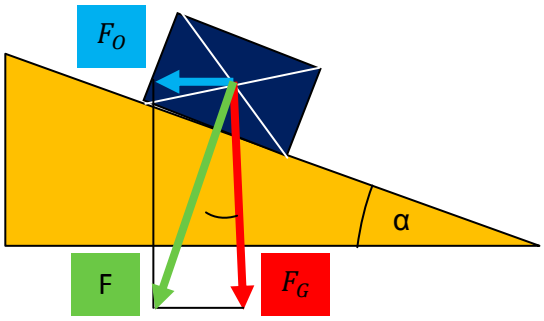
Z výsledku je jasné, že bezpečnější je jízda po vnější dráze.

6. Zatáčky silnic i železničního svršku jsou klopené. Jakou maximální rychlostí může vjet bezpečně i v zimě auto do zatáčky o poloměru 50 m, jejíž úhel klopení je 15°?

Řešení:

r = 50 m, α = 15°

Příklad vysvětlíme z hlediska pozorovatele v NIVS – spojené s autem. Na auto působí tíhová síla a odstředivá síla. Výslednice těchto sil musí být kolmá k povrchu vozovky, aby auto dobře „sedělo“.



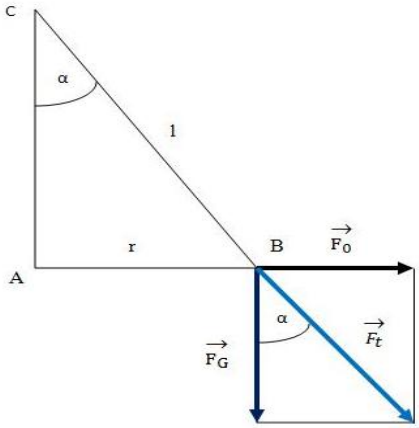
Z obrázku vidíme, že opět platí: : $\mathrm{tg}\alpha = \frac{F_0}{F_G} = \frac{\mathrm{m}.\frac{v^2}{r}}{\mathrm{m.g}} = \frac{v^2}{r.g} \Rightarrow \mathbf{v} = \sqrt{\mathbf{r.g.tg}\alpha}$

Po dosazení: $v = \sqrt{50.9{,}8.tg15°}$ m.s^{-1} = 11,5 m.s^{-1}

7. Těleso o hmotnosti 6,3 kg, které je zavěšeno na niti délky 1 m, vykonává kruhový pohyb v horizontální rovině. Určete tah niti a úhel, který svírá nit s vertikální přímkou, jestliže pohyb bodu po kružnici je popsán rovnicí s = 3,134 · t. (g = 9,8 m.s^{-2}).

Řešení:

l = 1 m, m = 6,3 kg, v = 3,134 m.s^{-1}, α = ?, F = ?



Příklad můžeme řešit z hlediska pozorovatele v neinerciální vztažné soustavě.

Na těleso působí tíhová síla a odstředivá síla. Výslednice těchto sil musí mít směr shodný se směrem napnuté nitě. Podle obrázku platí vektorová rovnice:

$\vec{F_t} = \vec{F_o} + \vec{F_G}$

Pro velikost tíhové síly, působící na těleso platí: $F_G = m.g$

Pro velikost odstředivé síly, působící na těleso platí: $Fo = m.\frac{v^2}{r}$

Kde r je poloměr kružnicové trajektorie pohybu tělesa v horizontální rovině.

Z obrázku vidím, že platí: $r = l.\sin\propto$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{F_o}{F_G} = \frac{m\frac{v^2}{r}}{mg} = \frac{v^2}{rg} \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{v^2}{lg\sin\propto}$$

Z této goniometrické rovnice určíme úhel α:

$$\frac{\sin^2\propto}{\cos\propto} = \frac{v^2}{lg} \quad \Longrightarrow \quad \frac{1-\cos^2\propto}{\cos\propto} = \frac{v^2}{lg} \quad \Longrightarrow \quad \underline{lg - lg\cos^2\propto = v^2\cos\propto}$$

Zavedeme substituci S: $a = \cos\propto$

$$lga^2 + v^2a - lg = 0 \qquad \sqrt{D} = \sqrt{v^4 + 4l^2g^2} \qquad \sqrt{D} = 22{,}28$$

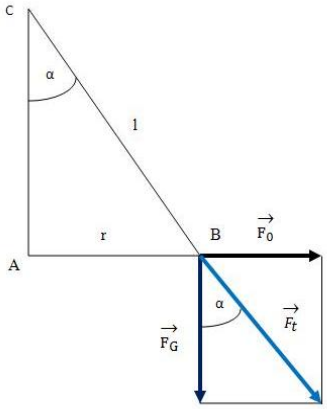
$$a_{1,2} = \frac{-v^2 \mp \sqrt{v^4+4l^2g^2}}{2lg} \quad \Longrightarrow \quad a_{1,2} = \frac{-3{,}134^2 \mp \sqrt{3{,}134^4+41^29{,}8^2}}{2.1.9{,}8}$$

$a_1 = \cos\propto = -1{,}605 \quad \Longrightarrow \quad \propto \in \emptyset$

$a_2 = \cos\propto = 0{,}623 \quad \Longrightarrow \quad \propto = 51°21'$

Pro výpočet tahu na nit, to je síly F platí: $F = \frac{F_G}{\cos\propto}$ Po dosazení: $F = \frac{63}{0{,}623}N = 100\ N$

8. Těleso o hmotnosti *m = 1 kg* (uvažujte ho jako hmotný bod) je zavěšené na niti délky l = 30cm, jejíž druhý konec je upevněný (viz obrázek). Hmotný bod se pohybuje tak, že konstantní rychlostí ***v*** opisuje kružnici ve vodorovné rovině, při čemž nit svírá se svislým směrem úhel α = 60º. Najděte hodnotu rychlosti *v*, periodu obíhání hmotného bodu po uvedené kružnici a sílu, která při tomto pohybu napíná nit!



Řešení:

Příklad řešíme opět z hlediska pozorovatele v neinerciální vztažné soustavě; vztahy, které používáme, jsou stejné jako v předcházejícím příkladu :

$$\vec{F_t} = \vec{F_0} + \vec{F_G} \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{tg}\propto = \frac{F_0}{F_G}\ ;\ F_0 = m\frac{v^2}{r}\ , F_G = mg$$

$$\Longrightarrow \operatorname{tg}\propto = \frac{m\frac{v^2}{r}}{F_G}\ ; \text{protože } r = l\sin\propto\ , \text{z } \Delta ABC \ \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow v = \sqrt{\frac{F_G.l.\sin\propto.\operatorname{tg}\propto}{m}} = \sqrt{F_G.l.\operatorname{tg}\propto.\sin\propto} = \sqrt{9{,}8.0{,}3.\operatorname{tg}60^\circ.\sin 60^\circ}$$

$= 2{,}1\ m.s^{-1}$

Perioda: $T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi.l.\sin\alpha}{\sqrt{g.l.\sin\alpha.\operatorname{tg}\alpha}} = 2\pi\sqrt{\frac{l^2.\sin^2\propto}{g.l.\sin\propto\frac{\sin\propto}{\cos\propto}}} = 2\pi\sqrt{\frac{l.\cos\propto}{g}} \ \Longrightarrow$

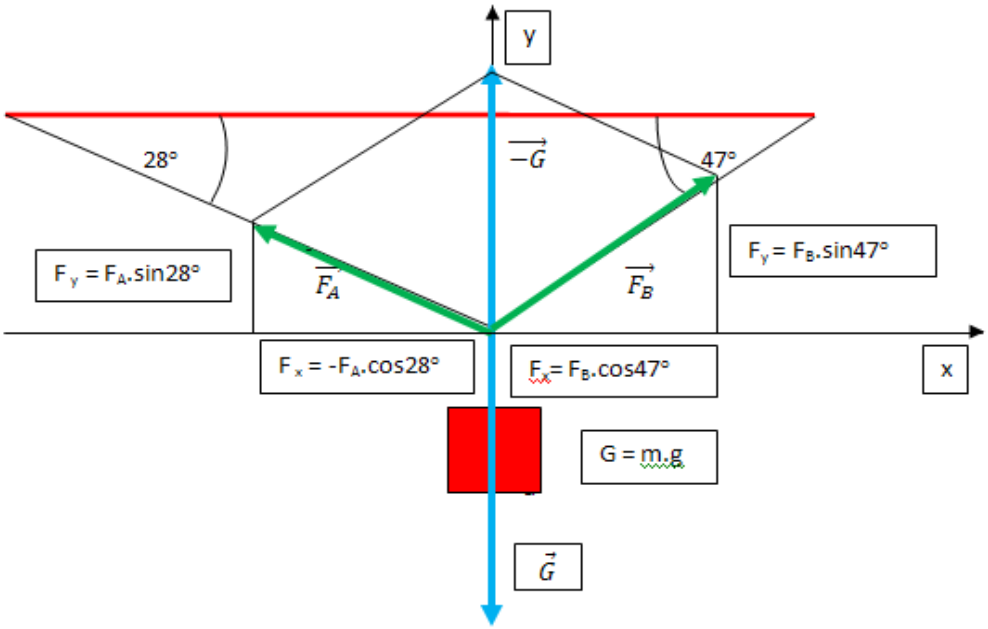
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{0{,}3.\cos 60^\circ}{9{,}8}}s = 0{,}78\ s$$

A pro sílu, která napíná nit na obrázku, platí:

$$\cos\propto = \frac{F_G}{F_T} \Longrightarrow F_T = \frac{F_G}{\cos\alpha} = \frac{m.g}{\cos\propto} \quad \text{Po dosazení: } F_T = \frac{1.9{,}8}{\cos 60^\circ}N = 19{,}6\ N$$

Hmotný bod obíhá kružnici rychlostí 2,1 $m.s^{-1}$ s periodou 0,78 s. Nit je napínána silou o velikosti 19,6 N.

9. Obrázek znázorňuje kostku o hmotnosti 15 kg, která je zavěšená na třech vláknech. Určete, jakými silami jsou vlákna napínána.



Řešení:

1. způsob: **Síly můžeme rozložit na jednotlivé složky do os KSS**

Soustava je v rovnováze, jestliže platí vektorová rovnice: $\vec{G} = \vec{F_A} + \vec{F_B}$

Tato rovnice je ekvivalentní dvěma rovnicím skalárním:

Pro složky vektorů ve směru osy x platí: $G = F_A.\sin28^\circ + F_B.\sin47^\circ$ *

Pro složky vektorů ve směru osy y platí: $0 = -F_A.\cos28^\circ + F_B.\cos47^\circ$ **

Jedná se o soustavu dvou rovnic s proměnnými F_A , F_B

Z ** vyjádříme $F_A = F_B.\frac{\cos47^\circ}{\cos28^\circ}$ dosadíme do * $G = F_B.tg28^\circ\cos47^\circ + F_B.\sin47^\circ \Rightarrow F_B = \frac{m.g}{tg28^\circ\cos47^\circ+\sin47^\circ}$

Po dosazení číselných hodnot: $F_B = \frac{15.9{,}8}{tg28^\circ\cos47^\circ+\sin47^\circ}\ N = 134{,}4\ N$

$F_A = F_A = 134{,}4\ .\frac{\sin47^\circ}{\sin28^\circ}\ N = 103{,}8\ N$

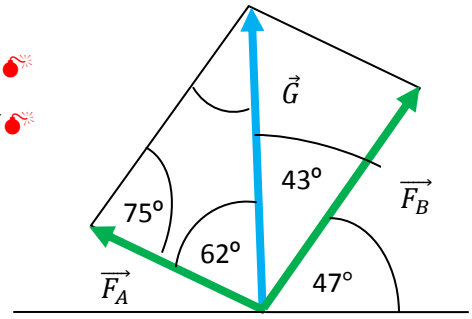
G = 15.9,8 N = 147 N

2. způsob: **Řešení pomocí Sinové nebo Kosinové věty z vektorového rovnoběžníku sil.**

Z obrázku lehce určíme velikost úhlů mezi silami. Pomocí Sinové věty pak určíme:

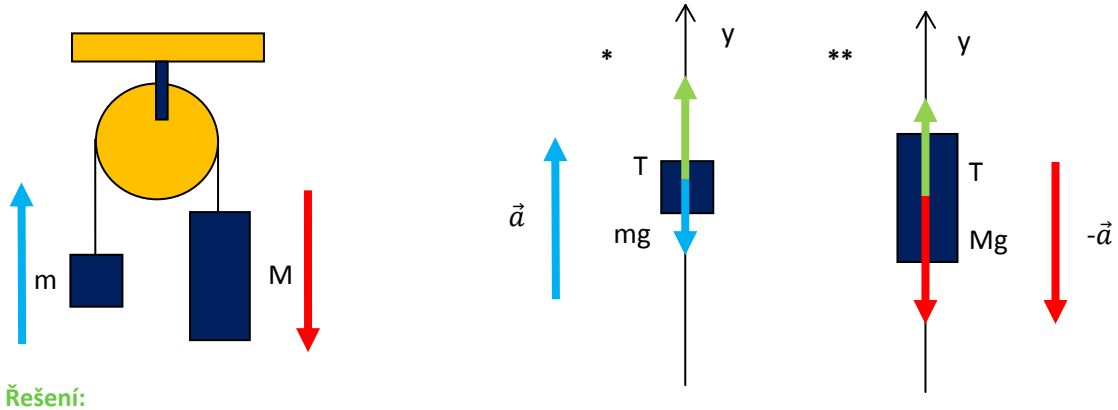
$F_A = G.\frac{\sin43^\circ}{\sin75^\circ} = 147.\frac{\sin43^\circ}{\sin75^\circ} = 103{,}8\ N$

$F_B = G.\frac{\sin62^\circ}{\sin75^\circ} = 147.\frac{\sin62^\circ}{\sin75^\circ} = 134{,}4\ N$



10. Dvě kostky visí na kladce, která se otáčí bez tření (tzv. Atwoodův padostroj). Menší kostka má hmotnost 1,3 kg, větší 2,8 kg. Vypočtěte velikost sil napínajících vlákno a velikost zrychlení kostek.

Vektorový diagram pro daná tělesa:



Řešení:

Podle vektorového diagramu napíšeme skalární rovnice pro obě kostky:

* m.a = T – m.g , ** –M.a = T – M.g $\Longrightarrow$ m.a + M.a = g.(M - m) $\Longrightarrow$ a = $\frac{M-m}{M+m}$.g

po dosazení: a = $\frac{2{,}8-1{,}3}{2{,}8+1{,}3}.\,9{,}8\ m.s^{-2} = 3{,}6\ m.s^{-2}$

Z * vyjádříme velikost tahové síly: T = m.(a+g) = m.($\frac{M-m}{M+m}$g + g) = m.g.($\frac{M-m}{M+m}+\ 1$)

$$T\ = m.g.\frac{M-m+M+m}{M+m} = g.\frac{2.M.m}{M+m}$$

Po dosazení: $T = 9{,}8.\frac{2.2{,}8.1{,}3}{2{,}8+1{,}3}\ N = 17\ N$

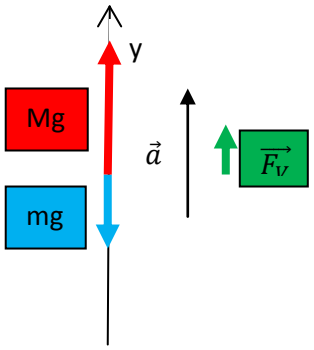
Zjednodušené řešení: získáme napřímením osy y jdoucí celou soustavou

F_V = (M.g – m.g) = (M+m).a, kde a = $\frac{M-m}{M+m}.\,g$

Pro výpočet tahové síly použijeme 2NPZ pro jednu z kostek z prvního řešení (užijeme * nebo **).

Vidíme, že nejlepší je kombinace obou řešení! ☺

Pro mnohé je přirozenější situaci otočit o 180°. Vyjde úplně stejný výsledek. Zde je u řešení respektován směr osy y a ten je nahoru.



11. Kostka o hmotnosti 3,3 kg se pohybuje bez tření po vodorovné podložce. Nehmotným vláknem je přes kladku spojena ke kostce o hmotnosti 2,1 kg. Zavěšená kostka klesá a klouzající kostka se pohybuje spolu s ní. Určete zrychlení obou kostek a sílu napínající vlákno.

Řešení:

M = 3,3 kg, m = 2,1 kg, T = ?

Budeme postupovat stejně jako v předcházejícím příkladě.

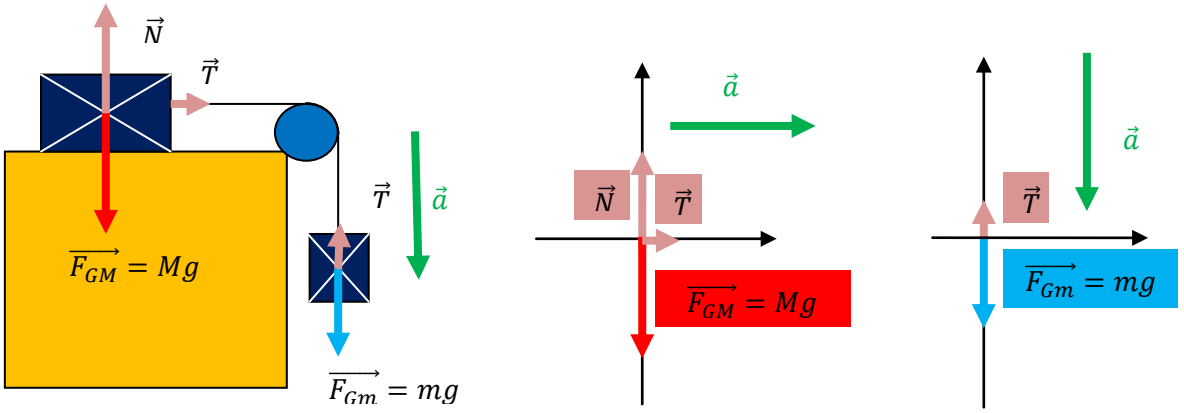
Vektorovou rovnici $\Sigma\,\vec{F} = m.\vec{a}$ rozepíšeme do složek:

Ve směru osy x: * T = M.a

Ve směru osy y: ** m.g – T = m.a $\Longrightarrow$ sečtením rovnic dostáváme m.g = (M+m).a

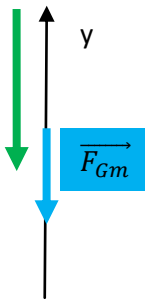
$\Longrightarrow$ a = $\frac{m}{M+m}.\,g;$ po dosazení a = $\frac{2{,}1}{3{,}3+2{,}1}.\,9{,}8\ m.s^{-2}$= 3,8 m.s^{-2}

Silové diagramy:



Vidíme, že síly $\overrightarrow{F_G}$ a $\vec{N}$ se vůbec neprojevily. To proto, že jsou kolmé k ose x.
Dosazením **a** do * získáme velikost tahové síly T:

T = M.a =M $\frac{m}{M+m}.g$; po dosazení T = 3,3. $\frac{2,1}{3,3+2,1}.9,8\ N = 13\ N$



Zjednodušené řešení: získám napřímením osy y. Kostky budeme považovat za 2 součásti jednoho složeného tělesa o hmotnosti (M+m), $\vec{T}$ je vnitřní síla složeného tělesa
$\Longrightarrow$ nevstupuje do 2NPZ, výslednou silou je pouze síla $\overrightarrow{F_{Gm}}$, takže platí:

m.g = (M + m).a $\Longrightarrow$ **a =** $\frac{m}{M+m}.g$ *Po dosazení*: $a = \frac{2,1}{3,3+2,1}.9,8\ m.s^{-2} = 3,8\ m.s^{-2}$

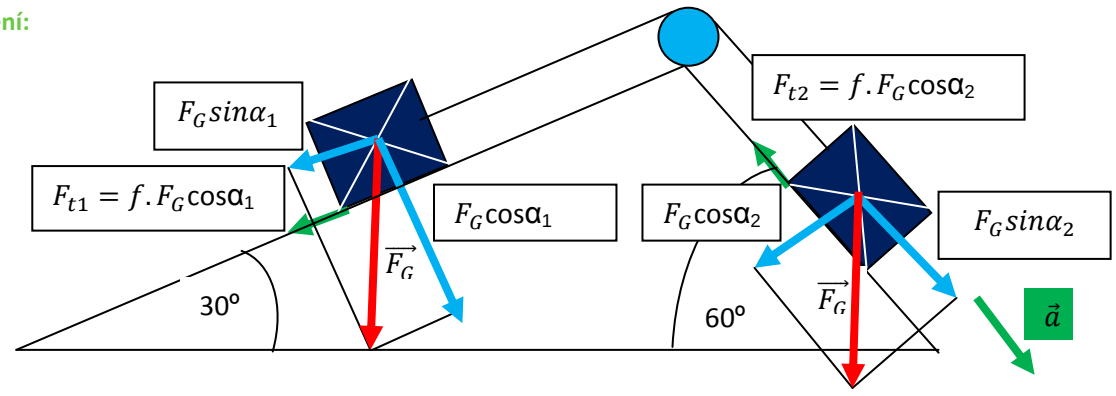
hodnotu **a** dosadíme do *: **T = M.** $\frac{m}{M+m}.g$

Po dosazení: $T = 3,3.\frac{2,1}{3,3+2,1}.9,8\ N = 13\ N$

..

12. Dvě kostky se stejnou hmotností jsou spojeny nití a položeny na dvě šikmé roviny podle obrázku. Nit je vedena přes kladku, kde prokluzuje bez tření. Součinitel smykového tření na obou nakloněných rovinách je stejný a má hodnotu f = 0,1. Určete zrychlení soustavy.

Řešení:



Z obrázku by se zdálo, že soustava se bude posouvat vpravo; ve směru větší síly. Ale pozor, máme počítat se třením! Naši hypotézu raději podpoříme výpočtem.
Mělo by platit: $F_G sin\alpha_2 - f.F_G cos\alpha_2 > F_G sin\alpha_1 + f.F_G cos\alpha_1$;
vzhledem k tomu, že obě kostky mají stejnou hmotnost, můžeme rovnici krátit silou F_G:

$\Longrightarrow$ $sin\alpha_2 - f.cos\alpha_2 > sin\alpha_1 + f.cos\alpha_1$

f.($cos\alpha_1 + cos\alpha_2$) < $sin\alpha_2 - sin\alpha_1$ $\Longrightarrow$ f < $\frac{sin\alpha_2 - sin\alpha_1}{cos\alpha_1 + cos\alpha_2}$; po dosazení : 0,1 < $\frac{sin60^0 - sin30^0}{cos30^0 + cos60^0}$;

0,1 < 0,268 ⟹ soustava se opravdu pohybuje doprava ⟹ můžeme zapsat pohybovou rovnici:

$$F_G sin\alpha_2 - f.F_G \cos\alpha_2 - F_G sin\alpha_1 - f.F_G \cos\alpha_1 = (m+m).a \implies$$

$$a = \frac{g}{2}.(\sin\alpha_2 - f.\cos\alpha_2 - \sin\alpha_1 - f.\cos\alpha_1)$$

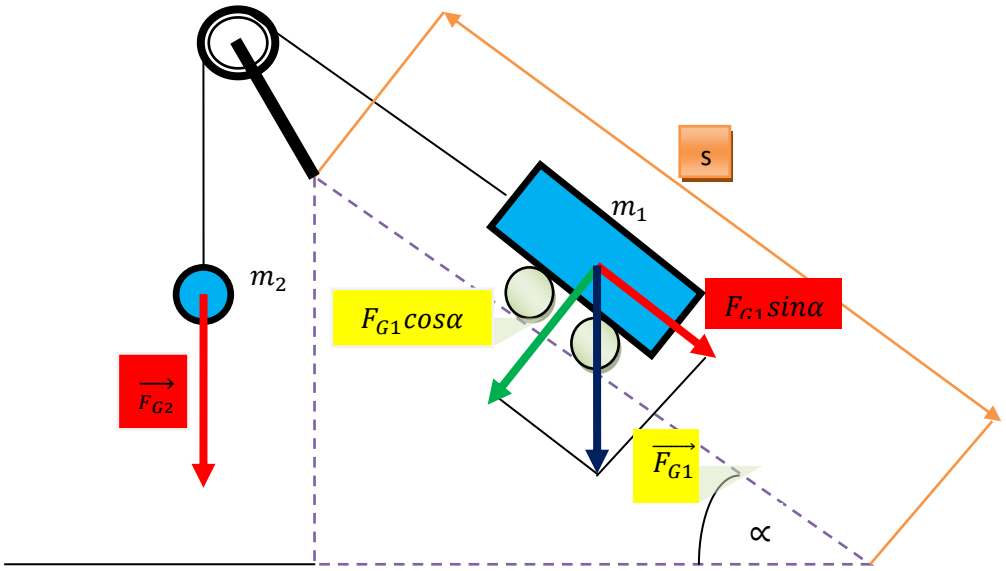
Po dosazení: $a = \frac{9,8}{2}.(sin60° - 0,1.cos60° - sin30° - 0,1.cos30°)\ m.s^{-2} = 1,15\ m.s^{-2}$

Při řešení příkladu jsme použili opět napřímení osy x, která má nyní směr nakloněné roviny.

13. Za jaký čas přejede vozík o hmotnosti $m_1 = 2$ kg, délku nakloněné roviny s = 2 m s úhlem sklonu $\propto = 35°$, je-li spojený přes kladku se závažím o hmotnosti $m_2 = 4$ kg ? Momenty setrvačnosti kol zanedbejte!

Řešení:

m_1 = 2 kg, m_2 = 4 kg, s = 2 m, α = 35°



V tomto příkladě nemusíme uvažovat tření. Ale musíme také rozhodnout, kam pojede vozík. Jestli nahoru, nebo dolů po nakloněné rovině. To zjistíme porovnáním sil F_{G2} a $F_{G1}.sin \propto$:

$F_{G2} = m_2 g = 4.9,8N = 39,2$ N

$F_{G1}.sin\propto = 2.9,8.sin35°N = 11,2$ N

Vozík tedy pojede po nakloněné rovině nahoru.

Na vozík působí stálá konstantní síla, pohybuje se tedy rovnoměrně zrychleným pohybem a pro dráhu vozíku platí: $s = \frac{1}{2}.a.t^2 \implies t = \sqrt{\frac{2.s}{a}}$. Zrchlení získáme řešením pohybové rovnice:

Výsledná síla ve směru pohybu má hodnotu: $F = F_{G2} - F_{G1}.\sin \propto$

$\implies$ Podle 2NPZ platí: $(m_1 + m_2).a = m_2.g - m_1.g.\sin \propto \implies a = \frac{m_2.g - m_1.g.\sin\propto}{(m_1+m_2)} \implies t = \sqrt{\frac{2s.(m_1+m_2)}{m_2.g - m_1.g.\sin\propto}}$

Po dosazení: $t = \sqrt{\frac{2.2.(2+4)}{4.9,8 - 2.9,8.sin35^o}}$ s = 0,92 s

14. Na podlaze nákladního auta, pobitého plechem, leží podélně dřevěná bedna se zbožím dlouhá **l** m a široká 1,6 m. Těžiště nákladu leží ve výšce 60cm nad středem podstavy. Součinitel smykového tření mezi bednou a podlahou f = 0,15.

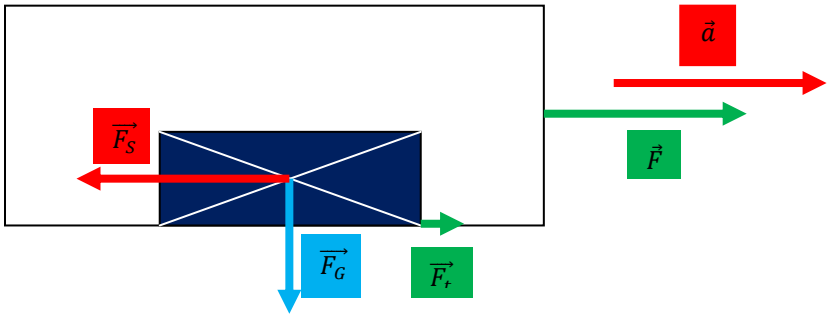
a) Auto dosáhne za 30 s rychlosti $v_1 = 60$ km.h^{-1}. Posune se bedna při rozjíždění?

b) V jaké nejmenší vzdálenosti od železničního přejezdu musí auto jedoucí touto rychlostí brzdit, aby přejíždělo koleje rychlostí 30 km.h^{-1}a nemá-li se bedna posunout?

c) Může auto projíždět zatáčku o poloměru 100 m rychlostí v_1 bez nebezpečí, že by se bedna převrátila?

Řešení:

b = 1,6 m, h = 0,6 m, t_1 = 30 s, v_1 = 60 km.h^{-1} = 16,7 m.s^{-1},v_2 = 30 km.h^{-1}= 8,3 m.s^{-1}, f = 0,15, r = 100 m



a) Uvedený děj vysvětlíme z hlediska pozorovatele v neinerciální vztažné soustavě (např. z hlediska řidiče auta). Na bednu bude působit setrvačná síla, která by mohla způsobit její pohyb směrem dozadu auta. Pokud bude mít třecí síla větší velikost, bedna zůstane na místě.

$\vec{F_S}$ …setrvačná síla; má stejnou velikost jako síla F = m.a, která způsobila zrychlený pohyb, ale opačný směr

F_S = m.a

$\vec{F_G}$…tíhová síla působící na bednu; F_G = m.g F_t…třecí síla o velikosti F_t = f.m.g

Bedna se neposune, bude-li platit: $F_t \geq F_s \implies f.m.g \geq m.\frac{v_1}{t_1} \implies v_1 \leq f.g.t_1$

po dosazení: $16,7 \leq 0,15.9,8.30 \implies 16,7 < 44,1 \implies$ bedna se neposune

b) Jedná se o podobný případ; opět musí být splněna podmínka $F_t \geq F_s$, síly F, F_s a F_t nyní mají opačný směr než na obrázku. Jak víme, bedna by se posouvala dopředu!

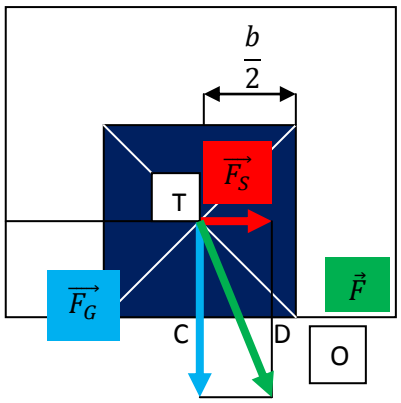
$f.m.g \geq m.a \implies$ * $f.g \geq a$ pro pohyb rovnoměrně zpožděný platí rovnice:

$v_2 = v_1 - a.t \implies t = \frac{v_1 - v_2}{a}$ $s = v_1.t - \frac{1}{2}a.t^2 = v_1.\frac{v_1 - v_2}{a} - \frac{1}{2}.a.(\frac{v_1 - v_2}{a})^2 = \frac{{v_1}^2 - {v_2}^2}{2.a} \implies a = \frac{{v_1}^2 - {v_2}^2}{2.s}$

dosadíme do * $\mathbf{s \geq \frac{{v_1}^2 - {v_2}^2}{2.f.g}}$ Po dosazení: $s \geq \frac{16,7^2 - 8,3^2}{2.0,15.9,8}\ m \implies s \geq 71,4$ m

c) Pro vysvětlení se podíváme na bednu do auta zezadu. Na bednu bude působit tíhová síla bedny a odstředivá síla. Aby se bedna nepřeklopila, musí výslednice těchto sil protínat podstavu bedny (tehdy je bedna stabilní);

z obrázku vidím, že: * $AB \leq \frac{b}{2}$



Pro velikost sil platí: $F_S = m.\frac{{v_1}^2}{r}$ a $F_G = m.g$

Z podobnosti vzniklých trojúhelníků platí:

$\frac{AB}{CD} = \frac{h}{TC} \implies \frac{AB}{F_S} = \frac{h.}{F_G} = \frac{h.{v_1}^2}{rg}$ dosazením * získáme:

$\frac{b}{2.m.\frac{v^2}{r}} = \frac{h}{m.g} \implies \mathbf{v_1 \leq \sqrt{\frac{b.r.g}{2.h}}}$

Po dosazení: $16,7 \leq \sqrt{\frac{1,6.100.9,8}{2.0,6}}$; $16,7 \leq 36,1$

$\implies$ bedna se nepřeklopí.

Tato část příkladu jde řešit i **užitím momentové věty**. Aby se bedna nepřeklopila, musí být moment tíhové síly větší nebo roven momentu odstředivé síly. Osa otáčení je v bodě O.

$F_G.\frac{b}{2} \geq F_S.h \implies m.g.\frac{b}{2} \geq m.\frac{{v_1}^2}{r}.h \implies \mathbf{v_1 \leq \sqrt{\frac{b.r.g}{2.h}}}$

Mechanická práce a energie

1. Osobní automobil o hmotnosti 1400 kg se pohybuje stálou rychlostí 54 km.h^{-1}. Po vjezdu na dálnici se účinkem tahové síly motoru jeho rychlost během 30 sekund zvětšila na dvojnásobek. a) Jak velká musí být tahová síla motoru? b) Jakou dráhu urazí automobil v průběhu zvyšování rychlosti?

Řešení:

m = 1400 kg, v_o = 54 km.h^{-1} = 15 m.s^{-1}, v = 2.v_o, t = 30 s

a) Tahovou sílu motorů určíme z 2NPZ: $F_T = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{m.\Delta v}{\Delta t} = \frac{m.(v_o - 2v_0)}{\Delta t} \Longrightarrow \mathbf{F_T = \frac{m.v_o}{\Delta t}}$

Po dosazení: $F_T = \frac{1400.15}{30}$ N = 700 N

b) K výpočtu dráhy užijeme ZZE. Práce tažné síly motorů musí být stejně velká jako přírůstek kinetické energie auta:

$$\Longrightarrow F_T.s = \frac{1}{2}m.v^2 - \frac{1}{2}m.v_o^2 \Longrightarrow s = \frac{\frac{1}{2}m.v^2 - \frac{1}{2}m.v_o^2}{\frac{m.v_o}{\Delta t}} = \frac{1}{2}\Delta t.\left(\frac{v^2}{v_o} - v_0\right) = \frac{1}{2}\Delta t.\left(\frac{(2v_o)^2}{v_o} - v_0\right) \Longrightarrow s = \frac{3}{2}v_o.\Delta t$$

Po dosazení: $s = \frac{3}{2}15.30\ m = 675\ m$

2. Automobil s hmotností 2000 kg projel rovnoměrným přímočarým pohybem po vozovce se stoupáním 8%. Jakou práci vykonal motor automobilu na dráze 1,5 km? (Tření a odpor prostředí zanedbáme)

Řešení:

m = 2000 kg, s = 1,5 km = 1500 m, sin α = 0,08

Můžeme postupovat tak, jak už jsme se naučili v kinematice. Aby jel automobil rovnoměrným pohybem, musí být tažná síla motoru rovna pohybové složce tíhové síly na nakloněné rovině.

$\Longrightarrow$ $F = F_G$. sinα, kde veličina sinα udává vlastně stoupání nakloněné roviny a v našem případě má hodnotu 0,08

$\Longrightarrow$ Pro práci motoru pak platí: **W = F.s = m.g.s.sinα** *

Po dosazení: W = 2.10^3.9,8.1,5.10^3.8.10^{-2} J = 2,4.10^6 J = 2,4 MJ

Ale můžeme taky vyjít ze ZZE. Práce, jakou vykonal motor auta je rovna potenciální energii auta na konci svahu:

$\Longrightarrow$ W = E_p = m.g.h = m.g.s.sinα , což se shoduje s *

3. Umělá družice Země o hmotnosti 125 kg má přistát na povrchu Země (předpokládáme, že v poslední fázi se pohybuje po svislé dráze z výšky h=50 km, kde má rychlost v_h =10800 kmh^{-1}).

a) Účinkem brzdících raket a odporu vzduchu působí na družici stálá brzdící síla F. Určete její velikost, jestliže při dotyku s povrchem Země je rychlost družice nulová.

b) Jakou dobu trvá sestup družice z výšky h?

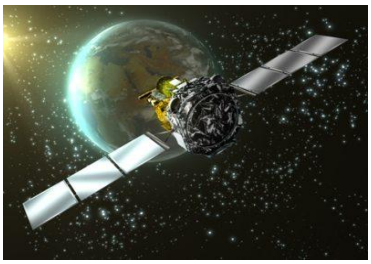
Řešení:

m = 125 kg, h = 5.10^4 m, v_h = 10800 km.h^{-1} = 3000 m.s^{-1}

a) družice má na své oběžné dráze vzhledem k Zemi celkovou energii: E = Ek + Ep = m.g.h + $\frac{1}{2}m.v_h^2$

Brzdná síla působí na dráze délky h a vykoná práci W = F.h

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ



Podle ZZE platí: W = E

$\Rightarrow$ F.h = m.g.h + $\frac{1}{2}m.v_h^2 \Rightarrow$ F = m.($\frac{v_h^2}{2.h} + g$)

Po dosazení: F = 125.($\frac{9.10^6}{2.5.10^4} + 9{,}8$) $N = 12475\ N == 12{,}5\ kN$

b) Pohyb družice je rovnoměrně zpomalený, se zrychlením:

a = g – $\frac{F}{m} = g - \frac{v_h^2}{2.h} - g = -\frac{v_h^2}{2.h}$

Počáteční rychlost je v_h, konečná rychlost je nulová $\Rightarrow$ $v_h + a.\Delta t = 0$ $\Rightarrow$ $\Delta t = -\frac{v_h}{a} = \frac{2h}{v_h}$

Po dosazení: $\Delta t = \frac{2.5.10^4}{3000}$ s = 33,3 s

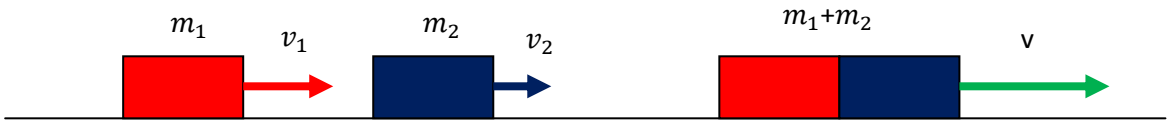
4. Vozík o hmotnosti 250 kg jede po vodorovných kolejích rychlostí 2,4 $m.s^{-1}$ a srazí se se stejným vozíkem, který jede rychlostí 1,8 $m.s^{-1}$. Po srážce se vozíky spojí a dále se pohybují společně. Vypočítej, jaká část mechanické energie se při srážce změní na jiné formy energie, jestliže se vozíky před srážkou pohybují :
a) za sebou, b) proti sobě

Řešení:

m_1= 250 kg, v_1= 2,4 $m.s^{-1}$, m_2 =250 kg, v_2 =1,8 $m.s^{-1}$

a) vozíky jedou za sebou:

Energie před srážkou: **Energie po srážce:**



$E = E_{K1} + E_{K2} = \frac{1}{2}.m.(v_1^2 + v_2^2)$ $E' = \frac{1}{2}.(m_1 + m_2).v^2 = m.v^2$,kde společnou rychlost získáme ze zákona zachování hybnosti: $m.v_1 + m.v_2 = 2.m.v \Rightarrow v = \frac{v_1+v_2}{2}$

$E' = \frac{m}{8}.(v_1 + v_2)^2$

$\Delta E = E - E' = \frac{1}{2}.m.(v_1^2 + v_2^2) - \frac{m}{8}.(v_1 + v_2)^2 \Rightarrow \Delta E = \frac{3}{8}.m.\left(v_1^2 + v_2^2 - \frac{2}{3}v_1.v_2\right)$

Po dosazení: $\Delta E = \frac{3}{8}.250.\left(2{,}4^2 + 1{,}8^2 - \frac{2}{3}.2{,}4.1{,}8\right)\ J$ = 22,5 J

b) vozíky jedou proti sobě:

mají jen jinou energii po srážce, protože ZZHybnosti má teď jiný tvar: $m.v_1 - m.v_2 = 2.m.v \Rightarrow v = \frac{v_1-v_2}{2} \Rightarrow$

$E' = \frac{m}{8}.(v_1 - v_2)^2 \Rightarrow \Delta E = E - E' = \frac{1}{2}.m.(v_1^2 + v_2^2) - \frac{m}{8}.(v_1 - v_2)^2 = \Rightarrow \Delta E = \frac{3}{8}.m.\left(v_1^2 + v_2^2 + \frac{2}{3}.v_1.v_2\right)$

Po dosazení: $\Delta E = \frac{3}{8}.250.\left(2{,}4^2 + 1{,}8^2 + \frac{2}{3}.2{,}4.1{,}8\right)J = 1102{,}5\ J$

5. Letadlo má hmotnost 3 t. Za 1 minutu vystoupí do výšky 1 km a dosáhne rychlosti 180 $km.h^{-1}$. Určete výkon motoru letadla.

Řešení:

m = 3 000 kg, h =1 km =1000 m, t = 1 min = 60 s, v =180 $km.h^{-1}$= 50 $m.s^{-1}$

Nejjednodušším způsobem řešení je použití ZZE. Musíme ale zanedbat všechny odporové síly.

Letadlo získá za 1 minutu kinetickou i potenciální energii, jejichž součet je roven práci, kterou vykonaly motory letadla:

$\Rightarrow W = E_K + E_P = \frac{1}{2}.m.v^2 + m.g.h \Rightarrow P = \frac{W}{t} = \frac{\frac{1}{2}.m.v^2 + m.g.h}{t}$

Po dosazení: $P = \frac{\frac{1}{2}.3000.50^2 + 3000.9{,}8.1000}{60}\ W = 552{,}5\ kW$

Můžeme použít také postup z kinematiky, ten je ale mnohem složitější:

a = $\frac{v}{t}, s = \frac{v^2}{2.a} = \frac{v.t}{2}, úhel\ stoupání\ sin\alpha = \frac{h}{s} = \frac{2.h}{v.t}, výkon\ motoru\ letadla\ P = \frac{W}{t} = \frac{m.g.s.cos\alpha}{t} =$

$\frac{mg.\frac{v.t}{2}\sqrt{1-(\frac{2.h}{v.t})^2}}{t} \Longrightarrow \mathbf{P = \frac{m.g.\sqrt{v^2.t^2-4.h^2}}{2t}}$

Po dosazení: P = $\frac{3000.9{,}8.\sqrt{50^2.60^2-4.10^6}}{2.60}$ $W = 547837\ W = 550\ kW$

6. Reaktivní letadlo IL-62 má startovní rychlost 300 km.h^{-1}, hmotnost při startu 16 t a rozjíždí se na startovací dráze 2 km. Letová rychlost je 870 km.h^{-1}, výška letu 10 km. Odporová síla při startu je dána vztahem F_o = f.m.g, kde f = 0,09, m je hmotnost letadla.

a) Stanovte zrychlení pohybu letadla při startu a dobu rozjezdu

b) Určete tahovou sílu F motorů

c) Na jaké nejkratší dráze se dosáhne cestovní rychlosti a výšky při tahové síle F?

Řešení:

m = 1,6.10^5 kg, v_1 = 300 km.h^{-1} = 83,3 m.s^{-1}, s_1 = 2000 m, v_2 = 870 km.h^{-1} = 242 m.s^{-1}, f = 0,09, h = 10 km = 10^{4}m

a) Zrychlení pohybu letadla při rozjíždění získáme ze vztahu

pro dráhu RZP: s = $\frac{1}{2}.a.t^2 = \frac{v^2}{2.a} \Longrightarrow \mathbf{a = \frac{v_1^2}{2.s_1}}$, pro dobu

rozjíždění platí: s = $\frac{1}{2}.v.t \Longrightarrow \mathbf{t_1 = \frac{2.s_1}{v_1}}$

Po dosazení:

a = $\frac{83{,}3^2}{2.2000}$ m.$s^{-2} = 1{,}73\ m.s^{-2}$ a $t_1 = \frac{2.2000}{83{,}3} s = 48\ s$

b) Tahová síla motorů při rozjezdu uděluje letadlu zrychlení a a překonává odporovou sílu F_o:

$\Longrightarrow$ F = m.(a + f.g) = m.($\frac{v_1^2}{2.s_1}$ + f.g) *, po dosazení: F = 1,6.10^5.($\frac{83{,}3^2}{2.2000} + 0{,}09.9{,}8$) $N = 4{,}2.10^5\ N$

c) K dosažení cestovní výšky a rychlosti musí letadlo získat potenciální energii E_p = mgh a jeho kinetická energie se musí po vzlétnutí zvětšit o $\Delta E_k = \frac{1}{2}$. m .($v_2^2 - v_1^2$) a to působením síly F po dráze s_3:

Podle ZZE, musí platit, že W = $E_p + \Delta E_k \Longrightarrow F.s_3 = m.g.h + \frac{1}{2}.m.(v_2^2 - v_1^2)$

$\Longrightarrow \mathbf{s3 = \frac{m}{2.F}.(2.g.h + v_2^2 - v_1^2)}$, kde F je dána * $\Longrightarrow$ celková dráha po odstartování $\mathbf{s_2 = s_1 + s_3}$

$\Longrightarrow s_2 = 2000 + \frac{1{,}6.10^5}{2.4{,}2.10^5}.(2{,}9{,}8.10^4 + 242^2 - 83{,}3^2)\ m = 49\ km$

7. Ve velkých zábavních parcích mívají tzv. horskou dráhu. Malý vozík s cestujícími se pohybuje po kolejnicích, vystoupá do výšky několika desítek metrů a pak sjíždí prudce dolů a projíždí smyčkou o poloměru 20 m ve svislé rovině. Určete:

a) jakou rychlost musí mít vozíček v nejvyšším bodě smyčky, aby bezpečně projel,

b) jakou rychlostí musí projet v nejnižším bodě smyčky,

c) největší výšku h_o, z níž musí vozík sjet, aby projel bezpečně smyčkou

Řešení:

r = 20 m

a) V místě B musí platit, že $F_O >$, kde F_O je odstředivá síla, F_G tíhová síla $\Longrightarrow$ m.$\frac{v_B^2}{r}$ > m.g $\Longrightarrow v_B > \sqrt{r.g}$

Po dosazení: $v_B > \sqrt{20.9{,}8}$ m.s^{-1} $\Longrightarrow v_B$ > 14 m.s^{-1} (pro lepší představu asi 50,4 km.h^{-1})

b) Využijeme zákona zachování mechanické energie (dále ZZE); musíme zanedbat tření a odpor proti pohybu:

$\Longrightarrow$ $E_{KA} = E_{KB} + E_{PB} \Longrightarrow$ $\frac{1}{2}.m.v_A^2 = \frac{1}{2}.m.v_B^2 + m.g.2r$

$\Longrightarrow$ $v_A = \sqrt{v_B^2 + 4gr} = \sqrt{g.r + 4.g.r} = \sqrt{5.g.r}$

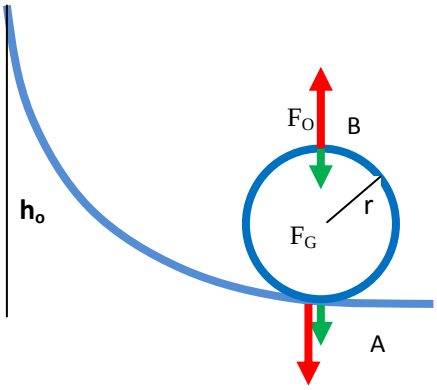
po dosazení $v_A = \sqrt{5.9{,}8.20}$ m.s^{-1} = 31,3 m.s^{-1}=113 km.h^{-1}

c) Pro nejmenší výšku ho na trase musí pro energie platit(tzv.energetická rovnice):

m.g.h$_o$ = $\frac{1}{2}$. m.v_B^2 +m.g.2.r ; ale zároveň platí z a) $v_B > \sqrt{r.g}$ $\Longrightarrow$

m.g.h$_o$ = $\frac{1}{2}$. m.r.g +m.g.2.r $\Longrightarrow$ $h_0 > 2{,}5.r$

Po dosazení h_0 > 2,5.20 m $\Longrightarrow$ ho > 50 m



S ohledem na existenci valivého odporu se vozík vyšplhá raději do 60 m, aby bezpečně projel svislou smyčkou, při níž cestující jedou bodem B hlavou dolů, pevně připoutáni k sedadlům!

8. Lyžař o hmotnosti 80 kg jede s kopce o sklonu 0,3 sportovní disciplínu sjezd po trase délky 1800 m. Součinitel smykového tření při jízdě lyží po sněhu je 0,07. Jakou rychlostí by dojel do cíle lyžař, když bychom neuvažovali tření, jaké rychlosti dosáhne závodník se třením, určete podmínku pro f tak, aby závodník jel po větší část trasy rovnoměrným pohybem?

Řešení:

m = 80 kg, l = 1800 m, f = 0,07, p = 0,3

Nebudeme-li uvažovat tření, dostaneme užitím ZZE:

$\frac{1}{2}$.m. $v_1^2 = m.g.p.l$ kde součin p.l = h vyjadřuje výšku h nakloněné roviny $\Longrightarrow$ $v_1 = \sqrt{2.g.p.l}$

Po dosazení: $v_1 = \sqrt{2.9{,}8.0{,}3.1800}$ m.s^{-1}= 103 m.s^{-1}

Budeme-li uvažovat třecí sílu, dostaneme užitím ZZE:

$\frac{1}{2}$.m. $v_1^2 + m.g.f.l.cos\alpha = m.g.p.l$, kde můžeme dosadit známý vztah z goniometrie: $cos\alpha = \sqrt{1 - (sin\alpha)^2}$

$\Longrightarrow \frac{1}{2}$.m. $v_1^2 + m.gf.l.\sqrt{1 - (sin\alpha)^2} = m.g.p.l \Longrightarrow v_2 = \sqrt{2.g.l.(p - f.\sqrt{1 - p^2})}$

Po dosazení: $v_2 = \sqrt{2.9{,}8.1800(0{,}3 - 0{,}07.\sqrt{1 - 0{,}3^2})}$ m.s^{-1} = 90 m.s^{-1}

Aby se lyžař pohyboval po svahu rovnoměrným pohybem, musí být splněna známá podmínka z nakloněné roviny:

f = tgα = $\frac{sin\alpha}{cos\alpha} = \frac{p}{\sqrt{1-p^2}}$ = 0,3 $\Longrightarrow$ dospěli jsme k nesmyslnému závěru.

Je třeba uvažovat i odporovou sílu okolního vzduchu, která působí na lyžaře $\Longrightarrow$ pohybová rovnice pak bude mít tvar: m.a = m.g.sinα – f.m.g.cosα - $\frac{1}{2}$.C.S.ρ. v^2

pokud se lyžař pohybuje rovnoměrným pohybem, má nulové zrychlení $\Longrightarrow$ pro mezní rychlost potom platí vztah:

$v_m = \sqrt{\frac{2.(m.g.sin\alpha - f.m.g.cos\alpha)}{C.S.\rho}} = \sqrt{\frac{2.m.g.(p - f.\sqrt{1-p^2})}{C.S.\rho}}$

Odhadneme-li, že C = 0,5, S = 0,6 m^2, ρ = 1,2 kgm^{-3}

Po dosazení: $v_m = \sqrt{\frac{2.80.9{,}8(0{,}3 - 0{,}07\sqrt{1-0{,}3^2})}{0{,}5.0{,}6.1{,}2}}$ m.s^{-1}= 32 m.s^{-1} = 116 km.h^{-1}

$\Longrightarrow$ lyžař se zpočátku pohybuje na trase zrychleným pohybem, s rostoucí rychlostí roste i odporová síla až zrychlení klesne na nulu a dál se lyžař pohybuje mezní rychlostí v_m.

9. Kulička o hmotnosti 20 g je vržena svisle dolů z výšky 70 cm nad deskou stolu počáteční rychlostí 2 m.s^{-1}.

a) Do jaké výšky by vyskočila po odrazu, kdyby kulička i deska stolu byly dokonale pružné?

b) Ve skutečnosti se kulička odrazila do výšky 40 cm nad deskou stolu. Určete absolutní úbytek hybnosti a mechanické energie kuličky při nárazu.

Řešení:

m = 20 g = 0,02 kg, h_1 = 70 cm = 0,7 m, v_o = 2 m.s-1, h_2 = 40 cm = 0,4 m

a) Podle ZZE platí:

m.g.h = m.g.h_1 + $\frac{1}{2}.m.v_0^2 \Rightarrow \mathbf{h = \frac{v_0^2+2.g.h_1}{2.g}}$, po dosazení: $h = \frac{2^2+2.9,8.0,7}{2.9,8}\ m = 0,9\ m$

b) Při výpočtu rychlosti dopadu užijeme opět ZZE:

$\frac{1}{2}m.v_1^2$ = m.g.h_1 + $\frac{1}{2.}m.v_0^2 \quad \Rightarrow \quad v_1 = \sqrt{v_0^2 + 2.h_1.g}$

Rychlost při odrazu je stejná jako rychlost dopadu tělesa z výšky h_2: $v_2 = \sqrt{2.g.h_2}$

Absolutní úbytek hybnosti je: $\mathbf{\Delta p = m.(v_1 - v_2) = m\ .\ (\sqrt{v_0^2 + 2.h_1.g} - \sqrt{2.g.h_2})}$

Po dosazení: $\Delta p = 0,02.(\sqrt{4 + 2.0,7.9,8} - \sqrt{2.9,8.0,4})\ kg.m.s^{-1} = 0,0282\ kg.m.s^{-1}$

Úbytek energie: $\mathbf{\Delta E = \frac{1}{2}.m.(v_1^2 - v_2^2) = \frac{1}{2}.m.[v_0^2 + 2.g.(h_1 - h_2)]}$

Po dosazení: $\Delta E = \frac{1}{2.}0,02.[4 + 2.9,8.(0,7 - 0,4)]\ J = 0,1\ J$

10. Dřevěná nádoba s pískem o celkové hmotnosti 25 kg leží na vodorovné kovové desce. Střela o hmotnosti 20 g, směřující do těžiště nádoby, vletí ve vodorovném směru rychlostí v do nádoby a uvázne v ní. Nádoba se při tom posune o 8 cm.

a) Jak velká je rychlost střely, je- li f = 0,25

b) Jaká část kinetické energie střely se přemění při zabrzdění střely v nádobě na jiný druh energie, než je energie kinetická?

Řešení:

m_1 = 25 kg, m_2 = 0,02 kg, s = 0,08 m, f = 0,25

a) protože střela uvázne v nádobě s pískem, jedná se o nepružný ráz. Ze zákona zachování hybnosti (ZZH) platí:

$m_2.v = (m_1+m_2).u \Rightarrow u = \frac{m_2}{m_{1+}\ m_2}.v$

Kinetická energie nádoby s pískem a střelou: $E_{k1} = \frac{1}{2}.(m_{1+}\ m_{2)}.u^2 = \frac{1}{2}.(m_1+m_{2)}.\ [\frac{m_2}{m_{1+}\ m_2}.v]^2 = \frac{1}{2}.\frac{m_2^2}{m_{1+}\ m_2}.v^2$;

Tato se mění v mechanickou práci spotřebovanou na překonání třecí síly F_t = f. (m_1+m_2).g, působící při posunování nádoby po desce. Velikost vykonané práce: $W = F_t.s$ = f. (m_1+m_2).g

Podle ZZE: $W = Ek_1 \Rightarrow f.(m_1+m_2).g = \frac{1}{2}.\frac{m_2^2}{m_{1+}\ m_2}.v^2 \Rightarrow \mathbf{v = \frac{m_{1+}\ m_2}{m_2}.\sqrt{2.f.g.s}}$

Po dosazení: $v = \frac{25+0,02}{0,02}.\sqrt{2.0,25.9,8.0,08}\ m.s^{-1} = 783\ m.s^{-1}$

b) Rozdíl kinetických energií před a po nárazu:

$\Delta Ek = \frac{1}{2}.m_2.v^2 - \frac{1}{2}.\frac{m_2^2}{m1+m2}.v^2 = \frac{1}{2}m_2.v^2.(1 - \frac{m_2}{m_1+m_2}) = \frac{1}{2}.\frac{m_1.m_2}{m_1+m_2}.v^2$

Odpovědí na otázku b) je: $p = \frac{\Delta Ek}{\frac{1}{2}.m_2.v^2} = \frac{1}{2}\frac{m_1.m_2}{m_1+m_2}.v^2\frac{2}{m_2.v^2} \Rightarrow \mathbf{p = \frac{m_1}{m_1+m_2}}$

Po dosazení: $p = \frac{25}{25+0,02} = 0,9992 \Rightarrow p = 99,92\ \%$

11. Kabina výtahu o hmotnosti 500 kg klesá rychlostí 4 $m.s^{-1}$. Tažné lano začne najednou klouzat a pokles kabiny se urychluje, přičemž a = $\frac{g}{5}$.

a) Jakou práci vykoná tíhová síla působící na padající kabinu při posunutí o velikosti 12 m?

b) Jakou práci vykoná při stejném posunutí tahová síla lana?

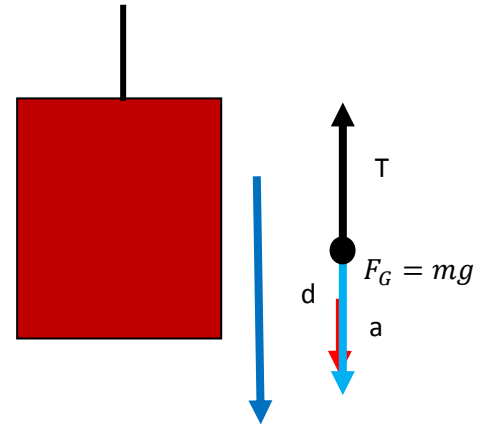
c) Jaká je celková práce všech sil působících na kabinu?

d) Jaká je kinetická energie kabiny na konci posunutí?

e) Jaká je velikost rychlosti kabiny na konci posunutí?

Řešení:

m = 500 kg, v_1 = 4 $m.s^{-1}$, d = 12 m



(Při řešení budeme používat pro práci obecný vztah z dynamiky W = F.s.cosα, kde α je úhel, který svírá síla s vektorem posunutí)

a) **W1 = m.g.d** ⟹ W = 500.9,8.12 J = 58,8 kJ

b) Kinetická energie kabiny na začátku a na konci posunutí není stejná ⟹Práce vykonaná silou T není rovna záporně vzaté práci tíhové síly. Podle silového diagramu a užitím 2NPZ dostáváme:

m.a = m.g – T ⟹ T = m.(g – a) = m.(g - $\frac{g}{5}$) = $\frac{4}{5}.m.g$

⟹ **W2 = T.d.cos180° = -T.d = -$\frac{4}{5}$. m. g. d**

Po dosazení: W_2 = -$\frac{4}{5}$500.9,8.12 $J = -47\ kJ$

c) Celková práce je algebraickým součtem prací obou sil působících na kabinu:

W = W_1 + W_2 = m.g.d - $\frac{4}{5}.m.g.d = \frac{1}{5}.m.g.d$

Po dosazení:W = $\frac{1}{5}$. 500.9,8.12J = 11,76 $kJ = 12\ kJ$

Mohli bychom postupovat i tak, že zjistím výslednici sil, působící na kabinu: F = m.a = -$\frac{m.g}{5}$

Výslednice míří dolů a svírá s posunutím úhel 0°⟹

W = F.d = $\frac{m.g}{5}$. d

Po dosazení: W = $\frac{500.9,8}{5}$. 12 $J = 11,76\ kJ = 12\ kJ$ *

d) Kinetická energie na začátku posunutí je dána vztahem E_{K1} = $\frac{1}{2}.m.v_1^2$

Na konci posunutí je kinetická energie větší o vykonanou práci W – viz *

⟹ **E_{K2} = E_{K1} + W = $\frac{1}{2}$. m. v_1^2+ $\frac{m.g}{5}$. d** **

Po dosazení: E_{K2} = ($\frac{1}{2}$. 500. 4^2+ $\frac{500.9,8}{5}$. 12) J = 15760 J = 16 kJ

e) Velikost rychlosti na konci posunutí získáme ze vztahu **

$E_{K2} = \frac{1}{2}.m.v_1^2 + \frac{m.g}{5}.d \Rightarrow \frac{1}{2}.m.v_2^2 = \frac{1}{2}.m.v_1^2 + \frac{m.g}{5}.d \Rightarrow$ **$v_2 = \sqrt{v_1^2 + \frac{2.g.d}{5}}$**

Po dosazení: $v_2 = \sqrt{4^2 + \frac{2.9,8.12}{5}}$ $m.s^{-1}$ = 7,94 $m.s^{-1}$

12. Malé dítě se spouští z vrcholu vodní skluzavky. Dítě je zpočátku v klidu a nejvyšší bod skluzavky je ve výšce 8,5 m nad jejím ústím do bazénu. Předpokládejme, že skluzavka je dokonale hladká díky proudu vody, který po ní stéká. Určete, s jakou rychlostí dítě vklouzne do bazénu.

Řešení:

h = 8,5 m

Při pohybu dítěte po skluzavce konají práci pouze tíhové síly ⟹ mechanická energie soustavy dítě – Země se při jízdě po skluzavce zachovává. Součet kinetické a potenciální energie na vrcholu skluzavky je stejný jako na jejím dolním konci: $E_{pv} + E_{kv} = E_{pd} + E_{kd}$; Protože na vrcholu skluzavky je dítě v klidu a spodní konec je v nulové výšce, lze psát pouze:

$E_{pv} = E_{kd} \Longrightarrow m.g.h = \frac{1}{2}.m.v_d^2$

$\Longrightarrow$ **$v_d = \sqrt{2.g.h}$**

Po dosazení: $v_d = \sqrt{2.9,8.8,5}\ m.s^{-1} = 13\ m.s^{-1}$

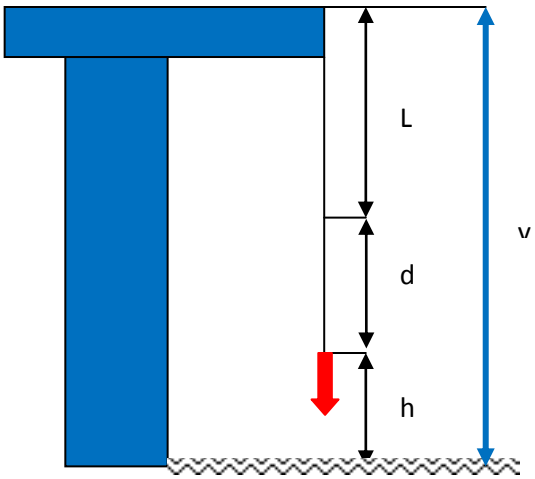
13. Vyznavač bungee-jumpingu se chystá ke skoku z mostu vysokého 45 m. Jeho hmotnost je 61 kg a pružné lano, které hodlá použít, má v nenapjatém stavu délku 25 m. Předpokládejme, že se lano řídí Hookovým zákonem a jeho tuhost je 160 $N.m^{-1}$.

a) Jaká je výška chodidel skokana nad hladinou řeky, tekoucí pod mostem, v okamžiku, kdy se jeho let zastaví v dolním bodě obratu? Jak daleko od vodní hladiny má temeno hlavy, je-li vysoký 170 cm?

b) Jaká je výsledná síla působící na skokana v nejnižším bodě?

Řešení:

v = 45 m, m = 61 kg, L = 25 m, k = 160 $N.m^{-1}$, x = 170 cm = 1,7 m



Vyjdeme ze ZZE pro skokana na začátku skoku a v dolním bodě obratu – viz obrázek.

Na mostě má skokan pouze potenciální energii, v dolním bodě obratu má navíc potenciální energii pružnosti lana. Tady předpokládáme, že se nachází v „ bodě obratu“, tj. zastaví se a jeho kinetická energie je teď opět nulová:

ZZE: $Ep_1 = Ep_2 + Ep_p \Longrightarrow m.g.v = m.g.h + \frac{1}{2}.k.d^2 \Longrightarrow m.g.v = m.g.(v - L - d) + \frac{1}{2}.k.d^2 \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \frac{1}{2}.k.d^2 - m.g.d - m.g.L = 0$; vyřešením této kvadratické rovnice získáme proměnnou d;

$D = (m.g)^2 + 2.k.m.g.L \Longrightarrow$ **$d_{1,2} = \frac{m.g \pm \sqrt{(m.g)^2 + 2.k.m.g.L}}{k}$**

Po dosazení: $d_{1,2} = \frac{61.9,8 \pm \sqrt{(61.9,8)^2 + 2.160.61.9,8.25}}{160}$ m

$d_1 = 17,9$ m (druhý záporný kořen $d_2 = -10,4$ m nemá význam) $\Longrightarrow h = v - L - d = (45 - 25 - 17,9)$ m = = 2,1 m

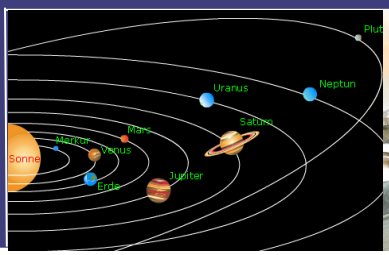
Náš skokan má tedy temeno hlavy 40 cm nad vodní hladinou.

b) Na skokana působí směrem dolů tíhová síla, směrem nahoru síla pružnosti lana. Celková síla, působící na skokana v dolním bodě obratu $F = kd - F_G = kd - mg$

Po dosazení. $F = (160.17,9 - 61.9,8)$ N = 2266 N

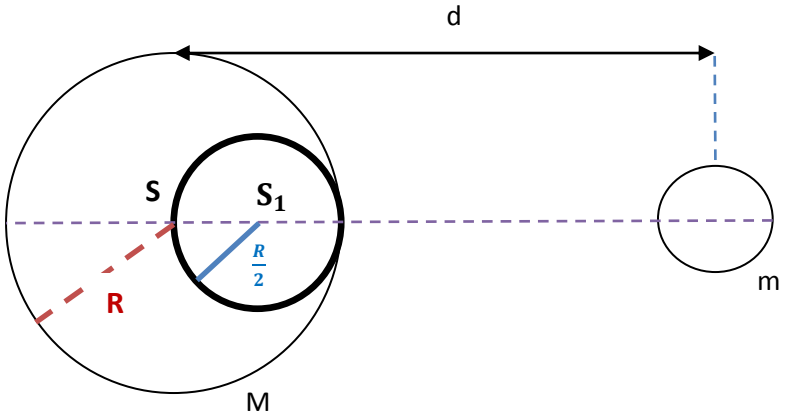
Výsdná síla, která působí na skokana v nejnižším bodě jeho trajektorie, je v porovnání s jeho tíhovou silou téměř čtyřnásobná, takže to s ním pěkně trhne nahoru.

Gravitační pole



1. V kovové kouli s poloměrem R = 1 m je vytvořená dutina kulového tvaru s poloměrem $r = \frac{R}{2}$ způsobem znázorněným na obrázku. Je třeba zjistit, jakou silou bude působit takto vzniklý útvar na kuličku o hmotnosti m = 0,5 kg nacházející se ve vzdálenosti d = 3 m od středu původní koule, je-li hmotnost původní kovové koule M = 4 kg.

Řešení:



Původní kovová koule hmotnosti M by působila na kuličku gravitační přitažlivou silou o velikosti $F_0 = \varkappa . \frac{m.M}{d^2}$.
Sílu F_0 můžeme považovat za součet hledané síly F_x, kterou působí na kuličku o hmotnosti m hmotný útvar vzniklý vyřezáním uvedené dutiny, a síly F_1, kterou působí část kovu s hmotností m', uložená v kouli se středem S_1 a poloměrem $\frac{R}{2}$. Tedy $F_0 = F_x + F_1$.
Pro F_1 z gravitačního zákona platí : $F_1 = \varkappa \frac{m m'}{(d-\frac{R}{2})^2}$

$M = \frac{4}{3} . \pi . R^3 . \rho$ $\qquad m' = \frac{4}{3} . \pi . \frac{R^3}{8} . \rho = \frac{M}{8} \quad \Rightarrow \quad F_1 = \varkappa . \frac{m.M}{8.\left(d-\frac{R}{2}\right)^2}$

pro hledanou sílu F_x vyplývá: $F_x = F_0 - F_1 = \varkappa . \frac{m.M}{d^2} - \varkappa . \frac{m.M}{8.\left(d-\frac{R}{2}\right)^2} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{F_x = \varkappa . m . M \left[\frac{1}{d^2} - \frac{1}{8.(d-\frac{R}{2})^2}\right]}$

Pro dané hodnoty získáváme: $F_x = 6{,}67 . 10^{-11} . 0{,}5 . 4 . \left[\frac{1}{9} - \frac{1}{8.(3-0{,}5)^2}\right] = 1{,}21 . 10^{-11}$ N

2. Určete, jakou minimální rychlostí by bylo nutné vystřelit raketu z povrchu Země ve směru přímé spojnice Země-Měsíc, aby dopadla na povrch Měsíce. Vzdálenost Země-Měsíc je $380.10^6 m$ a hmotnost Měsíce je rovna $M_m = \frac{M_Z}{81}$, kde M_Z je hmotnost Země. Odpor atmosféry pro jednoduchost zanedbejte.

Řešení:

Raketě je nutno udělit takovou rychlost, aby nebyla pod vlivem gravitačního pole Země, ale zároveň musí platit, že $E_z = E_M$; tj. intenzita společného gravitačního pole musí být nulová

$E_z = \kappa . \frac{M_z}{x^2}$ $E_M = \kappa . \frac{M_M}{(d-x)^2} = \kappa . \frac{M_Z}{81.(d-x)^2} \Longrightarrow$

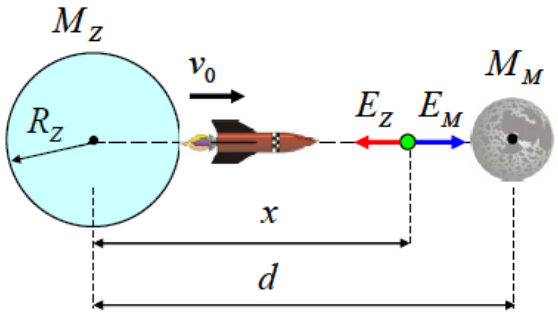
$\kappa . \frac{M_z}{x^2} = \kappa . \frac{M_Z}{81.(d-x)^2}$

$\Longrightarrow \quad 81.(d-x)^2 = x^2$

$\Longrightarrow \quad 81.(d^2 - 2.d.x + x^2) = x^2$

$\Longrightarrow \quad 81..d^2 - 162.d.x + 81.x^2 = x^2$

$\Longrightarrow \underline{80.x^2 - 162.d.x + 81.d^2 = 0}$



D = $324.d^2$; $\sqrt{D}$ =18.d ;

$x_1 = \frac{162.d+18.d}{160} = \frac{180}{160}.d = \frac{9}{8}.$ d $\quad x_2 = \frac{162.d-18.d}{160} = \frac{144}{160}.d = \frac{9}{10}.d$

Je jasné, že hodnota x_1 naší úloze nevyhovuje; $x_2 = x = \frac{9}{10}.380.10^6 m = 342.10^6\ m$

Vyjdeme ze ZZE:

kinetická a potenciální energie raket na povrchu Země = celková energie v místě x (v = 0):

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - \kappa\frac{m.M_Z}{R_Z} - \kappa\frac{m.M_M}{d-R_Z} = -\kappa\frac{m.M_Z}{x} - \kappa\frac{m.M_M}{d-x}$$

$$v_0 = \sqrt{2.g.R_Z\left(1 - \frac{R_Z}{x} + \frac{R_Z}{81.(d-R_z)} - \frac{R_Z}{81.(d-x)}\right)} = 11{,}09\ kms^{-1}$$

3. **Určete hodnotu 2. kosmické rychlosti (únikové, parabolické)**

Řešení:

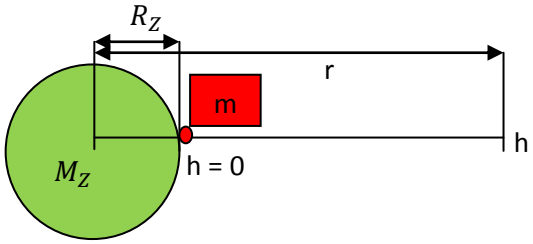
$M_z = 6.10^{24}$ kg, $R_z = 6378$ km, $\kappa = 6{,}67.10^{-11}$ N.m^2.kg^{-2}

Stanovíme si práci, nutnou pro zvedání tělesa nad povrch Země. Ale! Velikost gravitačního zrychlení se s výškou mění, výpočet není tak jednoduchý. Proto provedeme následující úvahu:

K určení průměrné hodnoty síly, kterou potřebujeme k zvednutí tělesa z povrchu Země do výšky h nad povrch Země, **použijeme geometrický průměr sil:**

$F_{go} = \kappa.\frac{m.M_Z}{R_Z^2}$ gravitační síla působící na těleso na povrchu Země

$F_{gh} = \kappa.\frac{m.M_Z}{r^2}$ gravitační síla působící na těleso ve vzdálenosti r od středu Země; r = R_Z + h



Průměrná hodnota síly:

$F_{gp} = \sqrt{F_{go}.F_{gh}} = \sqrt{\kappa.\frac{m.M_Z}{R_Z^2}.\kappa.\frac{m.M_Z}{r^2}} = \kappa.\frac{m.M_Z}{R_Z.r}$

Práce vykonaná při zvedání tělesa z povrchu Země do místa o výšce h nad povrch Země:

$W = F_{gp}.h = F_{gp}.(r - R_Z) = \kappa.\frac{m.M_Z}{R_Z.r}.(r - R_Z)$

Po úpravě: $W = \kappa.\frac{m.M_Z}{R_Z} - \kappa.\frac{m.M_Z}{r} = \kappa.m.M_z.(\frac{1}{R_Z} - \frac{1}{r})$

Pokud chceme posunout těleso do výšky (aby se už nevrátilo): $r \longrightarrow \infty$ (výraz $\frac{1}{r} \longrightarrow 0$) $\Longrightarrow$ $W = \kappa.\frac{m.M_Z}{R_Z}$

Tělesu musíme udělit 2. kosmickou rychlost; těleso získá kinetickou energii, která musí být dle ZZE rovna výše uvedené práci. Z této rovnosti pak dostáváme vztah pro 2. kosmickou rychlost v_{II} : $\frac{1}{2}m.v_{II}^2 = \kappa.\frac{m.M_Z}{R_Z} \Longrightarrow$

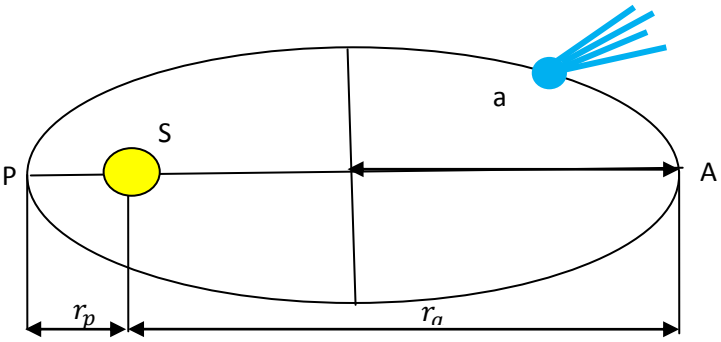
$$v_{II} = \sqrt{\frac{2.\kappa.M_Z}{R_Z}} = \sqrt{2}.\sqrt{\frac{\kappa.M_Z}{R_Z}} = \sqrt{2}.v_I = 11{,}2\ km.s^{-1}$$

v_I ..... první kosmická rychlost nebo také kruhová

Udělíme-li tělesu první kosmickou rychlost, pohybuje se po kruhové trajektorii v blízkosti Země . Jeho pohyb způsobuje dostředivá síla, kterou je síla gravitační. $m.\frac{v_I^2}{R_Z} = \kappa.\frac{m.M_Z}{R_Z^2} \Longrightarrow v_I = \sqrt{\frac{\kappa.M_Z}{R_Z}} = 7{,}9\ km.s^{-1}$

4. Jak se mění vzdálenost a rychlost Halleyovy komety na její trajektorii kolem Slunce, víme-li, že její doba oběhu je 76,1 roku. Vzdálenost komety od Slunce v perihéliu je 0,59 AU.

Řešení:



P… perihélium A…afélium
a…délka hlavní poloosy
S… Slunce v ohnisku trajektorie
Nejdříve určíme užitím 3. Keplerova zákona délku hlavních poloos.
Jako srovnávací těleso použijeme naši Zemi:

pro Zemi platí $\frac{a_1^3}{a_2^3} = \frac{T_1^2}{T_2^2}$ a_2 = 1 AU (149,6.10^6km), T_2 = 1 rok $\Longrightarrow$ $a_1 = a_2 . \sqrt[3]{\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2} = 1. \sqrt[3]{\left(\frac{76,1}{1}\right)^2}\ AU$ = 17,96 AU

Z obrázku vidíme, že $r_p + r_a = 2.a$ $\Longrightarrow$ rychlost Halleovy komety v aféliu:

$r_a = 2.a - r_p$ = (2.17,96 – 0,59) AU = 35,33 AU

Centrálním tělesem je Slunce s hmotností M_s = 1,99.10^{30} kg
Pro kruhovou rychlost Halleovy komety, z předcházejícího příkladu, platí:

$v_k = \sqrt{\frac{\kappa.M_s}{a}}$ po dosazení: $v_k = \sqrt{\frac{6,67.10^{-11}.1,99.10^{30}}{17,96.149,6.10^9}}$ m.s^{-1} = 7,029 km.s^{-1}

Z 2. Keplerova zákona platí: $v_a = v_k . \sqrt{\frac{r_p}{r_a}}$ a podobně $v_p = v_k . \sqrt{\frac{r_a}{r_p}}$

Po dosazení: $v_a = 7,029. \sqrt{\frac{0,59}{35,33}}$ km. s^{-1}= 0,9 km.s^{-1} ; $v_p = 7,029. \sqrt{\frac{35,33}{0,59}}$ kms^{-1} = 54,4 km.s^{-1}

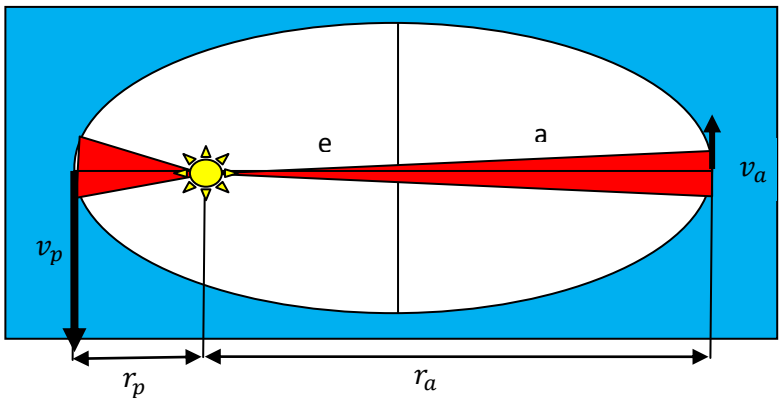
Pro číselnou výstřednost platí : $\varepsilon = \frac{r_a - r_p}{2a} = \frac{35,33 - 0,59}{2.17,96}$ = 0,967

Velká číselná výstřednost napovídá o velkém rozdílu rychlostí v průběhu pohybu Halleovy komety.

5. Odvození vztahu $v_p = v_k . \sqrt{\frac{r_a}{r_p}}$ z 2. Keplerova zákona

Řešení:

2.KZ: Obsah plochy, kterou za určitou jednotku opíše průvodič planety, je pro stejné doby u téže planety stejný
Zvolíme si krátkou dobu t
a vyjádříme obsah červených ploch opsaných průvodičem planety. Je-li doba dostatečně krátká, lze eliptické výseče považovat za rovnoramenné trojúhelníky:
Pro perihélium: $S_p = \frac{1}{2} v_p.t.r_p$



Pro afélium : $S_a = \frac{1}{2} v_a.t.r_a \implies S_p = S_a \implies \frac{1}{2} v_p.t.r_p = \frac{1}{2} v_a.t.r_a \implies v_p.r_p = v_a.r_a$

Z obrázku vidím, že $r_a > r_p \implies v_a < v_p$; tzn., že v perihéliu se planeta musí pohybovat rychleji než v aféliu a zároveň vídím, že pro poměr těchto rychlostí platí: $\frac{v_p}{v_a} = \frac{r_a}{r_p} \implies v_p = v_a.\frac{r_a}{r_p}$

Uvažujeme-li, že se planeta nebo např. kometa pohybují kolem Slunce po kružnicové trajektorii s poloměrem a, což je délka hlavní poloosy, pak pro kruhovou rychlost tohoto tělesa platí $v_k = \sqrt{\frac{\kappa.M_S}{a}}$

Tuto rychlost můžeme s určitou aproximací nahradit geometrickým průměrem rychlosti planety v perihéliu a aféliu: $v_k = \sqrt{v_p.v_a} \implies v_k^2 = v_p.v_a = v_a.\frac{r_a}{r_p}.v_a = v_a^2.\frac{r_a}{r_p} \implies$ **$v_a = v_k.\sqrt{\frac{r_p}{r_a}}$** a podobně **$v_p = v_k.\sqrt{\frac{r_a}{r_p}}$**

6. **V** jaké výšce nad Zemí se musí umístit stacionární družice (nachází se pořád nad stejným místem nad povrchem Země).

Řešení:

$M_z = 6.10^{24}$ kg, $R_z = 6378$ km, $\kappa = 6{,}67.10^{-11}$ N.m^2.kg^{-2}

Družice se otáčí spolu se Zemí po kružnicové trajektorii o poloměru R_z + h úhlovou rychlostí $\omega = \frac{2.\pi}{T}$, kde T je doba otočení Země kolem své vlastní osy; tj. 1 den; h je výška družice nad povrchem Země. Otáčivý pohyb družice po kružnicové trajektorii způsobuje dostředivá síla, v tomto případě síla gravitační, kterou působí Země na družici.

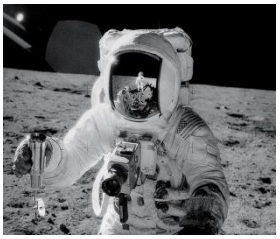
$F_g = F_d \implies \kappa \frac{m_d.M_Z}{(R_Z+h)^2} = m_d.\omega^2.(R_Z+h)$

$\kappa \frac{m_d.M_Z}{(R_Z+h)^2} = m_d.\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2.(R_Z+h) \implies (R_Z+h) = \sqrt[3]{\frac{\kappa.M_Z T^2}{4.\pi^2}}$

$\implies$ **$h = \sqrt[3]{\frac{\kappa M_Z T^2}{4.9{,}8^2}} - R_Z$** Po dosazení: $h = (\sqrt[3]{\frac{6{,}67.10^{-11}.6.10^{24}.(24.3600)^2}{4.9{,}8^2}} - 6378.10^3)$ m = 35 934 km

7. **Z**e stacionární oběžné stanice startuje směrem na Měsíc kosmická loď. Za jaký čas se dostane k Měsíci.

Řešení:



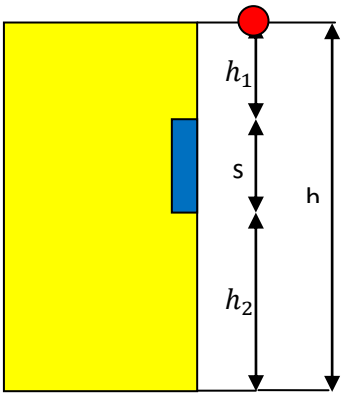
Budeme předpokládat, že stacionární oběžná stanice se nachází ve výšce, kterou jsme vypočítali v předcházejícím příkladu
h = 35 934 km
K výpočtu použijeme 3. Keplerův zákon pro dvě tělesa, která obíhají okolo Země:
Měsíc: $T_z = 28$ dnů, $a_M = 384\,400$ km
Kosmická loď : T_L hledáme, $a_L = \frac{a_{R_Z+h}}{2}$;
Je jasné, že kosmická loď mění svou vzdálenost od Země; nejdále se může dostat „ za Měsíc“ do vzdálenosti h; proto budeme předpokládat, že se bude pohybovat tak, že délku hlavní poloosy trajektorie jejího pohybu určíme jako „střední vzdálenost“ od Země,tj. $a_L = \frac{a_{R_Z+h}}{2}$

3. Keplerův zákon: V našem případě: $\frac{a_M^3}{a_L^3} = \frac{T_M^2}{T_L^2} \implies T_L = T_M.\sqrt{\frac{a_L^3}{a_M^3}} = T_M.\sqrt{\frac{\left(\frac{a_{R_Z+h}}{2}\right)^3}{a_M^3}}$

Po dosazení: $T_L = 28.\sqrt{\frac{(\frac{3{,}844.10^8+0{,}35934.10^8}{2})^3}{(3{,}844.10^8)^3}}$ dne = 11,3 dne

Čas 11,3 dne je perioda celé dráhy kosmické lodi, tj. doba letu tam i zpět. Takže do oblasti Měsíce se kosmická loď dostane za poloviční dobu., tj. za 5 dnů 15 hodin 36 minut.

8. Dokonale pružný pryžový míček je puštěn ze střechy budovy. Počáteční rychlost míčku je nulová. Pozorovatel stojící u okna zjistí, že míček proletěl oknem vysokým 1,5 m za čas 0,12 s. Míček se odrazí dokonale pružným rázem od chodníku a znovu se objeví u dolního okraje okna za dobu 2 s poté, co minul dolní okraj okna při pádu. Jak vysoká je budova?



Řešení:

s = 1,5 m, t_s = 0,12 s, t = 2 s

h = h_1 + s + h_2

k hornímu okraji se míček dostane volným pádem: $h_1 = \frac{1}{2}.g.t_1^2$ ❶

k dolnímu okraji okna se dostane také volným pádem:

$$h_1 + s = \frac{1}{2}.g.(t_1 + t_s)^2 \quad ❷$$

dráhu h_2 urazí míček za čas $\frac{t}{2}$; protože doba volného pádu od spodního okraje okna na chodník je rovna době výstupu míčku zpět po odrazu k dolnímu okraji okna

Ze střechy budov padá míček volným pádem po dobu $t_1 + t_s + \frac{t}{2}$

$\Longrightarrow$ pro celkovou dráhu h tedy platí: $h = h_1 + s + h_2 = \frac{1}{2}g\,(t_1 + t_s + \frac{t}{2})^2$

Neznáme ale čas t_1. Ten zjistíme vyřešením soustavy rovnic ❶❷

❷ $h_1 + s = \frac{1}{2}.g.(t_1 + t_s)^2 \Longrightarrow h_1 + s = \frac{1}{2}.g.(t_1^2 + 2.t_1.t_s + t_s^2)$ *

❶ $h_1 = \frac{1}{2}.g.t_1^2 \Longrightarrow t_1^2 = \frac{2.h_1}{g}$; tyto vztahy dosadíme do * a dostaneme:

$$\frac{1}{2}.g.\frac{2.h_1}{g} + s = \frac{1}{2}.g.\frac{2.h_1}{g} + g.t_1.t_s + \frac{1}{2}.g.t_s^2 \Longrightarrow h_1 + s = h_1 + g.t_1.t_s + \frac{1}{2}.g.t_s^2$$

$\Longrightarrow t_1 = \frac{2.s - g.t_s^2}{2.g.t_s}$ Teď zbývá jen vypočítat výšku budovy h : $h = h_1 + s + h_2 = \frac{1}{2}g\,(t_1 + t_s + \frac{t}{2})^2$

$\Longrightarrow h = \frac{1}{2}.g.(\frac{2.s - g.t_s^2}{2.g.t_s}_1 + t_s + \frac{t}{2})^2 = \frac{1}{2}.g.\left(\frac{2.s - g.t_s^2 + 2.g.t_s^2 + g.t.t_s}{2.g.t_s}\right)^2 \Longrightarrow h = \frac{(2.s + g.t.t_s + g.t_s^2)^2}{8.g.t_s^2}$

Po dosazení: $h = \frac{(2.1{,}5 + 9{,}8.2.0{,}12 + 9{,}8.0{,}12^2)^2}{8.9{,}8.0{,}12^2}\ m = 26{,}72\ m$

9. Těleso padá volným pádem. Za 2 s je za ním z téže výšky vrženo svisle dolů druhé těleso rychlostí v_o. Druhé těleso mine první těleso za 4 s od okamžiku, kdy bylo vrženo. Odpor vzduchu zanedbáváme. Vypočítejte:

a) Jak velkou rychlostí bylo druhé těleso vrženo?

b) V jak velké vzdálenosti od výchozího místa se tělesa minula?

c) Za jakou dobu t_o od počátku vrhu druhého tělesa se budou tělesa nacházet ve vzdálenosti s_o od sebe?

Řešení:

t_1 = 2 s, t_2 = 4 s, budeme uvažovat dvě hodnoty: s_o = 20 m, s_o= 200 m

a) Než se tělesa potkají, urazí každé stejnou dráhu s :

1. těleso se pohybuje volným pádem: $s = \frac{1}{2}.g.(t_1 + t_2)^2$

2. těleso vykonává vrh svislý dolů: $s = v_0.t_2 + \frac{1}{2}.g.t_2^2$

$$\Longrightarrow \frac{1}{2}.g.(t_1 + t_2)^2 = v_0.t_2 + \frac{1}{2}.g.t_2^2 \Longrightarrow \frac{1}{2}.g.(t_1^2 + 2.t_1.t_2 + t_2^2) = v_0.t_2 + \frac{1}{2}.g.t_2^2$$

$\Longrightarrow v_0 = \frac{g.(t_1^2 + 2.t_1.t_2)}{2.t_2}$ * ; po dosazení: $v_0 = \frac{9{,}8.(2^2 + 2.2.4)}{2.4}$ m.s^{-1} = 24,5 m.s^{-1}

b) Potkají se ve vzdálenosti, kterou určuje dráha prvního tělesa, tj. $s = \frac{1}{2}.g.(t_1 + t_2)^2$

po dosazení: $s = \frac{1}{2}.9{,}8.(2 + 4)^2 m = 176{,}4\ m$

c) Označíme si, že za čas t_o budou obě tělesa od sebe ve vzdálenosti s_o. To může nastat ve dvou případech. Druhé těleso dohání první nebo už ho minulo a vzdaluje se mu.

1. Druhé těleso se přibližuje k prvnímu tělesu (dohání ho): $s_1 = s_2 + s_o$

2. těleso dohání první po dobu t_o $\Rightarrow$ $s_2 = v_0.t_0 + \frac{1}{2}.g.t_0^2$

1. těleso padá po dobu $t_o + t_1$ $\Rightarrow$ $s_1 = \frac{1}{2}.g.(t_0 + t_1)^2$

$\Rightarrow \frac{1}{2}.g.(t_0 + t_1)^2 = v_0.t_0 + \frac{1}{2}.g.t_0^2 + s_0 \Rightarrow g.t_0.t_1 = v_0.t_0 + s_0 \Rightarrow t_0 = \frac{s_0}{g.t_1 - v_0}$

Za v_o dosadíme vztah * a dostaneme $t_0 = \frac{g.t_1^2.t_2 - 2.s_0.t_2}{g.t_1^2}$

2. Druhé těleso se už vzdaluje od prvního tělesa (předehnalo ho): $s_2 = s_1 + s_0$

$\Rightarrow \frac{1}{2}.g.t_0^2 + v_0.t_0 = s_0 + \frac{1}{2}.g.(t_0 + t_1)^2$; úpravou vztahu a dosazením vztahu * dostaneme:

$t_0 = \frac{g.t_1^2.t_2 + 2.s_0.t_2}{g.t_1^2}$

Ale zpět k zadání: **pro s_o = 20 m**

$t_0 = \frac{g.t_1^2.t_2 - 2.s_0.t_2}{g.t_1^2} \Rightarrow$ po dosazení $t_0 = \frac{10.4.4 - 2.20.4}{10.4}$ s = 0 s ; což je nesmysl

$\mathbf{t_0 = \frac{g.t_1^2.t_2 + 2.s_0.t_2}{g.t_1^2}} \Rightarrow$ po dosazení $t_0 = \frac{10.4.4 + 2.20.4}{10.4}$ s = 8 s

Za 8 s od začátku svého pohybu bude druhé těleso 20 m před prvním tělesem, protože už ho předehnalo.

pro **s_o = 200 m**

$t_0 = \frac{g.t_1^2.t_2 - 2.s_0.t_2}{g.t_1^2} \Rightarrow$ po dosazení $t_0 = \frac{10.4.4 - 2.200.4}{10.4}$ s = -36 s ; což je nesmysl

$\mathbf{t_o = \frac{g.t_1^2.t_2 + 2.s_0.t_2}{g.t_1^2}} \Rightarrow$ po dosazení $t_0 = \frac{10.4.4 + 2.200.4}{10.4}$ s = 44 s

Za 44 s od začátku svého pohybu bude druhé těleso 200 m před prvním tělesem, protože už ho předehnalo.

10. Těleso vrhneme svisle vzhůru s počáteční rychlostí v_o = 30 m.s^{-1}. Za dvě sekundy vrhneme za ním svisle vzhůru další těleso se stejnou počáteční rychlostí. Kdy, kde a s jakými rychlostmi se tělesa setkají? Odpor vzduchu zanedbejte, g = 10 m.s^{-2}.

Řešení:

v_o = 30 m.s^{-1}, τ = 2 s

pro dráhu 1. tělesa platí: $s_1 = v_o.t - \frac{1}{2}.g.t^2$

pro dráhu 2. tělesa platí: $s_2 = v_o.(t - \tau) - \frac{1}{2}.g.(t - \tau)^2$

V okamžiku setkání ve výšce h nad Zemí platí: $h = s_1 = s_2$

$\Rightarrow v_o.t - \frac{1}{2}.g.t^2 = v_o.(t - \tau) - \frac{1}{2}.g.(t - \tau)^2 \Rightarrow v_o.t - \frac{1}{2}.g.t^2 = v_o.t - v_o.\tau - \frac{1}{2}.g.t^2 + \frac{1}{2}.g.2.t.\tau - \frac{1}{2}.g.\tau^2$

$\Rightarrow g.t.\tau = v_o.\tau + \frac{1}{2}.g.\tau^2 \Rightarrow \mathbf{t = \frac{v_0}{g} + \frac{\tau}{2}}$; po dosazení: $t = (\frac{30}{10} + \frac{2}{2})$ s = 4 s

Dosazením tohoto vztahu do např. $s_1 = v_o t - \frac{1}{2}gt^2$ získáme hledanou výšku, ve které se obě tělesa setkají:

$\Rightarrow$ $h = s_1 = v_o.(\frac{v_0}{g} + \frac{\tau}{2}) - \frac{1}{2}.g.(\frac{v_0}{g} + \frac{\tau}{2})^2 = \frac{v_0^2}{g} + \frac{v_0.\tau}{2} - \frac{v_0^2}{2g} - \frac{v_0.\tau}{2} - \frac{\tau^2 g}{8}$

$\Rightarrow$ $\mathbf{h = \frac{v_0^2}{2.g} - - \frac{\tau^2.g}{8}}$ po dosazení: $h = (\frac{30^2}{2.10} - - \frac{2^2.10}{8})$ m = 40 m

Rychlosti těles v okamžiku setkání mají velikost:

$v_1 = v_o - g.t = v_o - g.(\frac{v_0}{g} + \frac{\tau}{2}) \Rightarrow \mathbf{v_1 = -\frac{1}{2}.g.\tau}$; po dosazení $v_1 = -\frac{1}{2}.10.2\ m.s^{-1} = -10\ m.s^{-1}$

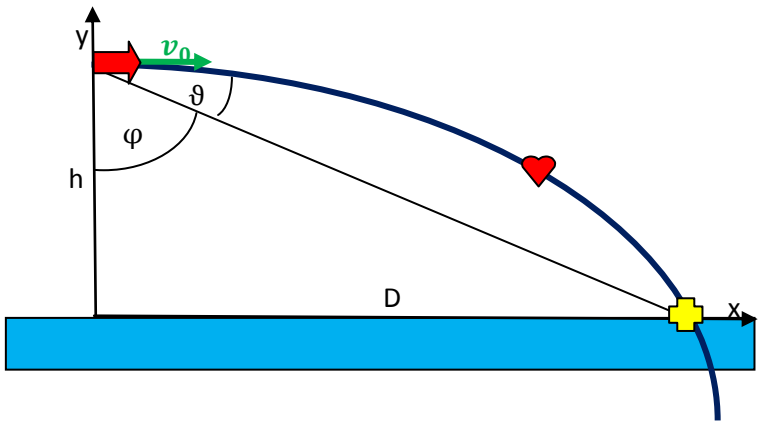
$v_2 = v_o - g.(t - \tau) = v_o - g.(\frac{v_0}{g} + \frac{\tau}{2} - \tau) \Rightarrow \mathbf{v_2 = \frac{1}{2}.g.\tau}$; po dosazení $v_2 = 10\ m.s^{-1}$

Obě tělesa se setkají za 4 s od okamžiku vypuštění prvního tělesa ve výšce 40 m nad zemí. Tělesa mají stejné velikosti okamžitých rychlostí 10 m.s^{-1}, ale první těleso už se vrací, tj. padá dolů volným pádem (odtud znaménko mínus), druhé těleso teprve vystupuje nahoru.

11. Záchranný letoun letí na pomoc tonoucímu. Pilot udržuje stálou výšku 1200 m nad hladinou a směřuje přímo nad hlavu tonoucího. Rychlost letadla je 430 km.h^{-1}. Při jakém hloubkovém úhlu musí pilot uvolnit záchranný vak, aby dopadl co nejblíže k tonoucímu?

Řešení:

h = 1200 m, v = v_o = 430 km.h^{-1}, g = 10 m.s^{-2}



Hloubkový úhel je úhel mezi zorným paprskem a vodorovným směrem, pozor – tj. úhel ϑ

Z obrázku vidíme, že $\vartheta = 90° - \varphi$

a zároveň , že $tg\varphi = \frac{D}{h}$

D je vlastně délka vodorovného vrhu. Vak vykonává vodorovný vrh. Během svého pohybu prochází řadou bodů X o souřadnicích x, y; pro které platí:

X$[x, y]$: x = v_o.t

y = h - $\frac{1}{2}.g.t^2$

Počáteční rychlost záchranného vaku je stejná jako rychlost letadla a má vodorovný směr. Víme, že vak spadne na vodní hladinu za čas t = $\sqrt{\frac{2.h}{g}}$, protože po dopadu na vodní hladinu je y = 0 a po dosazení do vztahu y = h - $\frac{1}{2}.g.t^2 \implies 0 = h - \frac{1}{2}.g.t^2 \implies t = \sqrt{\frac{2.h}{g}}$

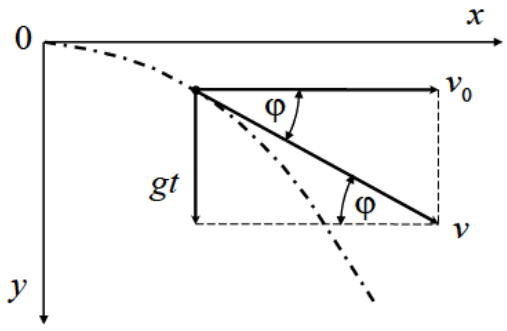
Délka vrhu D se vypočítá jako x-ová souřadnice pro čas t: D = x = v_o.t = v_o. $\sqrt{\frac{2.h}{g}}$

$\implies tg\varphi = \frac{D}{h}\frac{v_o.\sqrt{\frac{2.h}{g}}}{h} = v_o \cdot \sqrt{\frac{2}{g.h}}$

Po dosazení: $tg\varphi = 430 . \frac{1000}{3600} . \sqrt{\frac{2}{10.1200}} = 1{,}54 \implies \varphi = 57° \implies 90 - \varphi = 33°$.

12. Z rozhledny o výšce h = 30 m byl vržen kámen vodorovnou rychlostí v_o = 10 m.s^{-1}. Určete trajektorii jeho pohybu, jestliže zanedbáme odpor prostředí. Určete rychlost v dopadu kamene na zem, úhel ϕ, který svírá vektor rychlosti s vodorovnou rovinou při dopadu, poloměr křivosti dráhy R v bodě dopadu a délku D vrhu, tj. vodorovnou vzdálenost místa dopadu kamene od paty rozhledny.

Řešení:



Základní rovnice pro vodorovný vrh:

v_o má dvě složky: $v_{ox} = v_o$

$v_{oy} = 0$

pro složky rychlosti **v** platí: $v_x = v_o$

$v_y = gt$

Vektor rychlosti má v každém bodě trajektorie směr tečny a je vektorovým součtem jednotlivých složek:

$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$

Pro souřadnice bodů trajektorie platí:

B$[x, y]$: $x = v_o t$ $\implies$ ve směru osy x pohyb rovnoměrný s rychlostí v_o,

$y = \frac{1}{2}.g.t^2$ $\implies$ ve směru osy y volný pád

Trajektorie pohybu:

Jedná se vlastně o graf funkce f: y = f(x):

$y = \frac{1}{2}.g.t^2 \wedge x = v_o.t \implies y = \frac{1}{2}.g\frac{x^2}{.v_0^2} = \frac{g}{2.v_0^2}.x^2 \implies$ jedná se o kvadratickou funkci s vrcholem v počátku KSS; grafem je tedy „kus“ paraboly (je otočená dolů, protože i osa y směřuje dolů – další s možností, jak řešit vodorovný vrh)

Rychlost dopadu kamene na zem: $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 + (gt)^2} = \sqrt{v_0^2 + \left(g.\sqrt{\frac{2.h}{g}}\right)^2} \implies \mathbf{v = \sqrt{v_0^2 + 2.g.h}}$;

po dosazení: $v = \sqrt{10^2 + 2.9{,}8.30}\ \mathrm{m.s^{-1}} = 26{,}2\ \mathrm{m.s^{-1}}$

Úhel dopadu φ: z obrázku vidíme $tg\varphi = \frac{gt}{v_0} = \frac{\sqrt{2gh}}{v_0}$; po dosazení: $tg\varphi = \frac{\sqrt{2.9{,}8.30}}{10} = 2{,}425 \implies \varphi = 67° 35'$

Rychlost v každém okamžiku mění svůj směr. Podobně jako u rovnoměrného pohybu po kružnici musíme uvažovat o zrychlení, které je opět vektorovým součtem tečného a normálového zrychlení: $a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$;

nás zajímá normálové zrychlení: $a_n = \frac{v^2}{R} = g.cos\varphi;\ cos\varphi = \frac{v_0}{v} \implies \mathbf{R = \frac{v^2}{g.cos\varphi} = \frac{v^3}{g.v_0} = \frac{\left(\sqrt{v_0^2+2.g.h}\right)^3}{g.v_0}}$;

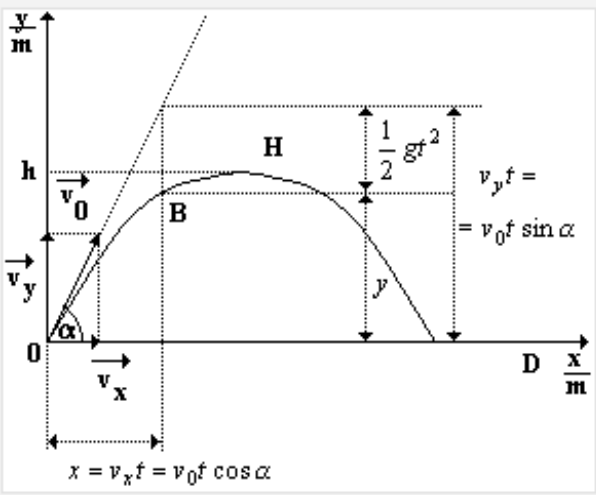
Po dosazení: $R = \frac{\left(\sqrt{10^2+2.9{,}8.30}\right)^3}{9{,}8.10}\ m = 184{,}2\ m$

Místo dopadu: $D = x = v_o.t = v_o.\sqrt{\frac{2.h}{g}}$; po dosazení $D = 10.\sqrt{\frac{2.30}{9{,}8}}$ m = 24,7 m

13. Míč ležící na fotbalovém hřišti byl vykopnut do vzdálenosti 25 m, kam dopadl za dobu 1,9 s. Určete velikost a směr jeho počáteční rychlosti a výšku, do které během letu vystoupil. Odpor vzduchu zanedbejte.

Řešení:

D = 25 m, t = 1,9 s , g = 9,8 m.s^{-2}



Základní rovnice pro rychlost:

v_o má dvě složky: $v_{ox} = v_o.\cos\alpha$, $v_{oy} = v_o.\sin\alpha$

Pro složky rychlosti platí:

$\implies v_x = v_o.\cos\alpha$,

$v_y = v_o.\sin\alpha - g.t$

Vektor rychlosti má v každém bodě trajektorie směr tečny a je vektorovým součtem jednotlivých složek:

$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$

Pro souřadnice bodů trajektorie platí:

B$[x, y]$: $x = v_o.t.\cos\alpha \implies$ ve směru osy x pohyb rovnoměrný s rchlostí $v_o\cos\alpha$,

$y = v_o.t.\sin\alpha - \frac{1}{2}.g.t^2 \implies$ ve směru osy y vrh svislý vzhůru s počáteční rychlostí $v_o.\sin\alpha$

Míč doletěl do vzdálenosti 25 m, tj. do bodu D, jehož y-ová souřadnice je nulová

$\implies 0 = v_o.t.\sin\alpha - \frac{1}{2}.g.t^2 \implies 0 = t.(v_o.\sin\alpha - \frac{1}{2}.g.t)$; řešením této kvadratické rovnice jsou dva kořeny: t = 0s začátek pohybu $v_o.\sin\alpha - \frac{1}{2}.g.t = 0 \implies t_D = \frac{2.v_0.\sin\alpha}{g}$ což je celková doba vrhu šikmého vzhůru; tento čas dosadíme do vztahu pro x-ovou souřadnici a dostaneme délku vrhu.

$\implies x = v_o.\cos\alpha\ \frac{2.v_0.\sin\alpha}{g} = \frac{v_0^2.2.sin\alpha.cos\alpha}{g} = \frac{v_0^2.sin2\alpha}{g}$

$\implies$ délka vrhu šikmého vzhůru: $D = \frac{v_0^2.sin2\alpha}{g}$

Vydělením označených rovnic dostáváme: $\frac{t^2}{D} = \frac{\left(\frac{2.v_0.\sin\alpha}{g}\right)^2}{\frac{v_0^2.2.sin\alpha.cos\alpha}{g}} = \frac{2.tg\alpha}{g}$

$\implies \mathbf{tg\alpha = \frac{g.t^2}{2.D}}$, po dosazení: $tg\alpha = \frac{9{,}8.1{,}9^2}{2.25} = 0{,}7076 \implies \alpha = 35°17'$

Jak určíme výšku vrhu H ?

Na vrcholu trajektorie je y-ová složka rychlosti rovna 0 $\Longrightarrow v_o .\sin\alpha - g.t = 0 \Longrightarrow t_H = \frac{v_0.\sin\alpha}{g}$; z tohoto vztahu vidíme, že doba výstupu u vrhu šikmého vzhůru je stejná jako doba sestupu; výšku výstupu H určíme dosazením tohoto času do y-ové souřadnice bodu H: $H = v_o .t_H .\sin\alpha - \frac{1}{2}.g.t_H^2 = \frac{(v_0.\sin\alpha)^2}{g} - \frac{(v_0.\sin\alpha)^2}{2.g} = \frac{(v_0.\sin\alpha)^2}{2.g} \Longrightarrow H = \frac{(v_0.\sin\alpha)^2}{2.g}$

Při výpočtu H bychom nyní mohli dosadit již vypočítaný úhel α, ale je správnější vyjít ze zadaných veličin

$\Longrightarrow \frac{H}{D} = \frac{\frac{(v_0.\sin\alpha)^2}{2.g}}{\frac{v_0^2.sin2\alpha}{g}} = \frac{tg\alpha}{4} \Longrightarrow$ **H = D.** $\frac{\mathbf{tg\alpha}}{\mathbf{4}} = \frac{\mathbf{g.t_D^2}}{\mathbf{8}}$;

po dosazení: $H = \frac{9,8.1,9^2}{8}\ m = 4,4$ m

v0 = $\frac{\mathbf{gt_D}}{\mathbf{2.\sin\alpha}}$; po dosazení: $v_0 = \frac{9,8.1,9}{2.sin35°17} ms^{-1} =$

$= 16,1\ m.s^{-1}$

14. Pirátská loď je zakotvena 560 m od pobřežní pevnosti. Ochránci mají k dispozici dělo umístěné v úrovni mořské hladiny, které může vystřelit náboj rychlostí 82 $m.s^{-1}$.

a) Pod jakým elevačním úhlem musí být nastavena hlaveň, aby náboj pirátskou loď zasáhl?

b) Určete dobu letu střely.

c) V jaké vzdálenosti od pevnosti bude pirátská loď v bezpečí?

Řešení:

D = 560 m, $v_0 = 82\ m.s^{-1}$

Použijeme odvozené vztahy z předcházejícího příkladu:

sin2α = $\frac{\mathbf{g.D}}{\mathbf{v_0^2}}$; po dosazení: $\sin2\alpha = \frac{9,8.560}{82^2} = 0,816 \Longrightarrow$ 1) $2\alpha = 54°41' \Longrightarrow \alpha = 27°20'$

2) $2\alpha = 125°19' \Longrightarrow \alpha = 62°39'$

V obou případech střela zasáhne cíl. Ale je jasné, že při větším elevačním úhlu poletí střela k lodi déle.

<u>doba letu střely:</u> **t =** $\frac{\mathbf{D}}{\mathbf{vo.cos\alpha,}}$; po dosazení: 1) $t = \frac{560}{82.\cos 27}$ s = 7,7 s

2) $t = \frac{560}{82.\cos 62}$ s = 15 s

c) Dolet střely je největší při elevačním úhlu 45°; v tomto případě střela doletí do vzdálenosti **D =** $\frac{\mathbf{v_0^2}}{\mathbf{g}}$;

po dosazení $D = \frac{82^2}{9,8}$ m = 690 m

Vydá-li se pirátská loď na ústup, začnou se hodnoty obou elevačních úhlů sbližovat a splynou v okamžiku, kdy bude loď vzdálena od pevnosti 690 m. Ve vzdálenosti větší než 690 m jsou již piráti v bezpečí.

Tuhé těleso

1. Obdélníková deska o rozměrech a = 30 cm, b = 40 cm se otáčí okolo osy, která je umístěna ve vrcholu A. F_1 = 10 N, F_2 = 20 N, F_3 = 30 N, F_4 = 40 N. Na desku působí síly, které jsou vyznačeny na obrázku. Určete výsledný moment sil. Kde bychom museli umístit sílu $\overrightarrow{F_5}$ o velikosti 50 N, aby se deska působením sil neotáčela?

Řešení:

Jedná se o typickou úlohu na momentovou větu:

Výsledný moment sil: $\overrightarrow{M} = \overrightarrow{M_1} + \overrightarrow{M_2} + \overrightarrow{M_3} + \overrightarrow{M_4}$

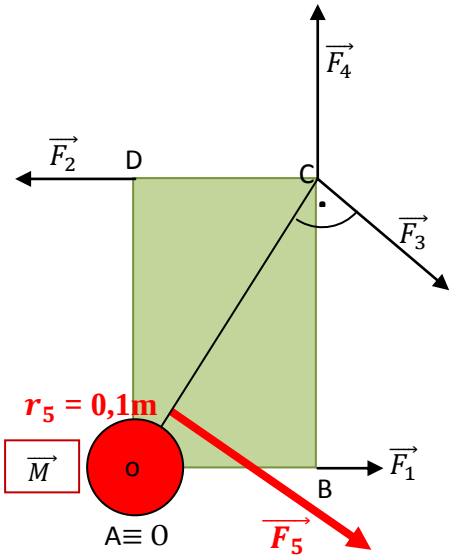
Vektor leží v ose otáčení, velikost určím pravidlem pravé ruky.

Velikost výsledného momentu je algebraickým součtem jednotlivých momentů sil; dle obrázku platí: $M = M_1 + M_2 - M_3 + M_4$

Po dosazení číselných hodnot:

$M = (10.0 + 20.0{,}4 - 30.\sqrt{0{,}3^2 + 0{,}4^2} + 40.0{,}3)$ N.m

M = +5 Nm ⟹ Těleso se otáčí proti směru otáčení hodinových ručiček, výsledný moment sil $\overrightarrow{M}$ směřuje před nákresnu.

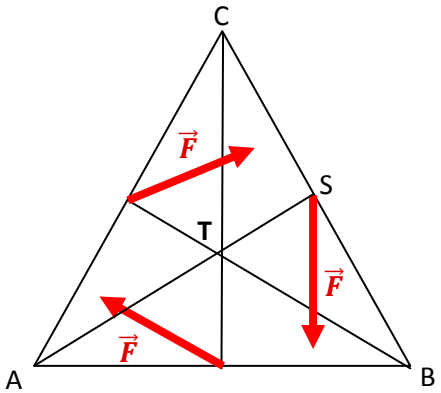


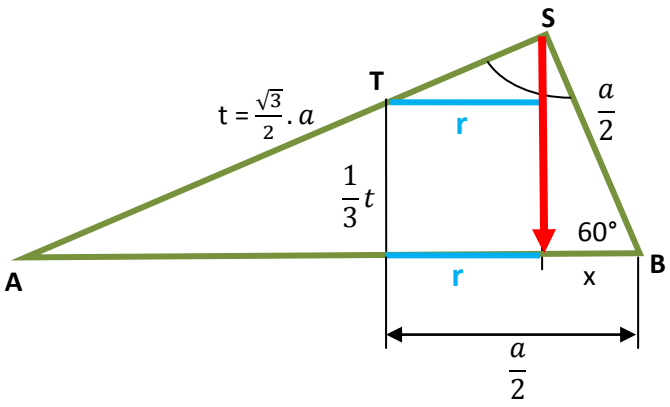
Umístění síly $\overrightarrow{F_5}$:

Musí platit: M_5 = - 5 N.m ⟹ r_5 = 0,1 m

Pro vyřešení tohoto problému je více možností. Jednou z nich je třeba umístění síly $\overrightarrow{F_5}$ podle obrázku.

2. Je dán rovnostranný trojúhelník ABC s velikostí strany a. Určete výsledný moment sil, které roztáčí tento trojúhelník okolo těžiště, mají-li všechny síly stejnou velikost F, jsou umístěny ve středech stran a kolmé na strany, nad kterými leží.





esf evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Řešení:

Z obrázku vidíme, že všechny tři síly způsobují otáčení trojúhelníku v záporném směru. Pro velikost výsledného momentu všech tří sil bude platit:

M = - 3.F.r ; kde r je rameno sil

Velikost r můžeme určit několika způsoby:

Vyjdeme z trojúhelníku ABS:

Pro těžnici rovnostranného trojúhelníku platí: $t = \frac{\sqrt{3}}{2}a$, těžiště T dělí těžnici v poměru 2: 1,

$r = \frac{a}{2} - x$; $x = \frac{a}{2}.\cos 60° = \frac{a}{4} \implies r = \frac{a}{4}$

$\implies M = -3.F.\frac{a}{4} = -\frac{3}{4}F.a$

Vektor $\vec{M}$ leží v těžišti, je kolmý na rovinu trojúhelníku, směřuje podle pravidla pravé ruky za nákresnu.

3. Jak velkou práci musíme vykonat, abychom ocelový válec o hmotnosti 900 kg a poloměru podstavy 0,6 m roztočili na 72 otáček za minutu?

Řešení:

m = 900 kg, r = 0,6 m, f = 72. $\frac{1}{60}\ s = \frac{6}{5}\ Hz$

Z tabulek zjistíme moment setrvačnosti plného válce.

$J = \frac{1}{2}\ m.r^2$

Velikost práce je rovna kinetické energii rotujícího válce:

$\implies W = E_k = \frac{1}{2}\ J.\omega^2 = \frac{1}{4}\ m.r^2(2.\pi.f)^2 \implies$ **W = m.(r.π.f)²**

Po dosazení: $W = 900.(0{,}6.3{,}14.\frac{6}{5})^2$ J = 4600 J = 4,6 kJ

4. Jakou rychlost získá koule, když se kutálí po nakloněné rovině z výšky 10 m?

Řešení:

Z tabulek opět zjistíme moment setrvačnosti koule: $J = \frac{2}{5}\ m.r^2$

Potenciální energie koule ve výšce h na nakloněné rovině je podle ZZE rovna kinetické energii koule na konci nakloněné roviny: $E_p = E_k$

$m.g.h = \frac{1}{2}\ m.v^2 + \frac{1}{2}\ J.\omega^2$; $\omega = \frac{v}{r}$

$m.g.h = \frac{1}{2}\ m.v^2 + \frac{1}{2}\frac{2}{5}\ m.r^2.(\frac{v}{r})^2$

$g.h = \frac{1}{2}.v^2 + \frac{1}{5}.v^2$

$g.h = \frac{7}{10}.v^2 \implies \mathbf{v = \sqrt{\frac{10.g.h}{7}}}$

Po dosazení: $v = \sqrt{\frac{10.10.10}{7}}$ m.s^{-1} = 11,95 m.s^{-1}

Pzn. Výsledek nezávisí ani na hmotnosti, ani na poloměru koule.

5. Homogenní prstenec, kotouč a koule o stejném poloměru a stejné hmotnosti jsou současně uvolněny v nejvyšším bodě nakloněné roviny o délce L = 2,5 m a úhlu sklonu α = 12°. Určete rychlost každého z těles na konci nakloněné roviny. Které z těles dorazí na konec nakloněné roviny nejdříve?

Řešení:

L = 2,5 m, α = 12°

Ze ZZE platí: $m.g.h = \frac{1}{2}\ m.v^2 + \frac{1}{2}\ J.\omega^2$; $h = L.\sin\alpha$

Z tabulek zjistíme moment setrvačnosti pro jednotlivá tělesa:

prstenec:	$J = mr^2$
kotouč:	$J = \frac{1}{2}mr^2$
koule:	$J = \frac{2}{5}mr^2$

prstenec: $m.g.L.\sin\alpha = \frac{1}{2}.m.v^2 + \frac{1}{2}.m.r^2.(\frac{v}{r})^2$

$g.L.\sin\alpha = \frac{1}{2}.v^2 + \frac{1}{2}.v^2 \implies g\ L.\sin\alpha = v^2 \implies \mathbf{v = \sqrt{g.L.\sin\alpha}}$

po dosazení: $v = \sqrt{9{,}8.2{,}5.\sin 12°}$ m.s^{-1} = 2,25 m.s^{-1}

kotouč: $m.g.L.\sin\alpha = \frac{1}{2}.m.v^2 + \frac{1}{2}.\frac{1}{2}.m.r^2.(\frac{v}{r})^2$

$g.L.\sin\alpha = \frac{1}{2}.v^2 + \frac{1}{4}.v^2 \Rightarrow g.L.\sin\alpha = \frac{3}{4}.v^2 \Rightarrow$ **$v = 2.\sqrt{\frac{g.L.\sin\alpha}{3}}$**

po dosazení: $v = 2.\sqrt{\frac{9{,}8.2{,}5.\sin 12}{3}}$ m.s^{-1} = 2,61 m.s^{-1}

koule: $m.g.L.\sin\alpha = \frac{1}{2}.m.v^2 + \frac{1}{2}.\frac{2}{5}.m.r^2.(\frac{v}{r})^2$

$g.L.\sin\alpha = \frac{1}{2}.v^2 + \frac{1}{5}.v^2 \quad g.L.\sin\alpha = \frac{7}{10}.v^2 \Rightarrow$ **$v = \sqrt{\frac{10.g.L.\sin\alpha}{7}}$**

po dosazení: $v = \sqrt{\frac{10.9{,}8.2{,}5.\sin 12}{7}}$ m.s^{-1} = 2,70 m.s^{-1}

Z výsledků je jasné, že koule tento závod vyhraje, druhý skončí kotouč a poslední bude prstenec.

6. Pravidelná homogenní tyč s hmotností 2 kg a délky 2 m je upevněná v krajním bodě tak, že je otáčivá kolem vodorovné osy. Na začátku je tyč v klidu ve svislé poloze. Střela s hmotností m_o = 20 g, letící kolmo na tyč, zasáhne tyč v blízkosti dolního konce a prostřelí ji. Tyč se v důsledku zásahu střelou vychýlí ze svislé polohy, střela sníží svou rychlost z hodnoty 1200 m.s^{-1} na 1100 m.s^{-1}. Určete úhel α vychýlení tyče.

Řešení:

m = 2 kg, d = 2 m, m_o = 20 g, v_1 = 1200 m.s^{-1}, v_2 = 1100 m.s^{-1}

Předpokládáme, že dřevěná tyč je tuhé těleso, které se prostřelením nemění.

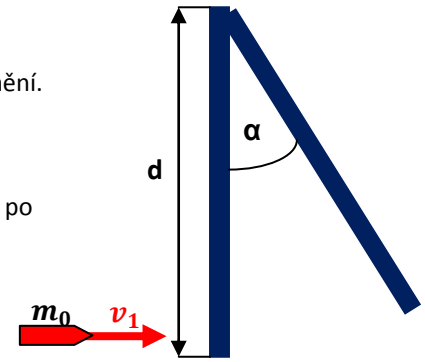
Z tabulek zjistíme, že moment setrvačnosti takto upevněné tyče je:

$$J = \frac{1}{3}.m.d^2$$

Změna momentu hybnosti střely je rovna změně momentu hybnosti tyče po zásahu střely:

$$m_0.(v_1 - v_2).d = J.\omega$$

$$m_0.(v_1 - v_2).d = \frac{1}{3}.m.d^2.\omega$$



$\Rightarrow \omega = 3.\frac{m_0}{m}\frac{(v_1-v_2)^2}{d} \Rightarrow$ kinetická energie tyče po zásahu střely je:

$$Ek = \frac{1}{2}.J.\omega^2 = \frac{1}{2}.\frac{1}{3}.md^2.(3.\frac{m_0}{m}\frac{(v_1-v_2)^2}{d})^2 = \frac{3}{2}.\frac{m_0^2.(v_1-v_2)^2}{m}$$

Úhel α vychýlení tyče ze svislé polohy určíme ze ZZE. Počáteční kinetická energie tyče je rovna změně potenciální energii tyče po vychýlení o úhel; jinak by neplatil ZZE, že mechanická energie tělesa je veličina stálá.

Potenciální energii tyče: těžiště tyče je v její polovině $\Rightarrow Ep = m.g.\frac{d}{2}$; po vychýlení o úhel α bude těžiště ve výšce $\frac{d}{2}.cos\alpha \Rightarrow \Delta E_p = m.g.\frac{d}{2}.(1 - cos\alpha)$

$$\Rightarrow \Delta E_k = \Delta E_p \Rightarrow \frac{3}{2}.\frac{m_0^2.(v_1-v_2)^2}{m} = m.g.\frac{d}{2}.(1 - cos\alpha) \Rightarrow cos\alpha = 1 - \frac{3.m_0^2.(v_1-v_2)^2}{m^2.g.d}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\alpha = \arccos(1 - \frac{3.m_0^2.(v_1-v_2)^2}{m^2.g.d})}$$

Po dosazení: $\alpha = arccos\left(1 - \frac{3.0{,}02^2(1200-1100)^2}{2^2 9{,}8.2}\right)° = 32° 7'$

7. Stavební materiál o hmotnosti 160 kg byl zvedán rumpálem, jehož hřídel má poloměr 5 cm a kladkou. V okamžiku, kdy břemeno dosáhlo výšky 10 m nad zemským povrchem, se zlomila klika rumpálu, břemeno začalo klesat, při pádu roztáčelo kladku i rumpál a dopadlo na zem za dobu t_1 = 5 s po zlomení kliky.

a) Jak velký byl moment setrvačnosti rumpálu?

b) Jak velká byla v čase t_1 úhlová a obvodová rychlost bodů na povrchu hřídele rumpálu?

Řešení:

m = 160 kg, r = 0,05 m, h = 10 m, t_1 = 5 s

a) Po zlomení kliky rumpálu padalo břemeno z výšky h rovnoměrně zrychleným pohybem, pro který platí vztah $h = \frac{1}{2}.a.t_1^2 \Rightarrow$ zrychlení posuvného pohybu břemene $a = \frac{2.h}{t_1^2}$.

Při dopadu na zemský povrch mělo břemeno rychlost $v = a.t_1 = \frac{2.h}{t_1}$

Pro úhlové zrychlení platí: $\varepsilon = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\Delta v}{r.\Delta t} = \frac{a}{r} \Rightarrow a = r.\varepsilon$

Pro úhlovou rychlost platí: $\omega = \frac{v}{r}$

Z těchto vztahů vypočítáme úhlové zrychlení a úhlovou rychlost otáčivého pohybu rumpálu při dopadu břemene na zem. Pro posuvný pohyb břemene a otáčivý pohyb rumpálu platí tedy vztahy:

$a = \frac{2.h}{t_1^2} \wedge v = \frac{2.h}{t_1} \Rightarrow \varepsilon = \frac{a}{r} = \frac{2.h}{r.t_1^2}$, $\omega = \frac{v}{r} = \frac{2.h}{r.t_1}$

Potenciální energie tíhová břemene měla v okamžiku, kdy došlo ke zlomení kliky rumpálu, hodnotu:

Ep = m.g.h.

Během pádu břemene se tato energie postupně měnila v energii kinetickou Ek posuvného pohybu břemene a otáčivého pohybu rumpálu a po dopadu na zem nabyla hodnoty: $Ek = \frac{1}{2}.m.v^2 + \frac{1}{2}.J.\omega^2$

Podle ZZE musí platit:

$m.g.h = \frac{1}{2}.m.v^2 + \frac{1}{2}.J.\omega^2 \Rightarrow J = \frac{m}{\omega^2}.(2.g.h - v^2)$

$\Rightarrow J = \frac{m}{(\frac{2.h}{r.t_1})^2}.\left(2.g.h - \left(\frac{2.h}{t_1}\right)^2\right) \Rightarrow \mathbf{J = \frac{m.r^2}{2.h}\left(g.t_1^2 - 2.h\right)}$

Po dosazení: $J = = \frac{160.0{,}05^2}{2.10}(9{,}8.5^2 - 2.10)kg.m^2 = 4{,}6\ kg.m^2$

b) Pro velikosti úhlové rychlosti otáčivého pohybu rumpálu a obvodové rychlosti bodů na povrchu hřídele rumpálu platí: $\omega = \frac{2.h}{r.t_1}$, $v = \frac{2.h}{t_1}$,

po dosazení: $\omega = \frac{2.10}{0{,}05.5}\ s^{-1} = 80\ s^{-1}$ a pro $v = \frac{2.10}{5}\ m.s^{-1} = 4\ m.s^{-1}$

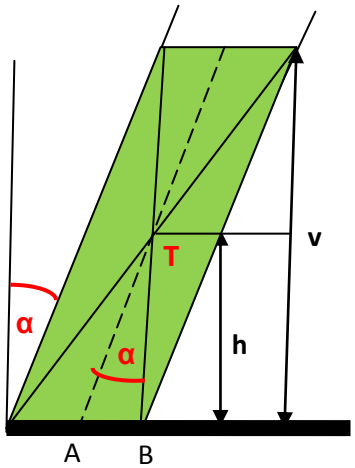
8. Na vodorovném stole stojí šikmá válcová nádoba, jejíž povrchové přímky svírají se svislicí úhel 15°. Podstavy válce jsou kruhové o vnitřním průměru d = 4 cm. Do válce lijeme vodu do té doby, než se převrhne.

a) Vypočtěte hmotnost vody ve válci v okamžiku, kdy se převrhne.

b) Zjistěte totéž pro rtuť (teoreticky ☺).

Řešení:

d = 4 cm, α = 15°, ρ_v = 1000 kg.m^{-3}, ρ_r = 13600 kg.m^{-3}



Válec se převrhne, jakmile vektorová přímka tíhové síly procházející těžištěm protne osu otáčení, která je podle obrázku shodná s bodem B.

Pro výšku h těžiště T nad podstavou tedy z pravoúhlého trojúhelníku ABT platí:

$$tg\alpha = \frac{d}{2.h} \Rightarrow h = \frac{d}{2.tg\alpha}$$

a) hmotnost vodního válce v okamžiku rovnovážné polohy vratké je: m = V. ρ_v,

kde V je jeho objem. Objem šikmého válce je roven $V = \frac{1}{4}.\pi.d^2.v$; kde v je výška vodního válce.

Těžiště vodního válce se nachází v polovině, platí tedy vztah v = 2.h. Pro hmotnost vodního sloupce platí:

$m = V.\rho_v$ $\quad m = \frac{1}{4}.\pi.d^2.2.\frac{d}{2.tg\alpha}.\rho_v \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{m_v = \frac{1}{4}.\frac{\pi.d^3.\rho_v}{tg\alpha}}$

po dosazení: $m = \frac{1}{4}.\frac{3{,}14.0{,}04^3 1000}{tg15}\ kg$ = 0,187 kg

b) Válec plněný rtutí má rovnovážnou polohu vratkou pro stejnou výšku jako v případě naplnění vodou. Pro rtuť tedy platí stejný vztah jako pro vodu.

$\mathbf{m_r = \frac{1}{4}.\frac{\pi.d^3.\rho_r}{tg\alpha}}$

Po dosazení: $m = \frac{1}{4}.\frac{3{,}14.0{,}04^3 13600}{tg15}\ kg$ = 2,56 kg

Stabilita šikmého válce se zmenšuje s rostoucím úhlem, které svírají površky válce se svislým směrem. Na kapalině nezáleží.

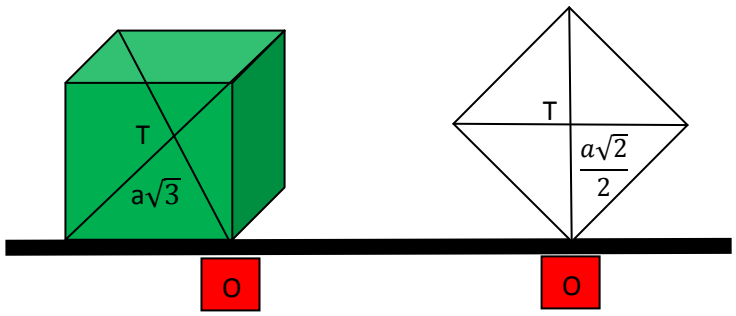
9. Bedna má tvar krychle. Můžeme ji přemístit do vzdálenosti d buď převracením přes hranu, nebo tak, že ji táhneme po zemi. Součinitel smykového tření bedny o zem je f. Tření při převracení je zanedbatelné.

a) Při kterých hodnotách f se vykoná při přemísťování bedny překlápěním větší práce než při posunování po zemi?

b) Jakou hodnotu musí mít f, aby práce byla v obou případech stejná?

Řešení:

Hranu krychle označíme a. Těžiště krychle je ve výšce $\frac{a}{2}$. Při překlápění krychle se těžiště zvedne do výšky $\frac{a.\sqrt{2}}{2}$; tzn o vzdálenost $\Delta h = \frac{a}{2}.(\sqrt{2}-1)$ – viz obrázek



Máme-li bednu překlápěním kolem hrany BC přemístit do vzdálenosti d, musíme ji překlopit celkem n-krát, kde $n = \frac{d}{a}$

Při jednom překlopení se vykoná práce: $W_1 = m.g.\Delta h = m.g\frac{a}{2}.(\sqrt{2}-1)$

Celková práce při překlápění: $W_p = n.m.g.\Delta h = \frac{d}{a}.g.\frac{a}{2}.(\sqrt{2}-1) = \frac{m.g.d}{2}.(\sqrt{2}-1)$

Přemísťujeme-li bednu tak, že ji táhneme do vzdálenosti d po zemi, překonáváme třecí sílu F_t = f.mg, takže vykonáme práci: W_t = f.m.g.d, kde m je hmotnost bedny

a) má-li být práce vykonaná při přemísťování bedny překlápěním větší, pak musí platit:

Wp>Wt

$$\frac{m.g.d}{2}.(\sqrt{2}-1) > \text{f.m.g.d} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{f < \frac{\sqrt{2}-1}{2}} \quad \Longrightarrow \text{f} < 0{,}207$$

Má-li součinitel tření hodnotu menší než 0,207, pak se vykoná při přemísťování bedny překlápěním větší práce než při jejím posouvání po zemi.

b) Má-li platit Wp = Wt

$$\frac{mg.d}{2}.(\sqrt{2}-1) = \text{f.m.g.d} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{f = \frac{\sqrt{2}-1}{2}} \quad \Longrightarrow \text{f} = 0{,}207$$

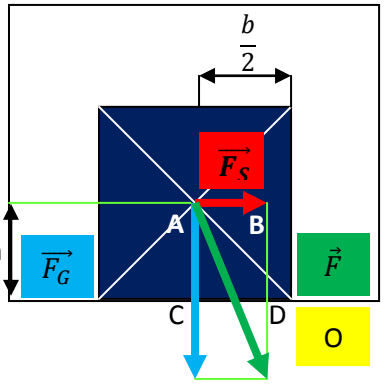
Má-li součinitel tření hodnotu f = 0,207, vykoná se při obou způsobech přemísťování stejně velká práce.

10. Na podlaze nákladního auta, která je pobitá plechem, leží podélně dřevěná bedna se zbožím dlouhá **l** m a široká 1,6 m. Těžiště nákladu leží ve výšce 60 cm nad středem podstavy. Součinitel smykového tření mezi bednou a podlahou f = 0,15. Může auto projíždět zatáčku o poloměru 100m rychlostí v_1 = 60 km.h^{-1} bez nebezpečí, aby se bedna převrátila?

Řešení:

b = 1,6 m, h = 0,6 m, t_1 = 30 s, v_1 = 60 km.h^{-1} = 16,7 m.s^{-1}, v_2 = 30 km.h^{-1} = 8,3 m.s^{-1}, f = 0,15, r = 100 m

Uvedený děj vysvětlíme z hlediska pozorovatele v neinerciální vztažné soustavě (např. z hlediska řidiče auta)



Pro větší názornost se podíváme na bednu do auta zezadu. Na bednu bude působit tíhová síla bedny a odstředivá síla. Aby se bedna nepřeklopila, musí výslednice těchto sil protínat podstavu bedny (tehdy je bedna stabilní);

z obrázku vidím, že: * $AB \leq \frac{b}{2}$

Pro velikost sil platí: $F_S = m.\frac{v_1^2}{r}$, $F_G = m.g$

Z podobnosti vzniklých trojúhelníků platí: $\frac{AB}{CD} = \frac{h}{TC} \Longrightarrow \frac{AB}{F_S} = \frac{h.}{F_G} = \frac{h.v_1^2}{r.g}$ dosazením * získáme:

$\frac{b}{2.m.\frac{v^2}{r}} = \frac{h}{m.g} \Longrightarrow \mathbf{v_1 \leq \sqrt{\frac{b.r.g}{2.h}}}$ dosazením zadaných hodnot: $16{,}7 \leq \sqrt{\frac{1{,}6.100.9{,}8}{2.0{,}6}}$; 16,7 ≤ 36,1

$\Longrightarrow$ bedna se nepřeklopí

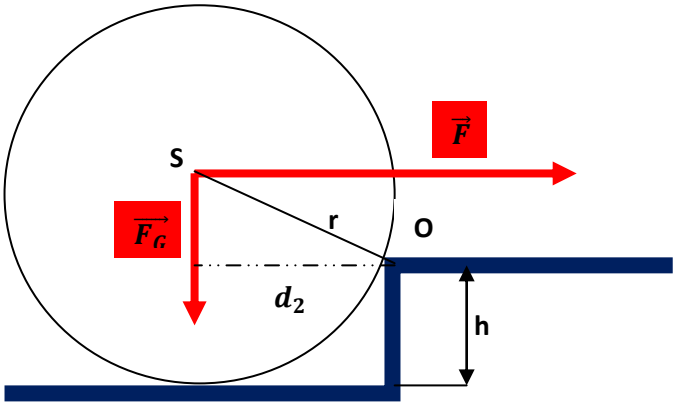
Tato část příkladu jde pěkně řešit i **užitím momentové věty**. Aby se bedna nepřeklopila, musí být moment tíhové síly větší nebo roven momentu odstředivé síly. Osa otáčení je v bodě O.

$F_G.\frac{b}{2} \geq F_S.h \quad \Longrightarrow \quad m.g.\frac{b}{2} \geq m.\frac{v_1^2}{r}.h \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{v_1 \leq \sqrt{\frac{b.r.g}{2.h}}} \quad \Longrightarrow$ bedna se nepřeklopí

11. Válec o poloměru 3,2 cm a hmotnosti 180 g je třeba „překulit“ na stupňovitou překážku o výšce 1 cm. Určete minimální sílu, kterou je třeba působit ve vodorovném směru na osu válce procházející bodem S, aby překonal stupňovitou překážku.

Řešení:

m = 180 g, r = 3,2 cm, h = 1 cm



Aby válec překonal překážku, musí být moment působící síly F vzhledem k ose O větší než moment tíhové síly FG vzhledem k téže ose. Pro minimální sílu F, kterou je třeba působit ve vodorovném směru na osu válce platí:

$F.d_1 = F_G.d_2$; $d_1 = r - h$

Pro d_2 platí podle Pythagorovy věty:

$$d_2^2 + (r-h)^2 = r^2$$

$$d_2 = \sqrt{h.(2r-h)}$$

Spojením uvedených vztahů dostáváme:

$F.d_1 = F_G.d_2 \Longrightarrow F = \frac{F_G.d_2}{d_1}$

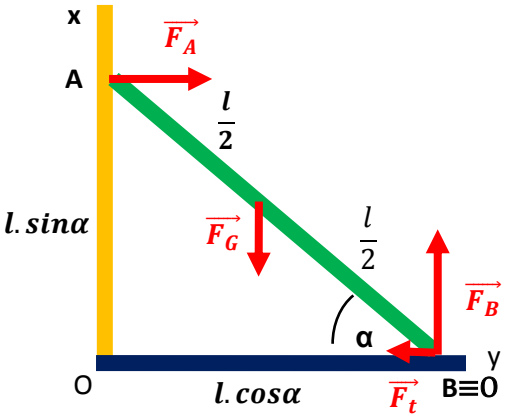
$$F = \frac{m.g\sqrt{h.(2.r-h)}}{r-h}$$

Po dosazení: $F = \frac{0{,}18.9{,}8\sqrt{0{,}01.(2.0{,}032-0{,}01)}}{0{,}032-0{,}01}$ N = 1,9 N

K překonání stupňovité překážky musí na osu válce působit ve vodorovném směru síla o velikosti F >1,9N.

12. Horní konec žebříku se opírá o hladkou svislou stěnu, dolní o vodorovnou drsnou podlahu. Při jakém minimálním úhlu α mezi žebříkem a podlahou žebřík ještě nesklouzne? Součinitel tření mezi žebříkem a podložkou je 0,5, těžiště žebříku je v jeho středu.

Řešení:



Pro rovnováhu tělesa musí být splněno:

1. Výslednice všech sil působících na tuhé těleso se musí rovnat 0 $\Longrightarrow \sum \vec{F}_i = O$

2. Vektorový součet všech momentů sil vzhledem k ose O musí být také nulový $\sum \vec{M}_i = O$

Osu otáčení můžeme zvolit např. v bodu B

Na obrázku jsou znázorněny síly:

F_A...reakce svislé stěny

F_B...reakce podložky

F_t...třecí síla

F_G...tíhová síla

Podle momentové věty platí: $\sum \vec{M}_i = 0$

$F_A \,.\, |AO| = F_G . \frac{1}{2} . |BO| \Longrightarrow F_A . l . \sin\alpha = F_G . \frac{1}{2} l . \cos\alpha$

Výslednice všech sil působících na tuhé těleso se musí rovnat 0 $\Longrightarrow \sum \vec{F}_i = O$

$\Longrightarrow$ $F_A = F_t = f.F_B$ $\wedge$ $F_B = F_G = m.g$

$\Longrightarrow$ $F_A . l . \sin\alpha = F_G . \frac{1}{2} . l . \cos\alpha$ $\Longrightarrow$ $tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{G.\frac{1}{2}.l}{F_A.l} = \frac{m.g.\frac{1}{2}.l}{f.m.g.l} \Longrightarrow \mathbf{tg\alpha = \frac{1}{2.f}}$

Po dosazení: $tg\alpha = \frac{1}{2.0,5} \Longrightarrow \alpha = 45°$

Pzn. Těžší obměnu tohoto příkladu získáme tak, že na žebřík pošleme člověka s danou hmotností a budeme se ptát, kam až může vystoupit, aby žebřík ještě nepodklouzl.

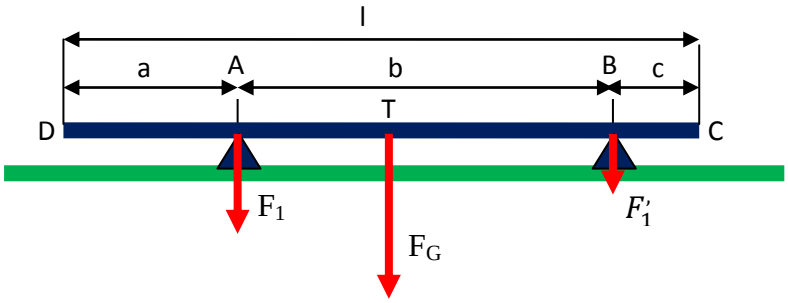
13. Homogenní obdélníková deska všude stejné tloušťky má hmotnost m = 36 kg a je podepřena v bodech A,B podle obrázku.

a) Jak velká síla F_1 působí na podpěru v bodě A a jak velká síla F_1' působí na podpěru v bodě B?

b) Jak velká síla F_2 působí na podpěru v bodě A a jak velká síla F_2' působí na podpěru v bodě B, postaví-li se do bodu C desky člověk o hmotnosti m_o = 72 kg ?

Řešení:

m = 36 kg, m_o = 72 kg, a = 1,5 m, b = 3 m, c = 0,5 m



$|AT| = \frac{a+b+c}{2} - a = \frac{b+c-a}{2}$ $\qquad$ $|BT| = \frac{a+b+c}{2} - c = \frac{a+b-c}{2}$

a) Jak velká síla F_1 působí na podpěru v bodě A a jak velká síla F_1' působí na podpěru v bodě B?

Síly F_1, F_1' dostaneme rozkladem tíhové síly na dvě souhlasně orientované síly.

Musí platit: $F_1 + F_1' = F_G \ \wedge \ F_1 . |AT| = F_1' |BT|$

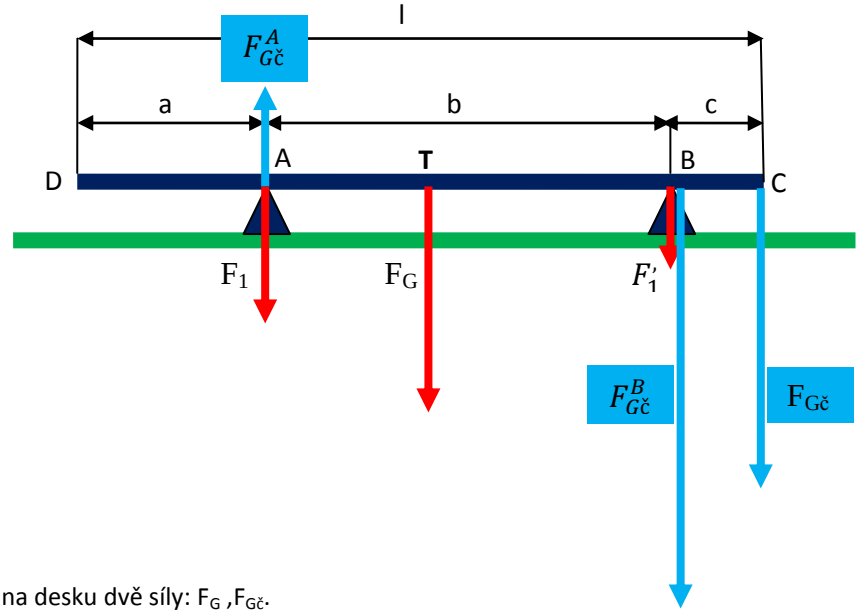
$\Longrightarrow F_1 = \frac{F_1' . |BT|}{|AT|} = \frac{(F_G - F_1).\frac{a+b-c}{2}}{\frac{b+c-a}{2}} \Longrightarrow F_1 . \frac{b+c-a}{2} = (F_G - F_1). \frac{a+b-c}{2}$

$\Longrightarrow F_1 .(\frac{b+c-a}{2} + \frac{a+b-c}{2}) = F_G . \frac{a+b-c}{2} \Longrightarrow F_1 . \frac{2b}{2} = F_G . \frac{a+b-c}{2} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{F_1 = m.g.\frac{a+b-c}{2.b}}$

Podobným postupem dostaneme i výsledek pro F_1': $\mathbf{F_1' = m.g.\frac{b+c-a}{2.b}}$

Po dosazení: $F_1 = 36.10 . \frac{1,5+3-0,5}{2.3} N = 240 N$ $\quad F_1' = 36.10 \frac{3+0,5-1,5}{2.3}$ N = 120 N

b) Jak velká síla F_2 působí na podpěru v bodě A a jak velká síla F_2' působí na podpěru v bodě B, postaví-li se do bodu C desky člověk o hmotnosti m_o = 72 kg



Nyní působí na desku dvě síly: F_G ,$F_{G\check{c}}$.

Síly F_2 a F_2' dostaneme rozkladem F_G ,$F_{G\check{c}}$ na dvě souhlasně orientované síly.

Tíhovou sílu desky jsme již rozložili v části **a)**

Pokládejme tíhovou sílu člověka za výslednici dvou nesouhlasně rovnoběžných sil $F_{G\check{c}}$ a $F_{G\check{c}}^B$. Pro skládání dvou nesouhlasně rovnoběžných sil platí:

$$F_{G\check{c}} = F_{G\check{c}}^B - F_{G\check{c}}^A \quad * \qquad \wedge \qquad F_{G\check{c}}^A . (b+c) = F_{G\check{c}}^B . c \quad **$$

Stejným postupem jako v části a) tohoto příkladu dostáváme:

Pro zjednodušení zápisu při odvozování budeme psát: $F_{G\check{c}}^A = F_A$ a $F_{G\check{c}}^B = F_B$

z * $F_B = F_{G\check{c}} + F_A$ **do** ** $F_A.b + F_A.c = F_{G\check{c}}.c + F_A.c \Longrightarrow F_A = \frac{c}{b} . F_{G\check{c}}$

z * $F_A = F_B - F_{G\check{c}}$ **do** ** $(F_B - F_{G\check{c}}). (b+c) = F_B . c \Longrightarrow F_B.b + F_B.c - F_{G\check{c}}.b - F_{G\check{c}}.c = F_B . c \Longrightarrow F_B = \frac{b+c}{b} . F_{G\check{c}}$

Pro síly působící na podpěry v bodě A a B dostáváme:

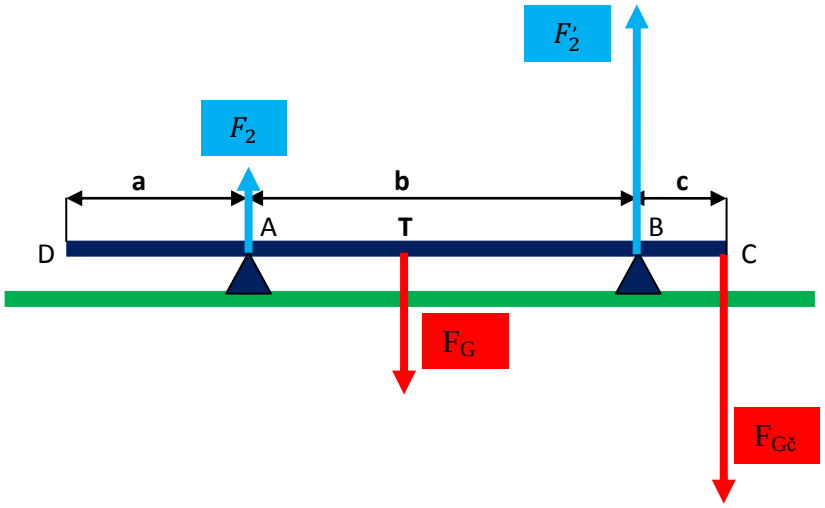
$\mathbf{F_2 = F_1 - F_A = \frac{a+b-c}{2b} . F_G - \frac{c}{b} . F_{G\check{c}}}$

$\mathbf{F_2' = F_1' + F_B = \frac{b+c-a}{2b} . F_G + \frac{b+c}{b} . F_{G\check{c}}}$

Po dosazení: $F_2 = (\frac{1,5+3-0,5}{2.3} 36.10 - \frac{0,5}{3} . 72.10)$ N = 120 N

$F_2' = (\frac{3+0,5-1,5}{2.3} 36.10 + \frac{3+0,5}{3} . 72.10)$ N = 960 N

Jiné řešení části b):



Na desku působí směrem dolů síly F_G , $F_{Gč}$. Směrem nahoru působí reakční síly F_2, F_2' opěr v bodech A,B.
Jelikož je deska v rovnováze, lze užít momentové věty k libovolnému bodu. Vzhledem k bodu B podle obrázku platí: $\frac{a+b-c}{2}.F_G = F_{Gč}.c + F_2.b \implies F_2 = \frac{a+b-c}{2b}.F_G - \frac{c}{b}.F_{Gč}$

Užitím momentové věty vzhledem k bodu A dostaneme F_2':

$$F_G.\frac{b+c-a}{2} = F_2'.b \qquad \Longrightarrow \qquad F_2' = \frac{b+c-a}{2b}.F_G + \frac{b+c}{b}.F_{Gč}$$

Pevné látky a kapaliny

1. Na území Čech (asi 50 000 km^2) spadlo průměrně 5 mm srážek. Při dešti se z kapek o průměru d = 1,0.10^{-6} m vytvořily kapky o průměru D = 2,0. 10^{-3} m. Jak velké množství energie se při tom uvolnilo? Jak se změnila teplota vody? (c_v = 4,18 kJ.$kg^{-1}.K^{-1}$)

Řešení:

d = 1,0.10^{-6} m, D = 2,0. 10^{-3} m, , S = 50 000 km^2 = 5.10^{10} m^2, h = 5. 10^{-3} m

σ = 73. 10^{-3} $N.m^{-1}$, c = 4,18 kJ.$kg^{-1}.K^{-1}$, ρ = 10^3 $kg.m^{-3}$

Uvolněná energie ΔE je rozdílem povrchové energie malých kapek a celkové povrchové energie velkých kapek:

ΔE = $E_m - E_v$

Kapky budeme považovat za koule. Povrchová energie jedné kapky je pak dána vztahem: E = σ.S,

kde S je povrch koule⇒ S = 4πr^2 = 4.π. $\left(\frac{d}{2}\right)^2 = \pi . d^2$ ⇒ E = σ.π. d^2

Nyní musíme zjistit kolik malých a kolik velkých kapek při dešti spadlo:

Celkový objem srážek je dán vzorcem: V = S.h

Objem jedné kapky je: V = $\frac{4}{3}.\pi.r^3 = \frac{4}{3}.\pi.\left(\frac{d}{2}\right)^3 = \frac{\pi.d^3}{6}$ ⇒ pro malou kapku: $V_m = \frac{\pi.d^3}{6}$

pro velkou kapku: $V_v = \frac{\pi.D^3}{6}$

počet malých kapek: $n_m = \frac{V}{V_m} = \frac{S.h}{\frac{\pi.d^3}{6}} = \frac{6.S.h}{\pi.d^3}$ počet velkých kapek: $n_v = \frac{V}{V_v} = \frac{S.h}{\frac{\pi.D^3}{6}} = \frac{6.S.h}{\pi.D^3}$

Celková povrchová energie malých kapek: $E_m = n_m.E = \frac{6.S.h}{\pi.d^3}.\ \sigma\pi d^2 = \frac{6.S.h}{d}.\sigma$

Celková povrchová energie velkých kapek: $E_v = n_v.E = \frac{6.S.h}{\pi.D^3}.\ \sigma\pi d^2 = \frac{6.S.h}{D}.\sigma$

⇒ ΔE = $E_m - E_v = \frac{6.S.h}{d}.\sigma - \frac{6.S.h}{D}.\sigma$ ⇒ $\mathbf{\Delta E = 6.S.h.\sigma.\left(\frac{1}{d} - \frac{1}{D}\right)}$

Po dosazení: $\Delta E = 6.5.10^{10}.5.10^{-3}.73.10^{-3}.\left(\frac{1}{1{,}0.10^{-6}} - \frac{1}{2{,}0.10^{-3}}\right) J = 1{,}1.10^{14}\ J$

Změnu teploty určíme ze vztahu : ΔE = c.m. Δt = c.m. ΔT ⇒ Δt = ΔT = $\frac{\Delta E}{c.m}$

M je hmotnost spadlé vody: m = ρ.V = ρ.S.h

⇒ $\mathbf{\Delta t = \Delta T = \frac{\Delta E}{c.\rho.S.h}}$

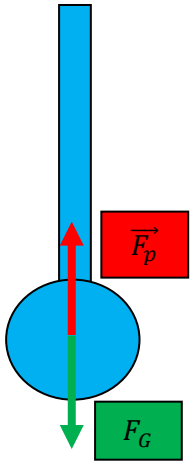
do tohoto vztahu již pro jednoduchost dosadíme vypočítanou hodnotu ΔE

⇒ po dosazení Δt = ΔT = $\frac{1{,}1.10^{14}}{4{,}18.10^3.10^3.5.10^{10}.5.10^{-3}}\ K = 0{,}1\ K$

2. Voda odkapává z kapiláry o poloměru 0,9 mm. Kolik kapek vody je v 1 ml vody?

Řešení:

r = 9. 10^{-4} m, $V = 10^{-3}$ $l = 10^{-3}$ dm^3 =10^{-6} m^3, σ = 73. 10^{-3} $N.m^{-1}$, ρ = 10^3 $kg.m^{-3}$



Kapka z kapiláry ukápne tehdy, bude-li velikost tíhové síly působící na kapku stejně velká jako velikost povrchové síly, kterou působí voda na okraj kapiláry ⇒ $F_G = F_p$

⇒ m.g = σ.l ⇒ m.g = σ.2.π.r

Odtud hmotnost jedné kapky: $m = \frac{\sigma.2.\pi.r}{g}$

Objem jedné kapky: $V_1 = \frac{m}{\rho} = \frac{\sigma.2.\pi.r}{g.\rho}$

Počet kapek v daném objemu: $n = \frac{V}{V_1} = \frac{V g.\rho}{\sigma.2.\pi.r}$

Po dosazení: $n = \frac{10^{-3}.10.10^3}{73.10^{-3}.2.3,14.9.10^{-4}} = 24$

3. Určete práci, kterou musíme vykonat při nafouknutí mydlinové bubliny o průměru 1 dm. Pro mýdlový roztok je σ = 40. 10^{-3} $N.m^{-1}$. Jaký tlak má vzduch uvnitř bubliny?

Řešení:

d = 1 dm = 10^{-1} m, σ = 40. 10^{-3} $N.m^{-1}$, $p_a = 101325$ Pa

Pro naši práci použijeme vztah , který známe z ideálního plynu: W = p . ΔV

V našem případě platí: $p = p_k = \frac{4.\sigma}{r} = \frac{4.\sigma}{\frac{d}{2}} = \frac{8.\sigma}{d}$

$\Delta V = V = \frac{4}{3}.\pi.r^3 = \frac{4}{3}.\pi.\left(\frac{d}{2}\right)^3 = \frac{\pi.d^3}{6}$

⇒ W = p . ΔV = $\frac{8.\sigma}{d}\frac{\pi.d^3}{6} = \frac{4.\sigma.\pi.d^2}{3}$

Po dosazení: $W = \frac{4.40.10^{-3}.3,14.10^{-2}}{3}$ J = 3,3.10^{-3} J = 3,3 mJ

Jaký tlak má vzduch uvnitř bubliny?

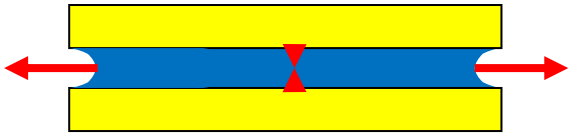
p = $p_a + p_k = p_a + \frac{8.\sigma}{d}$

Po dosazení: p = ($101325 + \frac{8.40.10^{-3}}{10^{-1}}$) Pa = 101328,2 Pa

4. Mezi dvěma vodorovnými čtvercovými destičkami je vrstvička vody o tloušťce d = 0,3 mm. Jakou silou musíme kolmo na destičky působit, abychom je odtrhli? Délka stran je a = 10 cm, povrchové napětí na rozhraní skla a vody σ = 73. 10^{-3} $N.m^{-1}$. Předpokládejte, že voda sklo dokonale smáčí.

Řešení:

d = 0,3 mm = 3.10^{-3} m, a = 10 cm = 10^{-1} m, σ = 73. 10^{-3} $N.m^{-1}$



Voda sklo smáčí. Na vodu působí síly povrchového napětí směrem od středu ⇒ mezi destičkami je o Δp = $\frac{2.\sigma}{d}$ menší tlak než atmosférický.
Tím jsou k sobě destičky přitlačovány silou:

F = Δp.S , kde S = a^2

⇒ Abychom od sebe destičky odtrhli, musíme působit silou: **F = Δp.S = $\frac{2.\sigma}{d}.a^2$**

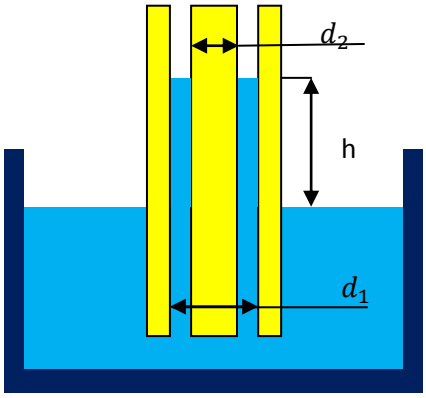
Po dosazení: F = $\frac{2.73.10^{-3}}{3.10^{-3}} 10^{-2}\ N = 4{,}8\ N$

⇒ Nejjednodušší by bylo ponořit destičky do vody.

5. Do skleněné kapiláry o vnitřním průměru 2 mm je souose zasazena tyčinka o průměru 1,5 mm. Určete, do jaké výšky vystoupí voda v mezeře mezi tyčinkou a kapilárou vzhledem k hladině vody v nádobě.

Řešení:

d_1 = 2 mm = 2.10^{-3} m, d_2 = 1,5 mm = 1,5.10^{-3} m, σ = 73. 10^{-3} $N.m^{-1}$, ρ = 10^3 $kg.m^{-3}$



Velikost tíhové síly působící na kapalinu v prostoru mezi kapilárou a tyčinkou je:

F_G = m.g = = V.ρ.g = S.h. ρ.g = π.$\frac{d_1^2-d_2^2}{4}$.h. ρ.g

Velikost povrchové síly je:

F = σ.l_1 + σ.l_2 = σ.π. d_1 + σ.π. d_2 = σ.π.(d_1 + d_2)

Z rovnováhy tíhové a povrchové síly platí:

$F_G = F \Rightarrow$ π.$\frac{d_1^2-d_2^2}{4}$.h. ρ.g = σ.π.(d_1 + d_2) ⇒ h = $\frac{\sigma.\pi(d_1+d_2)}{\pi.\frac{d_1^2-d_2^2}{4}.h.\rho.g}$ ⇒ **h = $\frac{4.\sigma}{\rho.g}.\frac{1}{d_1-d_2}$**

Po dosazení:

h = $\frac{4.73.10^{-3}}{10^3.10}.\frac{1}{2.10^{-3}-1{,}5.10^{-3}}\ m = 58{,}4.10^{-3}\ m = 58{,}4\ mm$

6. Teploměr vyrobený ze skla o teplotním součiniteli délkové roztažnosti α = 8,8.10^{-6} K^{-1} má stupnici od 0 °C do 100 °C dlouhou 19 mm. Jeho nádobka se rtutí má objem 90 mm^3. Určete průřez jeho kapiláry.

Řešení:

α_{sk} = 8,8.10^{-6} K^{-1}, t_1 = 0 °C t_2 = 100 °C , l = 19 mm = 19. 10^{-3} m, V = 90 mm^3 = 9. 10^{-8} m^3, β_{Hg} = 182.10^{-6} K^{-1}

Při zvýšení teploty z 0 °C na 100 °C se zaplní celý objem kapiláry, což odpovídá změně objemu rtuti, ale zároveň i skla, ze kterého je kapilára:

⇒ ΔV = S.l = V.β_{Hg}.Δt – V.β_{sk}.Δt ; přibližně platí, že β_{sk} = 3.α_{sk}

⇒ S = $\frac{V.\beta_{Hg}.\Delta t - V.3.\alpha_{sk}.\Delta t}{l}$ = $\frac{V.\Delta t}{l}.(\beta_{Hg} - 3.\alpha_{sk})$

Kapilára má kruhový průřez: S = $\frac{\pi.d^2}{4}$ ⇒ d = $\sqrt{\frac{4.S}{\pi}}$ ⇒ **d = $\sqrt{\frac{4.V.\Delta t}{\pi.l}.(\beta_{Hg} - 3.\alpha_{sk})}$**

Po dosazení: $d = \sqrt{\frac{4.9.10^{-8}100}{3,14.19.10^{-3}}.(182.10^{-6} - 3.8,8.10^{-6})}$ m = $97.10^{-6}\ m = 97\ \mu m$

Pzn: Bazénový teploměr na obrázku je plastový a teploměrnou kapalinou je líh. Oba teploměry nemají kalibraci do 100 °C. Demonstrují pouze podstatu kapalinového teploměru.

7. Cisternový vagón je až po okraj naplněný naftou (ρ = 940 kg.m^{-3}, $\beta = 10^{-3}\ K^{-1}$). Při teplotě 0 °C se do vagónu vejde 50 t nafty. Kolik nafty vyteče otvorem z vagónu, jestliže se po cestě zvýší teplota nafty na 20 °C?

Řešení:

$\rho_0 = 940$ kg.m^{-3}, $\beta = 10^{-3}\ K^{-1}$, $m_0 = 50$ t = $5.10^4\ kg$, Δt = 20 °C ⇒ ΔT = 20 K

Celkový objem nafty po zahřátí:

V = V_0 (1 + β. ΔT); kde V_0 je počáteční objem nafty ve vagóně, pro který platí:

$$V_0 = \frac{m_0}{\rho_0}$$

Objem nafty, která z vagónu vyteče:

ΔV = V - V_0 = V_0 . β. ΔT ⇒ ΔV = $\frac{m_0}{\rho_0}$. β. ΔT

Po dosazení: ΔV = $\frac{5.10^4}{940}.10^{-3}.20\ m^3$ = 1,064 m^3 = 1064 dm^3 = 1064 l

8. Určete práci, kterou je třeba vykonat, aby se ocelová tyč (E = 220 GPa) délky 2 m, průřezu 1 cm^2 prodloužila při pružné deformaci v tahu o 4 mm.

Řešení:

E = 220 GPa = $22.10^{10}\ Pa$, $l_0 = 2\ m$, $S = 1\ cm^2 = 10^{-4}\ m^2$, Δl = 4 mm = $4.10^{-3}\ m$

Pro velikost vykonané práce platí: W = F. Δl

Pro pružnou deformaci platí Hookův zákon: σ = E.ε ε = $\frac{\Delta l}{l_0}$ σ = $\frac{F}{S}$

⇒ $\frac{F}{S}$ = E. $\frac{\Delta l}{l_0}$ ⇒ F = E.S. $\frac{\Delta l}{l_0}$

Pro vykonanou práci platí: W = F. Δl = E.S. $\frac{\Delta l}{l_0}$. Δl ⇒ W = E.S. $\frac{(\Delta l)^2}{l_0}$

Po dosazení: W = $22.10^{10}.10^{-4}.\frac{(4.10^{-3})^2}{2}\ J$ = 176 J

9. Při zatěžování desetimetrového drátu o průměru 1 mm bylo zjištěno, že působením závaží o hmotnosti 10 kg se prodlouží o 8 mm. Určete modul pružnosti v tahu kovu, ze kterého je drát vyroben.

Řešení:

l_0 = 10 m, d = 1 mm = $10^{-3}\ m$, m = 10 kg, Δl = 8 mm = $8.10^{-3}\ m$

Budeme-li předpokládat pružnou deformaci v tahu, můžeme použít Hookův zákon:

σ = E.ε ⇒ E = $\frac{\sigma}{\varepsilon}$; ε = $\frac{\Delta l}{l_0}$; σ = $\frac{F}{S}$

⇒ E = $\frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{\frac{4.m.g}{\pi.d^2}}{\frac{\Delta l}{l_0}} = \frac{4.m.g.l_0}{\pi.d^2.\Delta l}$, kde g = 9,8 m.$s^{-2}$

Po dosazení:

$$E = \frac{4.10.9{,}8.10}{3{,}14.10^{-6}.8.10^{-3}}\ Pa = 1{,}6.\ 10^{11}\ Pa = 160\ GPa$$

10 Na ocelovém laně o průřezu 50 mm^2 je do moře spuštěna olovnice do hloubky 1,2 km. Olověné závaží na konci lana má hmotnost 50 kg. Stanovte prodloužení lana.

Řešení:

S = 50 $mm^2 = 5.10^{-5}\ m^2$, l = 1,2 km = $1{,}2.10^3\ m$, $m = 50\ kg$, $\rho = 1025\ kg.m^{-3}$, $\rho_{Pb} = 11{,}34.10^3\ kg.m^{-3}$, $\rho_{oc} = 7{,}86.10^3\ kg.m^{-3}$, E = $1{,}962.10^{11}\ Pa$; hodnoty najdete v tabulkách!

a) Prodloužení lana je způsobeno jednak tažnou silou, kterou působí na lano olověné závaží, jednak vlastní tíhou lana.

Na olověné závaží působí tíhová síla F_G , pro jejíž velikost platí:

$$F_G = m.g$$

Ale závaží je v mořské vodě nadlehčováno vztlakovou silou, která má podle Archimédova zákona velikost:

$F_{vz} = V_Z.\rho.g = \frac{m}{\rho_{Pb}}.\rho.g$; V_Z je objem závaží (je ponořené celé)

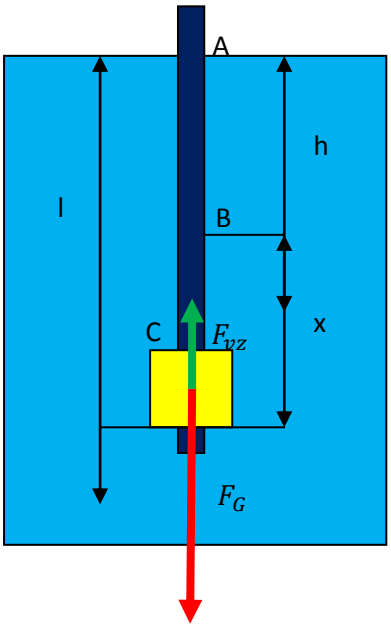
$\Longrightarrow$ Olověné závaží působí na lano tažnou silou:

$$F = F_G - F_{vz} = m.g - \frac{m}{\rho_{Pb}}.\rho.g = m.g.(1 - \frac{\rho}{\rho_{Pb}})$$

Podle Hookova zákona platí:

$\sigma = E.\varepsilon \Longrightarrow E = \frac{\sigma}{\varepsilon}$ $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$ $\sigma = \frac{F}{S}$, S je průřez lana

$$\Longrightarrow \frac{F}{S} = E.\frac{\Delta l}{l} \Longrightarrow \Delta l_Z = \frac{F.l}{S.E} = m.g.(1 - \frac{\rho}{\rho_{Pb}})\frac{l}{S.E} = \frac{m.g.l}{S.E}.(1 - \frac{\rho}{\rho_{Pb}})$$



Ale co lano?

V místě A má na prodloužení lana vliv celá tíhová síla působící na lano:

$\Longrightarrow F_{Gl} = m_l.g = V_l.\rho_{oc}.g = S.l.\rho_{oc}.g$

Podle Archimédova zákona je i lano nadlehčováno silou:

$F_{vz} = V_l.\rho.g = S.l.\rho.g$

$\Longrightarrow$ v bodě A působí na lano tažná síla:

$F_A = F_{Gl} - F_{vz} = S.l.\rho_{oc}.g - S.l.\rho.g \Longrightarrow F_A = \mathrm{S.l.g.}(\rho_{oc} - \rho)$

V místě B, které se nachází v hloubce **h** pod povrchem vody, má na prodloužení lana vliv jen část lana pod ním, která má délku: **x = l – h**

$\Longrightarrow$ ubývá tažné síly, kterou působí prodloužení lana jeho vlastní tíha.

$\Longrightarrow F_B = \mathrm{S.x.g.}(\rho_{oc} - \rho)$

V místě C už platí, že: $F_C = 0$

Celkové prodloužení lana, které je způsobeno jeho vlastní tíhou, můžeme přibližně vypočítat aritmetickým průměrem, protože tažná síla je lineární funkcí x.

$$\Longrightarrow F_L = \frac{F_A + F_C}{2} = \frac{1}{2}.\mathrm{S.l.g.}(\rho_{oc} - \rho)$$

$$\Delta l_L = \frac{F_L.l_0}{S.E} = \frac{F_L.l_0}{S.E}.\frac{1}{2}.\mathrm{S.l.g.}(\rho_{oc} - \rho) = \frac{l^2.g}{2.E}(\rho_{oc} - \rho)$$

Celkové prodloužení lana Δl:

$$\Delta l = \Delta l_Z + \Delta l_L = \frac{m.g.l}{S.E}.(1 - \frac{\rho}{\rho_{Pb}}) + \frac{l^2.g}{2.E}(\rho_{oc} - \rho)$$

Po dosazení:

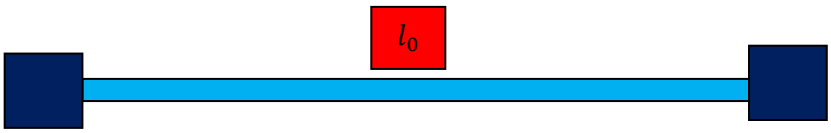
$\Delta l = \left[\frac{50.9,8.1,2.10^3}{5.10^{-5}1,962.10^{11}}.\left(1 - \frac{1025}{11,34.10^3}\right) + \frac{(1,2.10^3)^2.9,8}{2.1,962.10^{11}}(7,86.10^3 - 1,025.10^3)\right]$ m = 0,3 m

11. Ocelový drát o teplotě 830 °C má délku 130 cm a průměr 1,1 mm. Je upnut mezi dva pevné svěráky. Jakou silou drží čelisti svěráku upnutý drát po jeho ochlazení na 20 °C ?

Řešení:

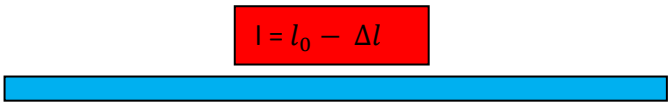
$t_1 = 830$ °C, $t_2 = 20$ °C⟹ Δt = 810 °C , l_0 = 130 cm = 1,3 m, d = 1,1 mm = $1,1.10^{-3}$ m, α = 11.10^{-6} K^{-1}, E = 220.10^9 Pa

$t_1 = 830$ °C:



Pokud by byl drát neupnutý, zkrátil by se o délku: $\Delta l = l_0.\alpha.\Delta t$, kde α je teplotní součinitel délkové roztažnosti pro ocel; α = 11.10^{-6} K^{-1}

$t_2 = 20$ °C:



Ale drát je upnutý a nemůže se zkrátit. Na čelisti působí síla F, která by drát o tuto délku protáhla.

Předpokládáme, že se jedná o pružnou deformaci ⟹ platí Hookův zákon ve tvaru:

$\sigma = E.\varepsilon = E.\frac{\Delta l}{l_0}$,

kde σ je normálové napětí, které je dáno vztahem $\sigma = \frac{F}{S}$, E je Youngův modul pružnosti pro ocel- z tabulek E = 220.10^9 Pa

⟹ $\frac{F}{S} = E.\frac{\Delta l}{l_0} \Rightarrow F = \frac{\Delta l}{l_0}.E.S = \frac{\Delta l}{l_0}.E.\frac{\pi.d^2}{4} = \frac{l_0.\alpha.\Delta t}{l_0}.E.\frac{\pi.d^2}{4} = \alpha.\Delta t.E.\frac{\pi.d^2}{4}$

⟹ **$F = \alpha.\Delta t.E.\frac{\pi.d^2}{4}$**

Po dosazení: $F = 11.10^{-6}.810.220.10^9.\frac{3,14.1,1^2.10^{-6}}{4}$ N = 1 862 N

Pzn: Někdy se vyboulené stěny starých budov zpevňují stažením ocelovou tyčí, která vede skrz zdi a zvenku je na obou stranách zakončena čtvercovými deskami, za kterými jsou matky. Opraváři tyč zahřejí a pak matky utáhnou. Když tyč chládne, smršťuje se, vzniká v ní mechanické napětí, které stahuje stěny k sobě.

12. Jízdní řád udává vzájemnou vzdálenost stanic Hradec Králové – Praha (Hlavní nádraží) 116 km. Kolejnice jsou kladeny tak, že při teplotě 25 °C se přesně dotýkají. Teplotní součinitel pro materiál kolejnic má hodnotu α = $1,2.10^{-5}$ K^{-1}.

a) Jaká je šířka jedné mezery mezi kolejnicemi při teplotě -25 °C, je-li délka jedné kolejnice 15 m? Stanovte, jaká část mezi stanicemi připadá na dilatační mezery při této teplotě.

b) V létě se kolejnice zahřejí na teplotu 45 °C. Zjistěte, zda se v důsledku tlakových sil neporuší, je-li mez pevnosti v tahu pro ocel $3,3.10^8$ Pa až $8,0.10^8$ Pa. Modul pružnosti při deformaci tahem pro ocel má hodnotu E = 220.10^9 Pa.

Řešení:

α = 1,2. K^{-1}, **E =** 220.10^9 **Pa,** $3,3.10^8\ Pa < \sigma_p$ **< 8,0.**10^8 **Pa**

a) $t_1 = 25\ °C, t_2 = -25\ °C$ **⟹ Δt = 50 °C, l = 15 m, s = 116 km =** $116.10^3\ m$

Šířka dilatační mezery: **Δl = l. α. Δt**

Po dosazení : Δl = 15. 1,2.10^{-5}. 50 m = 900. 10^{-5} m = 9. 10^{-3} m = 9 mm

Na uvedené trati s = $116.10^3\ m$ je celkem položeno **n =** $\frac{s}{l}$ kolejnic, kde l = 15m.

Ale pozor! Počet mezer je dán výrazem **n-1** !

Celková délka všech mezer (označíme s_m) :

⟹ s_m **= (n-1). Δl = (** $\frac{s}{l}$ **- 1). l. α. Δt**

Po dosazení: s_m = = ($\frac{116.10^3}{15}$ - 1). 15. 1,2.10^{-5}. 50 m = 69,6 m

b) $t_1 = 25\ °C, t_2 = 45\ °C$ **⟹ Δt = 20 °C, α = 1,2.**10^{-5} K^{-1}, **E =** 220.10^9 **Pa,**
$3,3.10^8\ Pa < \sigma_p$ **< 8,0.**10^8 **Pa**

V létě dochází k rozepnutí kolejnice ⟹ v důsledku tohoto jevu vzniká v materiálu tlakové pnutí, jehož velikost můžeme vyjádřit normálovým napětím **σ**:

Podle Hookova zákona platí:

σ = E.ε = E. $\frac{\Delta l}{l}$ = E. $\frac{l.\alpha.\Delta t}{l}$ ⟹ **σ =** E**. α. Δt**

Po dosazení: σ = 220.10^9. 1,2. 10^{-5}. 20 Pa = 5,28.$10^7\ Pa = 52{,}8\ MPa$

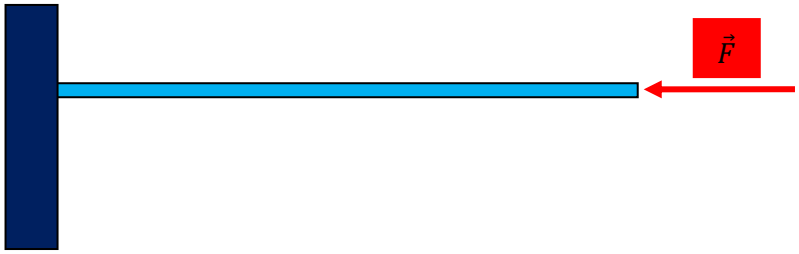
Tato hodnota je výrazně menší než mez pevnosti oceli ($3,3.10^8\ Pa < \sigma_p$ < 8,0.10^8 Pa)

Kolejnice se tedy neporuší. Ale víme, že při vysokých letních teplotách musí vlaky jezdit pomaleji! S případným zpožděním se musíme „vyrovnat“! ☺

13. Ocelová tyč je na jednom konci upevněná. Jak se změní její teplota, jestliže na volném konci vyvoláme silovým působením tlak 10 MPa?

Řešení:

α = 1,2.10^{-5} K^{-1}, **E =** 220.10^9 **Pa, p = σ =** $10^7\ Pa$



Tyč se působením tlakové síly zkrátí o délku Δl. Podle Hookova zákona platí:

$$\sigma = E.\varepsilon \quad \Longrightarrow \quad \sigma = E.\frac{\Delta l}{l_0} \quad \Longrightarrow \quad \Delta l = \frac{\sigma . l_0}{E}$$

Tomuto zkrácení odpovídá podle vztahu pro délkovou roztažnost změna teploty
Δt = ΔT, která je dána rovnicí:

$$\Delta l = l_0 . \alpha . \Delta T \Longrightarrow \Delta T = \frac{\Delta l}{l_0 . \alpha} = \frac{\frac{\sigma . l_0}{E}}{l_0 . \alpha} \Longrightarrow \boldsymbol{\Delta T = \Delta t = \frac{\sigma}{E . \alpha}}$$

Po dosazení: $\Delta T = \frac{10^7}{220.10^9 . 1{,}2.10^{-5}}\ K = 0{,}00378.10^3\ K = 3{,}8\ K \Longrightarrow \Delta t = 3{,}8\ °C$

Teplota tyče se zvýší nebo sníží? Vlivem deformace tlakem se částice dostanou blíže k sobě, budou se rychleji pohybovat ⟹ Ocelová tyč se zahřeje asi o 3,8 °C.

Ideální plyn

1. Ideální plyn o hmotnosti $7{,}6.10^{-2}$ kg je uzavřený v nádobě o objemu 10 litrů a má tlak 0,98 MPa. Určete střední kvadratickou rychlost molekul plynu.

Řešení:

m = $7{,}6.10^{-2}$ kg, V = 10 l = 10.10^{-3} m^3 = 10^{-2} m^3, p = 0,98 MPa = $0{,}98.10^6$ Pa

Ze základní rovnice pro tlak plynu, kterou najdeme v tabulkách:

$$p = \frac{1}{3}.\frac{N}{V}.m_o.v_k^2 = \frac{1}{3}.\frac{m}{V}.v_k^2 = \frac{1}{3}.\rho.v_k^2 \; *$$

celková hmotnost plynu: $m = N.m_0$

hustota plynu: $\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow v_k^2 = \frac{3p}{\frac{m}{V}} \Rightarrow \boldsymbol{v_k = \sqrt{\frac{3.p.V}{m}}}$

Po dosazení: $v_k = \sqrt{\frac{3.0{,}98.10^6.10^{-2}}{7{,}6.10^{-2}}}$ m.s^{-1} = 622 m.s^{-1}

Poznámka: Vztah * je zajímavý. Něco podobného jsme viděli již u Bernoulliho rovnice. Tam platí, že:

$p + \frac{1}{2}.\rho.v^2 =$ konstanta.

Slovně vyjádřeno: součet tlakové energie a kinetické energie jednotkového objemu proudící kapaliny je veličina stálá. Jde v podstatě o ZZE pro proudící kapalinu.

U ideálního plynu si základní rovnici pro tlak plnu musíme pamatovat zpaměti, nebo si ji najít v tabulkách. Ale odvozený vztah má krásnou logiku. I zde jako by platil ZZE. Co nastává po nárazu molekuly na stěnu nádob? Tlaková energie = kinetické energii. Jedná se o zjednodušení, ale vztah je lehce zapamatovatelný.

Pro zajímavost provedeme rozměrovou kontrolu:

$$[v_k] = \sqrt{\frac{Pa.m^3}{kg}}\sqrt{\frac{N.m^{-2}.m^3}{kg}} = \sqrt{\frac{kg.m.s^{-2}.m^{-2}.m^3}{kg}} = \sqrt{\frac{kg.s^{-2}.m^2}{kg}} = \text{m.s}^{-1}$$

2. Určete změnu vnitřní energie ideálního plynu s jednoatomovými molekulami, jestliže se jeho teplota zvýší z 400 K na 600 K.

Řešení:

T_1 = 400 K, T_2 = 600 K, N = 10^{28}, k = $1{,}38.10^{-23}$ J.K^{-1}

Pro ideální plyn platí, že kinetická energie jedné molekuly záleží pouze na termodynamické teplotě. Tento vztah se v historii nazýval „ ekvipartičním teorémem“:

$E_{ko} = \frac{3}{2}.k.T$, T je termodynamická teplota v Kelvinech, k- Boltzmanova konstanta

k = $1{,}38.10^{-23}$ J.K^{-1}

$\Rightarrow$ $\boldsymbol{\Delta U = \Delta E_k \Rightarrow \Delta U = N.\frac{3}{2}k.T_2 - N.\frac{3}{2}k.T_1 = \frac{3}{2}.N.k.(T_2 - T_1)}$

Po dosazení: $\Delta U = \frac{3}{2}.10^{28}.1{,}38.10^{-23}.(600 - 400)$ J = $41{,}4.10^6$ J = 41,4 MJ

3. Jaký tlak má vzduch v pneumatice nákladního auta při teplotě 20 °C a hustotě 8 kg.m^{-3} ?

Řešení:

T = 20 °C $\Longrightarrow$ T = 293,15 K, ρ = 8 kg.m^{-3}

Podle stavové rovnice platí: p.V = n.R.T , kde n je látkové množství $n = \frac{m}{M_m}$,

R je univerzální plynová konstanta R = 8,314 J.K^{-1}.mol^{-1}

$\Longrightarrow$ $p.V = \frac{m}{M_m}.R.T$

Jak určíme molární hmotnost M_m pro vzduch?

Víme, že vzduch se asi skládá ze 75 % dusíku N_2 a 25 % kyslíku O_2

Pro dva chemicky nereagující plyny lze určit tzv. **efektivní molární hmotnost** užitím vztahu:

$$\frac{m}{M_m} = \frac{m_1}{M_{m1}} + \frac{m_2}{M_{m2}} = \frac{0{,}75m}{M_{m1}} + \frac{0{,}25m}{M_{m2}} = \frac{0{,}75m}{28.10^{-3}} + \frac{0{,}25m}{32.10^{-3}}$$

$\Longrightarrow M_m = \frac{m}{\frac{0{,}75m}{28.10^{-3}} + \frac{0{,}25m}{32.10^{-3}}}$ kg.mol^{-1} = 0,0289 kg.mol^{-1} $= 29.10^{-3}$kg.mol^{-1}

$\Longrightarrow$ Mm(vzduch) = 29.10^{-3} kg.mol^{-1}

Pro hustotu platí vztah: $\rho = \frac{m}{V}$ $\Longrightarrow$ $p = \frac{m}{V.M_m}.R.T$ $\Longrightarrow$ $\mathbf{p = \frac{\rho}{M_m}.R.T}$ *

Po dosazení: $p = \frac{8}{29.10^{-3}}.8{,}314.293{,}15$ Pa = 6,72.10^5 Pa = 0,67 MPa

Poznámka: Z * vidíme, že tlak vzduchu v pneumatice je přímo úměrný teplotě. Proto se v zimě pneumatiky „foukají“ na tlak, který je o něco vyšší než v létě. Na víčku benzínové nádrže se udává tlak v pneumatikách pro letní období. V manuálu auta pak najdete, o kolik větší by měl být tlak pro zimní období.

4. V nádobě je dusík N_2 o hmotnosti 20 kg a tlaku 20 MPa. Určete hmotnost dusíku, kterou je třeba vypustit z nádoby, aby se jeho tlak zmenšil na 5 MPa.

Řešení:

m_1 = 20 kg, p_1 = 20 MPa , p_2 = 5 MPa

Podle stavové rovnice platí: $p.V = \frac{m}{M_m}.R.T \Longrightarrow m = \frac{p.V.M_m}{R.T}$

Pokud chceme snížit tlak v nádobě, musíme část dusíku vypustit. Je jasné, že veličiny V, M_m, R ani T se nezmění

$\Longrightarrow$ na začátku byl v nádobě dusík o hmotnosti m_1: $m_1 = \frac{p_1.V.M_m}{R.T}$ *

Po vypuštění dusíku je v nádobě dusík o hmotnosti m_2: $m_2 = \frac{p_2.V.M_m}{R.T}$

$\Longrightarrow \Delta m = m_1 - m_2 = \frac{p_1.V.M_m}{R.T} - \frac{p_2.V.M_m}{R.T} = \frac{V.M_m}{R.T}.(p_1 - p_2)$

Po dosazení: $\Delta m = \frac{V.M_m}{R.T}.(p_1 - p_2)$

Neznáme ale objem nádob! Proto si z * vyjádříme výraz $\frac{V.M_m}{R.T} = \frac{m_1}{p_1}$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{\Delta m = \frac{m_1}{p_1}.(p_1 - p_2) = \frac{(p_1 - p_2)}{p_1}.m_1} \quad *$$

Po dosazení: $\Delta m = \frac{(20-5)}{20}.20$ kg = 15 kg

Poznámka: Z * vidíme, že příklad jde řešit velmi jednoduše. Výraz $\frac{(p_1-p_2)}{p_1}$ vyjadřuje (v setinách), jak se změnil tlak. Vidíme, že ten se změnil na $\frac{15}{20} = \frac{3}{4} = 0{,}75 = 75\ \%$ původního tlaku. Takže podle stavové rovnice muselo uniknout i 75 % hmotnosti dusíku.

Pzn. Při dosazování do obecného vztahu převádíme jen jednotky, které je nutno převést. V našem případě není třeba MPa převádět na Pa, protože se jednotky krátí.

Závěr: Snažte se vždy vyjadřovat počítané fyzikální veličiny obecně! Vlastní výpočet je pak elegantní a jednoduchý.

5. **V** nádobě je 10 g dusíku o teplotě 7 °C. Kolik tepla musíme dodat plynu, aby se střední kvadratická rychlost zdvojnásobila? Jaká je výsledná teplota plynu, jak se změní tlak plynu?

Řešení:

m = 10 g, t_1 = 7 °C $\Longrightarrow T_1 = 280,15\ K$

pro střední kvadratickou rychlost platí vztah: $v_k = \sqrt{\frac{3.k.T}{m_0}}$

k je Boltzmannova konstanta k = 1,38.10^{-23} J.K^{-1}

T je termodynamická teplota v Kelvinech

$v_{k2} = 2.v_{k1} \Longrightarrow \sqrt{\frac{3.k.T_2}{m_0}} = 2.\sqrt{\frac{3.k.T_1}{m_0}} \Longrightarrow T_2 = 4.T_1$ *

po dosazení: $T_2 = 4.280,15 = 1120,6\ K \Longrightarrow t_1 = 847,45$ °C

Aby se střední kvadratická rychlost zdvojnásobila, musíme dodat teplo Q_v, protože objem plynu se nemění. Podle první věty termodynamiky platí vztah:

$Q_v = c_v.m.\Delta T = c_v.m.\Delta t$ (protože objem plynu se nemění)

Jak určíme c_v - měrnou tepelnou kapacitu při konstantním objemu?

V tabulkách najdeme pro dusík tyto hodnoty:

měrnou tepelnou kapacitu při konstantním tlaku: c_p = 1,037 kJ.kg^{-1}.K^{-1}

Poissonovu konstantu: $\kappa = \frac{c_p}{c_v} = 1,404$

$\Longrightarrow c_v = \frac{c_p}{\kappa}$

$\Longrightarrow Q_v = \frac{c_p}{\kappa}.m.\Delta T = \frac{c_p}{\kappa}.m.\Delta t$ **

Po dosazení: $Q_v = \frac{1,037.10^3}{1,404}.0,01.(847,45 - 7)$ J = 6207,59 J = 6,2 kJ

Jedná se o izochorický děj, musí platit Charlesův zákon:

$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2} \Longrightarrow p_2 = \frac{T_2}{T_1}.p_1$

$\Longrightarrow$ podle * $\frac{T_2}{T_1} = 4$ $\Longrightarrow$ po dosazení: $p_2 = 4.p_1$ $\Longrightarrow$ tlak se čtyřikrát zvýší

Poznámka:

Na vysoké škole budete vztah ** hledat jinou úvahou. Dodám-li plynu teplo, zvýší se jeho vnitřní energie. **Jednoatomový plyn** je složen z N molekul, které se pohybují stejnou střední kvadratickou rychlostí. Na změně vnitřní energie plynu se nejvíce podílí kinetická energie molekul, takže můžeme psát, že:

$U = N.\frac{1}{2}m_0.v^2 = N.\frac{3}{2}k.T = n.N_A.\frac{3}{2}k.T$ $\quad U = \frac{3}{2}.n.R.T$,

Kde R je univerzální plynová konstanta:

$R = N_A.k = 6,023.10^{23}\ mol^{-1}.1,38.10^{-23}\ J.K^{-1} = 8,314\ J.K^{-1}.mol^{-1}$

Jsou-li molekuly plynu složeny z více atomů, je výpočet vnitřní energie složitější, protože závisí na počtu stupňů volnosti molekuly. **Dvouatomovým plynům** se přisuzuje pět stupňů volnosti, proto platí: $U = \frac{5}{2}.n.R.T$

$\Longrightarrow$ místo ** bychom mohli psát: $\Delta Q = \Delta U = \frac{5}{2}.n.R.\Delta T = \frac{5}{2}\frac{m}{M_r.10^{-3}}.R.\Delta T$

Po dosazení: $\Delta Q = \frac{5}{2}\frac{0,01}{.28.10^{-3}}8,314.840,45$ J = 6,2.kJ

6. **V** nádobě o objemu V_1 je kyslík O_2 o tlaku p_1 a teplotě T_1. V nádobě o objemu V_2 je dusík N_2 o tlaku p_2 a teplotě T_2. Nádoby jsou spojeny trubicí opatřenou kohoutem. Po otevření kohoutu se plyny smísí. Vypočtěte výsledný tlak a výslednou teplotu po dosažení rovnovážného stavu.

Řešení:

Hodnoty stavových veličin: pro kyslík O_2: p_1, V_1, T_1

pro dusík N_2: p_2, V_2, T_2

pro směs plynů: $p, T, V = V_1+V_2$

Spojím-li obě nádoby, platí pro děj, probíhající uvnitř soustavy, kalorimetrická rovnice:

$$\Delta U_1 = \Delta U_2;$$

podle vztahu $\Delta U = \frac{5}{2}.n.R.\Delta T$ z minulého příkladu platí:

$\frac{5}{2}.n_1.R.(T_1 - T) = \frac{5}{2}.n_2.R.(T - T_2) \Rightarrow n_1.(T_1 - T) = n_2.(T - T_2)$

Pro oba plyny platí také stavová rovnice: $p.V = n.R.T \Rightarrow n = \frac{p.V}{R.T}$

$$\Rightarrow \frac{p_1.V_1}{R.T_1}.(T_1 - T) = \frac{p_2.V_2}{R.T_2}.(T - T_2) \Rightarrow p_1.V_1 - p_1.V_1.\frac{T}{T_1} = p_2.V_2.\frac{T}{T_2} - p_2.V_2$$

$$\Rightarrow T.\left(\frac{p_1.V_1}{T_1} + \frac{p_2.V_2}{T_2}\right) = p_1.V_1 + p_2.V_2 \Rightarrow T.\frac{p_1.V_1.T_2 + p_2.V_2.T_1}{T_1.T_2} = p_1.V_1 + p_2.V_2$$

$$\Rightarrow \mathbf{T = \frac{(p_1.V_1 + p_2.V_2).T_1.T_2}{p_1.V_1.T_2 + p_2.V_2.T_1}} \quad *$$

Výsledný tlak jednotlivých plynů (parciální tlak) v objemu $V_1 + V_2$ určíme jednoduchou úvahou:

Pro kyslík O_2 platí. $\frac{p_1.V_1}{T_1} = \frac{p_1'.(V_1+V_2)}{T} \Rightarrow p_1' = \frac{p_1.V_1}{V_1+V_2}.\frac{T}{T_1}$

Pro dusík N_2 platí. $\frac{p_2.V_2}{T_2} = \frac{p_2'.(V_1+V_2)}{T} \Rightarrow p_2' = \frac{p_2.V_2}{V_1+V_2}.\frac{T}{T_2}$

Pro celkový tlak směsi platí **Daltonův zákon**:

výsledný tlak je roven součtu parciálních tlaků

$\Rightarrow p = p_1' + p_2' = \frac{p_1.V_1}{V_1+V_2}.\frac{T}{T_1} + \frac{p_2.V_2}{V_1+V_2}.\frac{T}{T_2} = \frac{T}{V_1+V_2}.\left(\frac{p_1.V_1}{T_1} + \frac{p_2.V_2}{T_2}\right)$; dosazením *

$$\Rightarrow p = \frac{\frac{(p_1.V_1+p_2.V_2).T_1.T_2}{p_1.V_1.T_2+p_2.V_2.T_1}}{V_1+V_2}\left(\frac{p_1.V_1}{T_1} + \frac{p_2.V_2}{T_2}\right) = \frac{(p_1.V_1+p_2.V_2).T_1.T_2}{p_1.V_1.T_2+p_2.V_2.T_1}.\frac{1}{V_1+V_2}\frac{p_1.V_1.T_2+p_2.V_2.T_1}{T_1.T_2} = \frac{p_1.V_1+p_2.V_2}{V_1+V_2}$$

$$\Rightarrow \mathbf{p = \frac{p_1.V_1+p_2.V_2}{V_1+V_2}}$$

7. Nádoba o objemu 10 dm^3 je naplněna acetylénem C_2H_2 při teplotě 12 °C a tlaku 0,5 MPa.

a) Jaké teplo bylo dodáno plynu, jestliže jeho teplota stoupla na 27 °C?

b) Jak se zvýšil tlak plynu?

Měrná tepelná kapacita acetylénu při konstantním objemu je $c_v = 1{,}37.10^3$ $J.kg^{-1}.K^{-1}$

Řešení:

$V = 10\ dm^3 = 10^{-2} m^3$, $t_1 = 12$ °C $\Rightarrow T_1 = 285{,}15$ K, $p_1 = 0{,}5$ MPa $= 5.10^5$ Pa, $t_2 = 27$ °C

$\Rightarrow T_2 = 300{,}15$ K, $c_v = 1{,}37.10^3$ $J.kg^{-1}.K^{-1}$

a) Při izochorickém ději se teplo, které plyn přijal, projeví zvýšením jeho teploty. Plyn práci nekoná, první věta termodynamiky má tvar:

$$Q = \Delta U = c_v.m.\Delta T = c_v.m.\Delta t$$

Hmotnost plynu zjistíme ze stavové rovnice

$$p.V = \frac{m}{M_m}.R.T \Rightarrow m = \frac{p.V.M_m}{R.T}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{Q = c_v \frac{p.V.M_m}{R.T} \Delta T = c_v \frac{p.V.M_r.10^{-3}}{R.T} \Delta T}$$

Po dosazení: $Q = 1{,}37.10^3.\frac{5.10^5.10^{-2}26{,}016.10^{-3}}{8{,}314\ .285{,}15}.15\ J = 1130$ J $= 1{,}1$ kJ

b) Pro izochorický děj musí platit Charlesův zákon:

$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2} \Rightarrow p_2 = \frac{T_2}{T_1}.p_1$

Po dosazení: $p_2 = \frac{300{,}15}{285{,}15}.5.10^5\ Pa = 5{,}263.10^5\ Pa = 0{,}53\ MPa$

8. V nádobě o podstavě 70 cm^2 a výšce 5 dm je oxid siřičitý o teplotě 77 °C, tlaku p a látkovém množství **n**. Ve stejné nádobě je kyslík o stejné teplotě a hmotnosti 32 g. Tlak oxidu siřičitého je dvakrát větší než tlak kyslíku. Kolik částic mají jednotlivé plyny?

Řešení:

1) SO_2: **S = 70** $cm^2 = 7.10^{-3}\ m^2$ **, h = 5 dm = 0,5 m, t = 77 °C, p**

2) O_2 : **S = 70** $cm^2 = 7.10^{-3}\ m^2$ **, h = 5 dm = 0,5 m, t = 77 °C,** $m = 0,032\ kg$, $\frac{p}{2}$

Pro oba plyny platí stavová rovnice: p.V = n.R.T $\Longrightarrow$ p.V = $\frac{m}{M_m}$.R.T

$\Longrightarrow$ pro SO_2: $p_1.V = n_1.R.T \Longrightarrow \frac{p_1}{n_1} = \frac{R.T}{V}$ pro O_2 : $p_2.V = n_2.R.T \Longrightarrow \frac{p_2}{n_2} = \frac{R.T}{V}$

$\Longrightarrow \frac{p_1}{n_1} = \frac{p_2}{n_2} \Longrightarrow \frac{p}{n_1} = \frac{\frac{p}{2}}{n_2} \Longrightarrow$ **$n_1 = 2.n_2$**

Pro látkové množství platí vztah n = $\frac{N}{N_A}$, kde N_A je Avogadrova konstanta a udává počet částic v jednom molu látky; $N_A = 6,023.10^{23}\ mol^{-1}$

$\Longrightarrow n_1 = 2.n_2 \Longrightarrow \frac{N_1}{N_A} = 2.\frac{N_2}{N_A} \Longrightarrow$ **$N_1 = 2.N_2$**

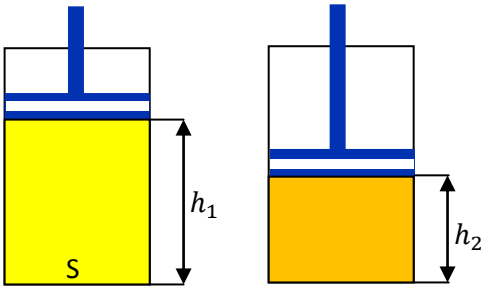
U kyslíku známe hmotnost $\Longrightarrow$umíme vypočítat i počet jeho částic:

$N_2 = n.N_A = \frac{m}{M_m}.N_A = \frac{m}{M_r 10^{-3}}.N_A$

Po dosazení: $N_2 = \frac{32.10^{-3}}{3210^{-3}}.6,023.10^{23} = 6,023.10^{23}$

$N_1 = 2.\ 6,023.10^{23} = 12,046.10^{23}$

9. V rotačním válci je uzavřený vzduch pohyblivým pístem ve vzdálenosti 50 cm od dna válce. Vzduch má tlak 10^5 Pa. Při adiabatické kompresi je píst posunut o 20cm ke dnu a tlak se zvětší na $2,05.10^5$ Pa. Určete Poissonovu konstantu.



Řešení:

h_1 = 50 cm, h_2 = 30 cm, $p_1 = 10^5$ Pa, $p_2 = 2,05.10^5$ Pa

Pro adiabatický děj platí Poissonův zákon:

$$p_1.V_1^{\kappa} = p_2.V_2^{\kappa}$$

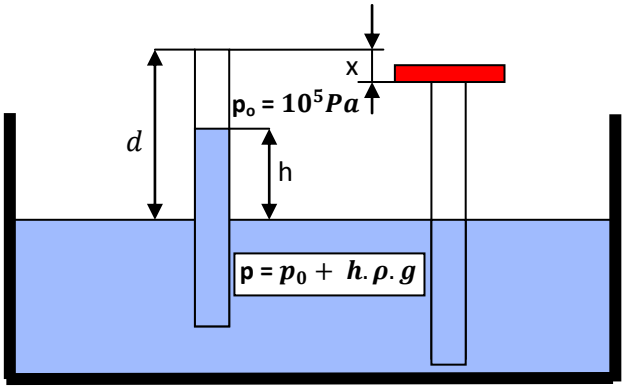
$$\Longrightarrow \frac{p_1}{p_2} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\kappa} = \left(\frac{S.h_2}{S.h_1}\right)^{\kappa} = \left(\frac{h_2}{h_1}\right)^{\kappa} \Longrightarrow \kappa = log_{\frac{h_2}{h_1}}\frac{p_1}{p_2} = \frac{log\frac{p_1}{p_2}}{log\frac{h_2}{h_1}}$$

Po dosazení: $\kappa = \frac{log\frac{10^5}{2,05.10^5}}{log\frac{30}{50}} = \frac{log0,49}{log0,6} = 1,4$

10. Voda vystoupí ve svislé kapiláře ponořené do nádoby s vodou do výšky **h**; neponořená část kapiláry má délku **d**. Volný konec kapiláry uzavřeme a kapiláru zatlačíme do vody tak hluboko, aby povrch vody v kapiláře byl ve stejné výšce jako povrch vody v nádobě. O jakou délku **x** je třeba kapiláru ponořit.

Řešení:

d = 21 cm, h = 8 cm, $p_o = 10^5\ Pa$, g = 9,8 $m.s^{-2}$



V otevřené kapiláře vystoupí voda působením kapilárních sil do výšky **h**.

1. Vzduch v kapiláře má objem $V_0 = \pi . r^2 . (d - h)$ a atmosférický tlak $p_o = 10^5\ Pa$

Tlak v kapiláře u vodní hladiny má hodnotu: $p = p_0 + h.\rho.g$

Uzavřeme-li volný konec kapiláry a ponoříme-li ji do vody podle obrázku, pak platí:

2. Vzduch v kapiláře má objem $V = \pi . r^2 . (d - x)$ a tlak má hodnotu $p = p_0 + h.\rho.g$

Neboť v obou případech musí být tlak na vodní hladinu stejný.

Předpokládáme, že se teplota vzduchu po ponoření kapiláry nezmění, tzn.platí Boylův- Mariottův zákon p.V = konstanta

$\Rightarrow$ $p_o.V_o = p.V$; po dosazení výše uvedených vztahů:

$$p_0 + h.\rho.g = p_0.\frac{V_0}{V} = p_0.\frac{\pi.r^2.(d-h)}{\pi.r^2.(d-x)} = p_0.\frac{(d-h)}{(d-x)}$$

$$\Rightarrow\ h.\rho.g = p_0.\left(\frac{d-h}{d-x} - 1\right) = p_o.\frac{d-h-d+x}{d-x} = p_o.\frac{x-h}{d-x}$$

$\Rightarrow h.\rho g.(d-x) = p_0.(x-h)$ $\Rightarrow h.\rho.g.d - h.\rho.g.x = p_o.x - p_o.h$

$\Rightarrow x.(p_o + h.\rho.g) = h.\rho.g.d + p_o.h$ $\Rightarrow$ $\mathbf{x = \frac{h.(\rho.g.d+p_o)}{p_o + h.\rho.g}}$

Po dosazení: $x = \frac{0{,}21.(1000.9{,}8.0{,}21+10^5)}{10^5 + 0{,}21.1000.9{,}8}$ m = 0,081 m = 81 cm

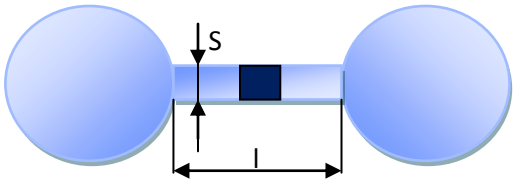
11. Dvě skleněné koule, z nichž každá má objem 1litr, jsou naplněny vzduchem a spojeny přímou skleněnou trubicí délky 1 m a průřezu 0,1 cm^2. Trubice je vzduchotěsně přepažena malou kapkou rtuti. Má-li vzduch v obou koulích stejnou teplotu, je rtuť uprostřed.

Teplota vzduchu v jedné kouli zůstává pořád stejná a má hodnotu 0 °C. Určete nejnižší a nejvyšší hodnotu teploty vzduchu v druhé kouli, při níž zůstane rtuť ještě ve spojovací trubici.

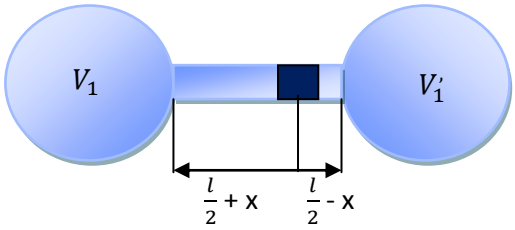
Řešení:

$V_o = 1\ l = 10^{-3}\ m^3$, $l = 1\ m$, $S = 0{,}1\ cm^2 = 10^{-5}\ m^2$, $t_o = 0\ °C \Rightarrow T = 273{,}15\ K$

1) p_0, V_0, T_0 2) p_0, V_0, T_0



1) p_1, V_1, T_1 2) p_1, V_1', T_0



Pokud je kapka rtuti přesně uprostřed, má vzduch v obou koulích stejné vlastnosti popsané fyzikálními veličinami p_0, V_0, T_0

Posune-li se kapka o vzdálenost x doprava, pak platí:

$$V_1 = V_0 + S.\left(\frac{l}{2} + x\right)$$

$$V_1' = V_0 + S.\left(\frac{l}{2} - x\right)$$

Zůstává-li v jedné kouli stejná teplota, bude stejný i tlak vzduchu v obou koulích; ale změní se na hodnotu p_1. Budeme předpokládat, že koulí, kde se nemění teplota, je ta vpravo.

Pro levou kouli platí stavová rovnice: $\frac{p_1.V_1}{T_1} = \frac{p_0.V_0}{T_0}$

Pro pravou kouli, kde zůstává stejná teplota, platí pro izotermický děj Boylův- Mariottův zákon:

$p_1.V_1' = p_0.V_0$ $\Rightarrow$ $\frac{p_1.V_1}{T_1} = \frac{p_1.V_1'}{T_0} \Rightarrow \frac{V_1}{T_1} = \frac{V_1'}{T_0} \Rightarrow T_1 = \frac{V_1}{V_1'}.T_0$

Vzduch v levé kouli bude mít nejvyšší teplotu, bude-li rtuť úplně vpravo na konci spojovací trubice (T_1 je přímo úměrné V_1). V tomto případě bude platit: $V_1 = V_0 + S.l$ $V_1' = V_0$

$$\Rightarrow \mathbf{T_1 = \frac{V_0 + S.l}{V_0}.T_0}$$

Po dosazení: $T_1 = \frac{10^{-3} + 10^{-5}.1}{10^{-3}}.273{,}15\ K = 275{,}88\ K = 2{,}73\ °C$

Vzduch v levé kouli bude mít nejnižší teplotu, bude-li rtuť úplně vlevo na konci spojovací trubice. V tomto případě bude platit: $V_1 = V_0 \quad V_1' = V_0 + S.l$

$$\Longrightarrow \quad \boldsymbol{T_1 = \frac{V_0}{V_0 + S.l} . T_0}$$

Po dosazení:

$$\Longrightarrow \quad T_1 = \frac{10^{-3}}{10^{-3} + 10^{-5}.1} . 273{,}15\ K = 270{,}45\ K = -2{,}7\ °C$$

$\Longrightarrow$ Nemá-li rtuť ze spojovací trubice vytéci, může se v levé kouli měnit teplota v intervalu $-2{,}7\ °C$ *až* $2{,}73\ °C$

12. Skleněná trubice o délce l = 1 m a průřezu $S = 2\ cm^2$ je na jednom konci otevřená, na druhém je rozšířena v kouli o objemu V = 25 l a je naplněna vzduchem. Trubice je obrácena tak, že se otevřeným koncem dotýká hladiny rtuti.

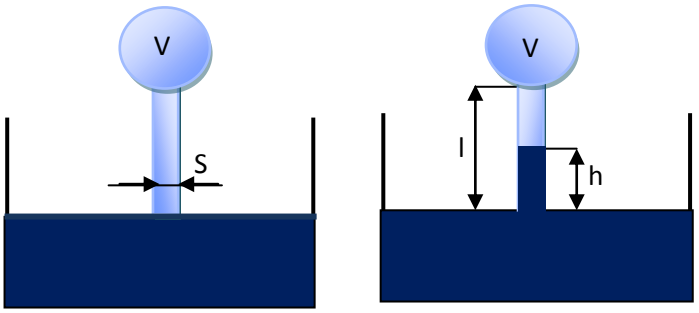
a) Určete hmotnost vzduchu, který z trubice unikne při zvýšení teploty z 0 °C na teplotu 100 °C.

b) Do jaké výšky **h** vystoupí rtuť v trubici, necháme-li opět klesnout teplotu na 0 °C?

Řešení:

l = 1 m, S = 2 cm^2 = 2. $10^{-4}\ m^2$, V = 25 l = 25. $10^{-3}\ m^3$, $\rho_0 = 1{,}293\ kg.m^{-3}$, t_o = 0 °C $\Longrightarrow$ T_o = 273,15 K, t = 100 °C $\Longrightarrow$ T = 373,15 K , $p_o = 10^5\ Pa$

a) Vzduch uzavřený v kulové nádobě a v trubici délky **l** má při teplotě **To** hustotu **ρ_o**, počáteční objem $V_o = V + S.l$ $\Longrightarrow$ hmotnost $m_o = V_o\ \rho_o = (V + S.l).\ \rho_o$ a tlak p_a



Při ohřívání se tlak vzduchu nemění, neboť otevřený konec trubice se rtuti jen dotýká a vzduch může z trubice unikat.

Platí tedy Guy- Lussacův zákon:

$$\frac{V}{T} = \frac{Vo}{To} \Longrightarrow dle\ ZZhmotnosti$$

$$\frac{\frac{m}{\rho}}{T} = \frac{\frac{m}{\rho_0}}{To} \Longrightarrow \rho.T = \rho_0.T_0$$

$$\Longrightarrow \rho = \frac{\rho_0.T_0}{T} \quad \wedge \ V_o = V + S.l$$

$\Longrightarrow$ dosadíme do vztahu pro hmotnost: $m = V_o\ .\rho = (V + S.l).\ \frac{\rho_0.T_0}{T}$

$\Longrightarrow$ $\Delta m = m_o - m = (V + S.l)\ \rho_o - (V + S.l)\ \frac{\rho_0.T_0}{T} = (V + S.l)\ .\rho_o\ .(1 - \frac{T_0}{T})$

$$\Longrightarrow \quad \boldsymbol{\Delta m = (V + S.l).\rho o\ .\frac{T - T_0}{T}}$$

Po dosazení: $\Delta m = (25.10^{-3} + 2.10^{-4}.1).1{,}293.\ \frac{373{,}15 - 273{,}15}{373{,}15}\ kg = 8{,}736.10^{-3}\ kg$

b) Do jaké výšky **h** vystoupí rtuť v trubici, necháme-li opět klesnout teplotu na 0 °C?

Z nádoby už unikla při zvýšení teploty z 0 °C na teplotu 100°C hmotnost vzduchu **Δm**

$\Longrightarrow$ při zpětném ochlazení na teplotu 0 °C vnikne do trubice rtuť do výšky **h**. Objem nádoby se zmenší na hodnotu $V_o - S.h$, tlak v nádobě poklesne o hodnotu odpovídající výšce **h** rtuťového sloupce.

Na začátku děje, tzn. při zvýšené teplotě t = 100 °C $\Longrightarrow$T = 373,15 K

Je stav soustavy popsán fyzikálními veličinami:

Tlak: p = p_o , T, Vo = V + S.l

Po opětovném snížení teploty na teplotu $t_0 = 0$ °C $\Longrightarrow$ To = 273,15 K
je stav soustavy popsán fyzikálními veličinami:
Tlak: $p = p_0 - h.\rho.g$, kde ρ = 13546 kg.m^{-3} je hustota rtuti , To , $V = Vo - S.h = (V + S.l) - S.h$
Podle stavové rovnice platí: $\frac{p.V}{T} = konstanta$
$\Longrightarrow \frac{p_0.V_0}{T} = \frac{(p_0 - h.\rho.g).(V_0 - S.h)}{T_0}$; neznámou veličinou je v této rovnici výška rtuti h

$$p_0.V_0.T_0 = T.(p_0 - h.\rho.g).(V_0 - S.h)$$
$$\Longrightarrow \; p_0.V_0.T_0 = T.p_0.V_0 - T.p_0.S.h - T.V_0.h.\rho.g + T.S.\rho.g.h^2$$

$$\boldsymbol{T.S.\rho.g.h^2 - (T.V_0.\rho.g + T.p_0.S).h + T.p_0.V_0 - p_0.V_0.T_0 = 0}$$

$\Longrightarrow$ Hodnotu **h** získáme řešením kvadratické rovnice; v tomto případě (pro lepší přehlednost) raději dosadíme číselné hodnoty ostatních fyzikálních veličin. Řešení bude přehlednější! Ti šikovnější zjistí obecným řešením, že je výpočet opravdu hodně nepřehledný.

$$V_0 = V + S.l = (25.10^{-3} + 2.10^{-4}.1)\,m^3 = 252.10^{-4}\,m^3$$

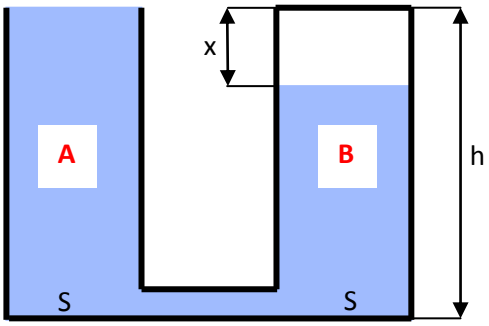
Po dosazení do * :
$373{,}15.2.10^{-4}.13546.9{,}8h^2 - (373{,}15.252.10^{-4}.13546.9{,}8 +$
$+ 373{,}15.10^5.2.10^{-4}).h + 373{,}15.10^5.252.10^{-4} - 10^5.252.10^{-4}.273{,}15 = 0$
$9{,}9.10^3\,h^2 - 1{,}26.10^6\,h + 0{,}25.10^6 = 0$
$\boldsymbol{9{,}9.h^2 - 1260\,h + 250 = 0}$
$\sqrt{D} = 1256$, $h_{1,2} = \frac{1260 \pm 1256}{19{,}8}$ m, $h_1 = 127\,m$, $h_2 = 0{,}202\,m$
Naší úloze vyhovuje pouze druhý kořen této rovnice $h_2 = 0{,}202\,m$

13. Dvě stejné válcovité nádoby A, B o výšce h = 80 cm s podstavou o obsahu S = 1 dm^2 jsou spojeny krátkou trubičkou podle obrázku. Nádoba B je uzavřená, do nádoby A nalijeme vodu.
a) Kolik vody můžeme do obou nádob nalít, považujeme-li teplotu soustavy o velikosti 20 °C za stálou?
b) Na jakou hodnotu je nutno zvýšit teplotu soustavy, aby vzduch úplně vytlačil vodu z nádoby B?
Tlak vodních par, teplotní roztažnost vody a nádob neuvažujeme.

Řešení:

h = 80 cm = 0,8 m, S = 1 dm^2 = 0,01 m^2, t_0 = 20 °C = 293,15 K, ρ = $10^3\,kg.m^{-3}$, g = 9,8 m.s^{-2}, $p_o = 10^5\,Pa$

a)



Ideální plyn, který sledujeme, je uzavřený v nádobě B.
Pokud byly obě nádoby prázdné, byl jeho stav popsán fyzikálními veličinami:

$$V_0 = S.h \;, \qquad p_0 = 10^5\,Pa$$

Po naplnění nádob je jeho stav popsán fyz. veličinami :

$$V_1 = S.x\,, \qquad p_1 = p_0 + x.\rho.g$$

Jelikož jde o děj izotermický, platí Boylův-Mariottův zákon: $p_0.V_0 = p_1.V_1$

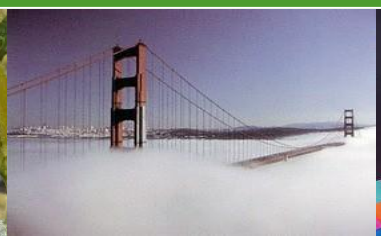
$p_0.S.h = (p_0 + x.\rho.g).S.x \Longrightarrow p_0.h = p_0.x + \rho.g.x^2$
rovnici: $\rho.g.x^2 + p_0.x - p_0.h = 0$
Po dosazení: $10^3.9{,}8.x^2 + 10^5.x - 10^5.0{,}8 = 0$
$\mathbf{9{,}8.x^2 + 100.x - 80 = 0}$
$\sqrt{D} = 114{,}6$ $x_{1,2} = \frac{-100 \pm 114{,}6}{2.9{,}8} \Longrightarrow x_1 = 0{,}75\,m$, $x_2 = -10{,}9\,m$, tento kořen nemá fyzikální význam
$\Longrightarrow$ Do obou nádob můžeme nalít vodu o objemu **V = 2.Vo –S.x = 2.S.h – S.x = S.(2.h – x)**
Po dosazení: V = 0,01.(2.0,8 – 0,75) m^3 = 0,0085 m^3 = 8,5 dm^3=8,5 l

b) Na jakou hodnotu je nutno zvýšit teplotu soustavy, aby vzduch úplně vytlačil vodu z nádoby B?
Po zvýšení teploty na teplotu t_2 bude stav vzduchu v nádobě B popsán fyzikálními veličinami:
$p_2 = p_o + h.\rho.g$, $V_2 = V_0$ a platí stavová rovnice: $\frac{p_0.V_0}{T_0} = \frac{p_2.V_2}{T_2}$

$$\Longrightarrow \quad \frac{p_0 V_0}{T_0} = \frac{(\mathrm{po} + \mathrm{h.\rho.g})\ V_0}{T_2} \quad \Longrightarrow \quad \frac{p_0}{T_0} = \frac{\mathrm{po} + \mathrm{h.\rho.g}}{T_2} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{T_2 = T_0 . \frac{po + h.\rho.g}{p_0} = T_0 . \left(1 + \frac{h.\rho.g}{p_0}\right)}$$

Po dosazení: $T_2 = 293{,}15 . \left(1 + \frac{0{,}8.1000.9{,}8}{10^5}\right)$ K = 316,13 K $\Longrightarrow$ t_2 = 43,0 °C

Skupenské změny



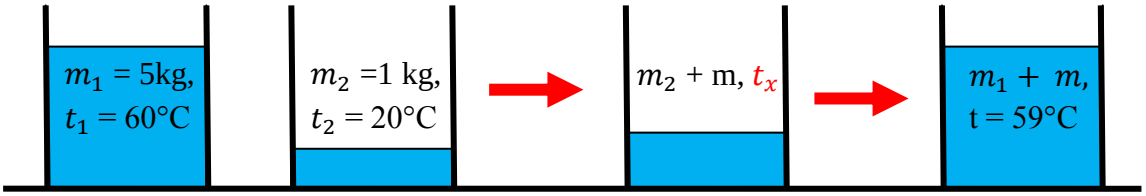
1. V jedné nádobě je voda o hmotnosti m_1 = 5 kg a teplotě t_1 = 60 °C. Ve druhé nádobě je voda o hmotnosti m_2 =1 kg a teplotě t_2 = 20 °C. Obě nádoby jsou tepelně izolovány. Část vody se přelije z první nádoby do druhé; po ustálení teploty ve druhé nádobě se přelije voda téže hmotnosti zpět z druhé nádoby do první. Po ustálení teploty vody v první nádobě byla změřena teplota vody t = 59 °C.

a) Určete teplotu $\boldsymbol{t_x}$ vody v druhé nádobě na konci děje.

b) Určete hmotnost **m** vody, která byla přelévána.

Řešení:

m_1 = 5 kg, t_1 = 60 °C, m_2 = 1 kg, t_2 = 20 °C, t = 59 °C



a) Změna teploty v první nádobě na konci děje je $t_1 - t$; voda odevzdala teplo:

$$Q = c.m_1.(t_1 - t)$$

Protože soustava je izolovaná, přijala voda v druhé nádobě stejné teplo Q; nyní ale platí:

$$Q = \text{c}.\, m_2.(t_x - t_2)$$

Předpokládáme, že platí ZZE: $\text{c}.\, m_1.(t_1 - t) = \text{c}.\, m_2.(t_x - t_2)$

$$t_x - t_2 = \frac{m_1.(t_1 - t)}{m_2} \Longrightarrow t_x = t_2 + \frac{m_1.(t_1 - t)}{m_2}$$

Po dosazení: $t_x = (20 + \frac{5.(60-59)}{1})$ °C = 25 °C

b) Voda o hmotnosti m odevzdá po přelití do druhé nádoby teplo: $Q_1 = \text{c}.\, m\,.(t_1 - \text{t}_\text{x})$; stejné teplo přijme voda v druhé nádobě: $\Longrightarrow Q_1 = \text{c}.\, m_2.(t_x - t_2)$

Předpokládáme, že platí ZZE: $\text{c}.\, m\,.(t_1 - \text{t}_\text{x}) = \text{c}.\, m_2.(t_x - t_2) \Longrightarrow$ m = $\frac{m_2.(t_x - t_2)}{t_1 - \text{t}_\text{x}}$

Pro přehlednost použijeme výsledek z **a)** $\boldsymbol{t_x}$**= 25 °C**

Po dosazení: $\text{m} = \frac{1.(25-20)}{60-25}$ kg = $\frac{1}{7}\ kg = 0{,}14\ kg$

2. V nádobě je voda o hmotnosti 1,5 kg a teplotě 80 °C.

a) Do nádoby přilejeme vodu o teplotě 20 °C tak, že výsledná teplota vody v nádobě je 37 °C. Určete hmotnost přidané vody.

b) Místo vody přidáme do nádoby ledovou tříšť o teplotě 0 °C. Určete hmotnost přidaného ledu, je-li výsledná teplota vody opět 37 °C.

Řešení:

c = 4,2 kJ.$kg^{-1}.°C^{-1}$ = $4,2.10^3$ J.$kg^{-1}.°C^{-1}$, $l_t = 340\ kJ.kg^{-1}$, $t_1 = 80\ °C$, $m_1 = 1,5\ kg$, $t_2 = 20°C$, $t = 37\ °C$, $t_l = t_t = 0\ °C$

esf evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

a) Po přidání chladnější vody dochází k tepelné výměně.

Teplá voda odevzdá (při ochlazení na teplotu t) studenější vodě teplo:

$$Q_1 = \text{c}.\, m_1.(\, t_1 - t)$$

Díky dodanému teplu se **studenější voda** ohřeje na teplotu t a přijme teplo:

$$Q_2 = \text{c}.\, m_2.(\, t - t_2)$$

Předpokládáme, že platí ZZE:

$$\Longrightarrow Q_1 = Q_2$$

$$\Longrightarrow \text{c}.\, m_1.(\, t_1 - \text{□}) = \text{c}.\, m_2.(\, t - t_2) \Longrightarrow \boldsymbol{m_2 = \frac{m_1.(\, t_1 - t)}{t - t_2}}$$

Z uvedeného vztahu vidíte, že pokud dochází k tepelné výměně mezi stejnými kapalinami, nezáleží na měrné tepelné kapacitě těchto kapalin.

Po dosazení: $m_2 = \frac{1{,}5.(80-37)}{37-20}$ kg = 3,794 kg

b) Je zřejmé, že po přidání ledu do nádoby všechen led roztaje, změní se na vodu a ta se pak ohřeje na požadovanou teplotu t. A protože má led teplotu tání, začíná tát ihned.

Teplá voda v nádobě odevzdá ledu teplo: $Q_1 = \text{c}.\, m_1.(\, t_1 - t)$

Led toto teplo přijme a využije na své roztání a ohřátí vody z ledu na teplotu t:

$$Q_2 = m_l.\, l_t + \text{c}.\, m_l.(\, t - t_t)$$

Předpokládáme, že platí ZZE: $\Longrightarrow$ $Q_1 = Q_2$

$$\text{c}.\, m_1.(\, t_1 - t) = m_l.\, l_t + \text{c}.\, m_l.(\, t - t_t) \Longrightarrow \boldsymbol{m_l = \frac{\text{c}.m_1.(\, t_1 - t)}{l_t + \text{c}.(\, t - t_t)}}$$

Po dosazení: $m_l = \frac{4{,}2.10^3.1{,}5.(\, 80-37)}{340.10^3 + 4{,}2.10^3.(\, 37-0)}$ kg = 0,547 kg

3. Ve válcové kalorimetrické nádobě poloměru 5 cm je 500 ml vody, ve které plave 5 g ledu. Do nádoby ponoříme měděný váleček o hmotnosti 100 g zahřátý na 50 °C.

a) Jaká bude teplota vody?

b) O jakou výšku stoupne hladina vody?

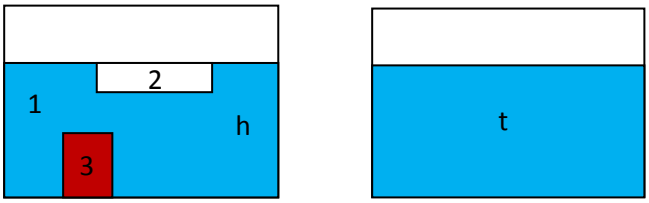
Řešení:

r = 5 cm = $5.10^{-2}\ m$

voda: $V_1 = 500\ ml \Longrightarrow m_1 = 0{,}5\ kg,\ \text{c}_1 = 4{,}2.10^3\ \text{J}.kg^{-1}.K^{-1}, \rho_1 = 10^3\ kg.m^{-3}, t_2 = t_t = 0\ °C$

led: $m_2 = 5\ g = 5.10^{-3}\ kg, t_2 = t_t = 0\ °C, l_t = 340\ kJ.kg^{-1} = 340.10^3\ J.kg^{-1}$

měděné těleso: $m_3 = \text{□}00\ g = 0{,}1\ kg, \text{c}_3 = 383\ \text{J}.kg^{-1}.K^{-1}, \rho_3 = 8{,}93.10^3\ kg.m^{-3}, t_3 = 50\ °C$



Váleček odevzdá teplo: $Q_3 = c_3.m_3.(\, t_3 - t)$

Voda přijme teplo: $Q_1 = c_1.m_1.(\, t - t_t) = c_1.m_1.t$ (pro jednoduchost $t_t = 0°C$)

Led přijme teplo: $Q_2 = l_t.m_2 + c_1.m_2.(\, t - t_t) = l_t.m_2 + c_1.m_2.t$

Předpokládáme, že platí ZZE: $\Longrightarrow$ $Q_3 = Q_1 + Q_2$

$$c_3.m_3.(\, t_3 - t) = c_1.m_1.t + l_t.m_2 + c_1.m_2.t$$

$$c_3.m_3.t_3 - c_3.m_3.t = c_1.m_1.t + l_t.m_2 + c_1.m_2.t$$

$$\text{t}.(\, c_1.m_1 + c_1.m_2 + c_3.m_3) = c_3.m_3.t_3 - l_t.m_2 \Longrightarrow \boldsymbol{t = \frac{c_3.m_3.t_3 - l_t.m_2}{c_1.(m_1+m_2)+c_3.m_3}}$$

Po dosazení: $t = \frac{383.0{,}1.50 - 340.10^3 5.10^{-3}}{4{,}2.10^3.(0{,}5+0{,}005)+383.0{,}1}$ °C = 0,1 °C

b) Hladina stoupne o objem vody vytlačené válečkem: $\text{V} = \frac{m_3}{\rho_3}$

Vytlačená voda zaujme podle nádoby tvar válce o výšce h: $\text{V} = \pi.r^2.h \Longrightarrow \text{h} = \frac{V}{\pi.r^2}$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{h} = \frac{m_3}{\rho_3.\pi.r^2}$$

Po dosazení: $h = \frac{0{,}1}{8{,}93.10^3.3{,}14.25.10^{-4}}$ m = 0,0014 m = 1,4 mm

Pzn: A co led? Ukážeme si, že roztáním ledu hladina vody nestoupne! To si pamatujte!

Platí ZZHmotnosti $\Longrightarrow$ led i voda z ledu, vzniklá jeho roztáním, mají stejnou hmotnost! Označme si objem vody z ledu V_2': $m_2 = m_2' \implies V_2.\rho_2 = V_2'.\rho_1 \implies V_2' = \frac{\rho_2}{\rho_1}.V_2$

Před svým rozpuštěním vytlačil plovoucí led na vodě množství vody o objemu V.

Objem ledu, který plave ve vodě, určíme z Archimedova zákona:

$$V_2.\rho_2.g = V.\rho_1.g \Longrightarrow \mathbf{V} = \frac{\rho_2}{\rho_1}.\boldsymbol{V_2}$$

Porovnáním objemů vidíme, že $V_2' = V \Longrightarrow$ Rozpuštěním ledu hladina vody v nádobě nestoupne!

4. V létě padaly kroupy. V meteorologické stanici měřili jejich teplotu. Do kalorimetru, v němž byla voda o hmotnosti $m_1 = 2\ kg$ a teplotě $t_1 = 30\ °C$, dali kroupy o hmotnosti $m_2 = 500\ g$. Když kroupy roztály, ustálila se teplota vody v kalorimetru na t = 8,1 °C

Řešení:

$\boldsymbol{m_1 = 2\ kg, t_1 = 30\ °C, m_2 = 500\ g}$ = 0,5 kg, c = 4,2 kJ.$\boldsymbol{kg^{-1}} = \boldsymbol{4{,}2.10^3\ J.kg^{-1}.°C^{-1}}$, $\boldsymbol{l_t = 340\ kJ.kg^{-1} = 340.10^3\ J.kg^{-1}}$,

$\boldsymbol{c_l}$ = 2,1 kJ.$\boldsymbol{kg^{-1}} = \boldsymbol{2{,}1.10^3\ J.kg^{-1}.°C^{-1}}$, $\boldsymbol{t = 8{,}1\ °C}$

Voda v kalorimetru se ochladila $\Longrightarrow$ odevzdala kroupám teplo:

$$Q_v = \text{c}.m_1.(t_1 - t)$$

Toto teplo přijaly kroupy. Nejprve zvýšily svou teplotu na teplotu tání, pak celé roztály a následně se voda, vzniklá z krup, zahřála na výslednou teplotu t.

Teplo, které bylo přijato kroupami:

Při zvýšení teploty na t_t: $Q_1 = c_l.m_2.(t_t - t_k)$

Při tání: $L_t = l_t.m_2$

Při ohřátí vody z krup na teplotu t: $Q_2 = c.m_2.(t - t_t)$

Předpokládáme, že platí ZZE: $Q_v = Q_1 + L_t + Q_2$

$$\text{c.}\quad m_1.(t_1 - t) = c_l.m_2.(t_t - t_k) + l_t.m_2 + c.m_2.(t - t_t)$$

$$c_l.m_2.(t_t - t_k) = \text{c}.m_1.(t_1 - t) - l_t.m_2 - c.m_2.(t - t_t)$$

$$\boldsymbol{t_k = \frac{l_t.m_2 + c.m_2.(t - t_t) - \text{c}.m_1.(t_1 - t)}{c_l.m_2} - t_t}$$

Po dosazení:

$$t_k = \left[\frac{340.10^3.0{,}5 + 4{,}2.10^3.0{,}5.(8{,}1 - 0) - 4{,}2.10^3.2.(30 - 8{,}1)}{2{,}1.10^3.0{,}5} - 0\right]\ °\text{C} = -1{,}2\ °\text{C}$$

Pzn: Z obecného řešení vidíme, že jsme nemuseli převádět kJ na J, vykrátí se! Už se stalo!

5. Tající sníh o hmotnosti $m_1 = 100\ g$ se přidal do vody o hmotnosti $m_2 = 300\ g$ a teplotě $t_2 = 40\ °C$. Po roztání sněhu se teplota vody ustálila na hodnotě t = 16°C. Kolik procent p obsahoval sníh?

Řešení:

$\boldsymbol{m_1 = 100\ g = 0,1\ kg,\ m_2 = 300\ g}$ **= 0,3 kg,** $\boldsymbol{t_2 = 40\ °C, t_1 = t_t = 0\ °C, c = 4,2.10^3\ J.kg^{-1}.K^{-1},\ l_t = 340.10^3\ J.kg^{-1}}$**, t = 16 °C**

Tající sníh obsahuje vodu o hmotnosti m_v a led o hmotnosti m_l, pro něž platí:

$$m_1 = m_v + m_l$$

Voda i led mají teplotu $t_1 = t_t = 0$°C, protože sníh taje.

Voda odevzdá sněhu při ochlazení z teploty t_2 na teplotu t teplo Q_2:

$$Q_2 = \text{c}.\ m_2.(t_2 - t)$$

Toto teplo se spotřebuje na tání ledu, který je součástí sněhu a na ohřátí vody o hmotnosti

$$m_1 = m_v + m_l$$

Teplo, které přijme sníh:

Na tání ledu: $Q_l = L_t = l_t.m_l$

Na ohřátí vody z ledu a vody, která je součástí sněhu $\Longrightarrow$na roztátí sněhu:

$$Q_v = c.m_1(t - t_1)$$

Zanedbáme-li ztráty tepla, pak podle ZZE platí:

$$Q_2 = Q_l + Q_v$$

$$\text{c}.\ m_2.(t_2 - t) = l_t.m_l + c.m_1(t - t_1)$$

$$\text{c}.\ m_2.(t_2 - t) = l_t.(m_1 - m_v) + c.m_1.(t - t_1) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow m_v = m_1 - \frac{c.m_2.(t_2 - t) - c.m_1.(t - t_1)}{l_t} = \frac{m_1 l_t - c.m_2.(t_2 - t) + c.m_1.(t - t_1)}{l_t}$$

$\Longrightarrow$ Otázka zněla, kolik procent vody obsahuje sníh. Matematicky vyjádřeno:

$$p = \frac{m_v}{m_1}.\ 100\% \Longrightarrow p = \frac{m_1 l_t - c.m_2.(t_2 - t) + c.m_1.(t - t_1)}{l_t.m_1}\ 100\%$$

$$\Longrightarrow \quad \boldsymbol{p = \frac{m_1.[l_t + c.(t - t_1)] - c.m_2.(t_2 - t)}{l_t.m_1}.\ 100\ \%}$$

Po dosazení: $p = \frac{0,1\left[340.10^3 + 4,2.10^3.(16 - 0)\right] - 4,2.10^3.0,3.(40 - 16)}{340.10^3.0,1}.\ 100\ \% = 30\ \%$

Pzn: Převáděli jste jednotky!? ☺

6. Brzy ráno byl na horách mráz. Teplota vzduchu a sněhu byla -10 °C. Lyžaři si v chatě uvařili k snídani čaj o objemu 2,5 l. Pospíchali na sjezdovku ☺, tak čaj ochladili sněhem. Určete hmotnost použitého sněhu, jestliže chtěli čaj ochladit na 40 °C.

Odpoledne se oteplilo na 0 °C, sníh zvlhl a k ochlazení stejného množství čaje (chtěli se prospat ☺), potřebovali o 30% více sněhu. Kolik vody obsahoval odpoledne sníh?

Řešení:

$\boldsymbol{\rho = 10^3\ kg.m^{-3}, V = 2,5\ l = 2,5\ dm^3 = 2,5.10^{-3} m^3, t_2 = 100\ °C, t_1 = -10\ °C,}$ **c = 4,2 kJ.**$\boldsymbol{kg^{-1}.°C^{-1}}$**,** $\boldsymbol{l_{1t} = 340\ kJ.kg^{-1}, c_1 = 2,1\ kJ.kg^{-1}.°C^{-1}, t_t = 0\ °C,}$ **t = 40 °C**

Ráno:

Čaj odevzdá při ochlazení z teploty 100 °C (předpokládáme, že vřel při této teplotě) na 40 °C teplo:

$$Q = \text{c}.\ m\ .(t_1 - t) = \text{c.ρ.V.}\ (t_1 - t)$$

Toto teplo přijal sníh o teplotě $-10\ °C$:

Při zvýšení teploty na t_t: $Q_1 = c_1 . m_1 . (t_t - t_1)$

Při tání: $L_t = l_t . m_1$

Při ohřátí vody ze sněhu na teplotu t: $Q_2 = c . m_1 . (t - t_t)$

Zanedbáme-li ztráty tepla, pak podle ZZE platí:

$$Q = Q_1 + L_t + Q_2$$

$$\text{c.ρ.V.} (t_2 - t) = c_1 . m_1 . (t_t - t_1) + l_t . m_1 + c . m_1 . (t - t_t)$$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{m_1 = \frac{\text{c.ρ.V.}(t_2 - t)}{c_1 .(t_t - t_1) + l_t + c.(t - t_t)}}$$

Po dosazení:

$$m_1 = \frac{4{,}2.10^3 .2{,}5.10^{-3} .(100 - 40)}{2{,}1.(0+10) + 340 + 4{,}2.(40-0)} \text{ kg} = 1{,}2 \text{ kg}$$

Pzn: c = 4,2 kJ.$kg^{-1}.°C^{-1}$, $l_{1t} = 340\ kJ.kg^{-1}$, $c_1 =$ 2,1 kJ.$kg^{-1}.°C^{-1}$ jednotky jsme nemuseli převádět, podle obecného vyjádření se vykrátí. Už to umíme!? ☺

Odpoledne:

Vlhký sníh obsahuje vodu a sníh. Teplota obou složek je rovna teplotě tání $t_t = 0°C$

$$\Longrightarrow 1{,}3 . m_1 = m_s + m_v$$

Teplo potřebné k ochlazení čaje je nyní rovno teplu potřebnému k ohřevu veškeré vody o hmotnosti $1{,}3m_1$ a teplu potřebnému k roztátí sněhu $\Longrightarrow$ $L_t = l_t . m_s$

$$\Longrightarrow \text{c.ρ.V.} (t_2 - t) = 1{,}3 . c . m_1 . (t - t_t) + l_t . m_s$$

Nyní řešíme soustavu rovnic:

$$1{,}3 . m_1 = m_s + m_v$$

$$\text{c.ρ.V.} (t_2 - t) = 1{,}3 . c . m_1 . (t - t_t) + l_t . m_s$$

Z druhé rovnice: $\boldsymbol{m_s = \frac{\text{c.ρ.V.}(t_2 - t) - 1{,}3 . c . m_1 . (t - t_t)}{l_t}}$

Dosadíme do první rovnice: $1{,}3 m_1 = \frac{\text{c.ρ.V.}(t_2 - t) - 1{,}3\ c . m_1 . (t - t_t)}{l_t} + m_v$

$\Longrightarrow m_v = 1{,}3 m_1 - \frac{\text{c.ρ.V.}(t_2 - t) - 1{,}3 . c . m_1 . (t - t_t)}{l_t} \Longrightarrow \boldsymbol{m_v = \frac{1{,}3 . m_1 . l_t - \text{c.ρ.V.}(t_2 - t) + 1{,}3 . c . m_1 . (t - t_t)}{l_t}}$

Dále bychom mohli postupovat obecně a dosadit ještě za $m_1 = \frac{\text{c.ρ.V.}(t_2 - t)}{c_1 .(t_t - t_1) + l_t + c.(t - t_t)}$;

Výpočet by byl zbytečně složitý $\Longrightarrow$ dosadíme již vypočítanou hodnotu $m_1 = 1{,}2$ kg

Po dosazení: $m_s = \frac{4{,}2.10^3 .2{,}5.10^{-3} .(100 - 40) - 1{,}3\ 4{,}2 . 1{,}2 . (40 - 0)}{340}\ kg = 1{,}082\ kg$

$m_v = \frac{1{,}3 . 1{,}2 . 340 - 4{,}2.10^3 .2{,}5.10^{-3} .(100 - 40) + 1{,}3 . 4{,}2 . 1{,}2 . (40 - 0)}{340}\ kg = 0{,}478\ kg$

Pzn: Hodnotu m_v jsme už také nemuseli počítat tak složitě. Víme, že:

$$1{,}3 m_1 = m_s + m_v \Longrightarrow m_v = 1{,}3 . m_1 - m_s$$

Po dosazení: $m_v = (1{,}3 . 1{,}2 - 1{,}082)$ kg = 0,478 kg

Kolik vody obsahoval odpoledne sníh?

To vyjadřuje výraz: $\boldsymbol{p = \frac{m_v}{1{,}3 . m_1} . 100\ \%}$

Po dosazení: $p = \frac{0{,}478}{1{,}3 . 1{,}2} . 100\ \% = 30{,}6\ \%$

Pro výpočet nám stačilo vypočítat jen hmotnost vody ve sněhu. Ale dobrovolnosti se meze nekladou! ☺ Máme aspoň kontrolu, že náš výpočet je správný! ☺

7. Pračka integrovaná se sušičkou vyprala 4,5 kg silně zašpiněného prádla při teplotě 60 °C. Po vyždímání mělo prádlo hmotnost 5,7 kg a ihned potom začalo vysoušení. Jaké minimální teplo je třeba prádlu dodat, aby se vysušilo. Předpokládáme, že vysoušení bude probíhat při teplotě 90 °C? Měrné skupenské teplo vypařování vod při této teplotě je 2,3 MJ.kg^{-1}.

Řešení:

m = (5,7 - 4,5) kg = 1,2 kg, $t_1 = 60\ °C$, $t_2 = 90\ °C$, $l_v = 2{,}3\ MJ.kg^{-1} = 2{,}3.10^6 J.kg^{-1}$,

c = 4,2 kJ.$kg^{-1}\,°C^{-1} = 4{,}2\,.10^3\ J.kg^{-1}.°C^{-1}$

Voda v prádle se nejprve zahřeje z 60 °C na 90 °C a pak se veškerá voda při této teplotě vypaří.

Voda přijme teplo: $Q_1 = c.m.(t_2 - t_1)$

Teplo, potřebné k vypaření vody: $L_v = l_v.m$

Teplo dodané prádlu v sušičce:

$$Q = Q_1 + L_v = c.m.(t_2 - t_1) + l_v.m$$

$$\Rightarrow Q = m.[c.(t_2 - t_1) + l_v]$$

Po dosazení:

$$Q = 1{,}2.[4{,}2\,.10^3.(90 - 60) + 2{,}3.10^6]\ J = 2{,}9.10^6\ J = 2{,}9\ MJ$$

8. Železný meteor vlétne do atmosféry Země při teplotě blízké 0K. Určete jeho minimální počáteční rychlost v_0, jestliže se v atmosféře Země zcela vypaří.

Řešení:

$T_0 = 0\ K \Rightarrow t_0 = -273\ °C$

Pro železo najdeme z tabulek: $t_t = 1500\ °C, t_v = 3000\ °C, c = 4{,}6.10^2\ J.kg^{-1}.K^{-1}$,

$l_t = 2{,}7.10^5\ J.kg^{-1}$, $l_v = 5{,}8.10^4\ J.kg^{-1}$

Pro kapalné železo: $c_k = 8{,}3.10^2\ J.kg^{-1}.K^{-1}$

Hodnoty fyzikálních veličin jsou průměrné pro fyzikální podmínky, ve kterých jsou použity. Neuvažujeme změny potenciální energie meteoru během sestupu atmosférou.

Počáteční kinetická energie meteoru při vletu do atmosféry Země je :

$$E_k = \frac{1}{2}.m.v_0^2$$

Tato energie se vlivem tření postupně přemění na vnitřní energii meteoru. Ten nejdříve zvýší svou teplotu na teplotu tání, pevné železo se roztaví na kapalné železo, dále se zahřívá na teplotu varu a postupně se vypařuje.

K dosažení teploty tání přijme teplo: $Q_1 = c.m.(t_t - t_0)$

Ke svému roztavení přijme teplo: $L_t = l_t.m$

K dosažení teploty varu přijme teplo: $Q_2 = c_k.m.(t_v - t_t)$

K vypaření přijme teplo: $L_v = l_v.m$

K vypařování dochází i při teplotě nižší, než je bod varu. Intenzita tohoto vypařování je mnohem nižší než po dosažení bodu varu. Proto můžeme toto teplo zanedbat.

Předpokládáme, že platí ZZE:

$$E_k \geq Q_1 + L_t + Q_2 + L_v$$

$$\frac{1}{2}.m.v_0^2 \geq c.m.(t_t - t_0) + l_t.m + c_k.m.(t_v - t_t) + l_v.m$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{v_0^2 \geq 2.[c.(t_t - t_0) + l_t + c_k.(t_v - t_t) + l_v]}$$

Po dosazení:

$$v_0^2 \geq 2.[4{,}6.10^2.(1500+273) + 5{,}8.10^4 + 8{,}3.10^2.(3000-1500) + 5{,}8.10^4]\, m^2.s^{-2}$$

$$v_0^2 \geq 4{,}8.10^6\, m^2.s^{-2}$$

$$\Rightarrow \quad v_0 \geq 2{,}2.10^3\, m.s^{-1} \quad \Rightarrow \quad v_0 \geq 2{,}2\, km.s^{-1}$$

9. Mosazné těleso o hmotnosti 2 kg přijalo teplo 0,4 MJ. V důsledku toho se roztopilo 500 g tělesa. Jaká byla počáteční teplota tělesa?

Řešení:

$\boldsymbol{t_t = 970\,°C,\ l_t = 15970\,J.kg^{-1},\ c = 394\,J.kg^{-1}.K^{-1} = 394\,J.kg^{-1}.°C^{-1},}$

$\boldsymbol{Q = 0{,}4\,MJ = 4.10^5\,J,\ m_1 = 2\,kg,\ m_2 = 0{,}5\,kg}$

Ze zadání je zřejmé, že mosaz měla teplotu nižší, než je teplota tání a asi se neroztavilo celé těleso, ale jenom jeho část.

Teplo Q, které při tomto ději přijalo mosazné těleso, lze rozdělit na dvě části:

1. Teplo potřebné k dosažení t_t: $Q_1 = c.m_1.(t_t - t_1)$

2. Teplo potřebné k roztání části mosaze: $L_t = l_t.m_2$

Předpokládáme, že platí ZZE:

$$Q = Q_1 + L_t = c.m_1.(t_t - t_1) + l_t.m_2$$

$$\Rightarrow c.m_1.(t_t - t_1) = Q - l_t.m_2 \Rightarrow t_t - t_1 = \frac{Q - l_t.m_2}{c.m_1} \Rightarrow \boldsymbol{t_1 = t_t - \frac{Q - l_t.m_2}{c.m_1}}$$

Po dosazení: $t_1 = (970 - \frac{4.10^5 - 159700.0{,}5}{394.2})$ °C = 563,7 °C

10. V kalorimetru je voda o hmotnosti $m_1 = 1\,kg$ a teplotě $t_1 = 50\,°C$. V této vodě se pohltila vodní pára o hmotnosti $m_2 = 0{,}01\,kg$ a teplotě $t_2 = 100$ °C.

a) Jaká je výsledná teplota **t** vody v kalorimetru?

b) Vypočtěte hmotnost vody $\boldsymbol{m_3}$ o teplotě $t_2 = 100$ °C, kterou bychom museli přidat do kalorimetru místo páry, aby se teplota vody opět ustálila na hodnotě t?

Ke ztrátám tepla vedením a sáláním nepřihlížíme.

Řešení:

$\boldsymbol{m_1 = 1\,kg\,, t_1 = 50\,°C, c = 4{,}2\,kJ.kg^{-1}.K^{-1}, m_2 = 0{,}01\,kg,}$

$\boldsymbol{t_2 = t_v = 100\,°C, l_v = 2\,260\,kJ.kg^{-1}}$

a) Pára odevzdá vodě v kalorimetru teplo: $Q_2 = l_v.m_2 + c.m_2.(t_v - t)$

Voda v kalorimetru přijme teplo: $Q_1 = c.m_1.(t - t_1)$

Předpokládáme, že platí ZZE: $Q_2 = Q_1$

$$\Rightarrow l_v.m_2 + c.m_2.(t_v - t) = c.m_1.(t - t_1)$$

$$\Rightarrow l_v.m_2 + c.m_2.t_v - c.m_2.t = c.m_1.t - c.m_1.t_1$$

$$\Rightarrow t.c.(m_1 + m_2) = m_2.(l_v + c.t_v) + c.m_1.t_1 \Rightarrow \boldsymbol{t = \frac{m_2.(l_v + c.t_v) + c.m_1.t_1}{c.(m_1 + m_2)}}$$

Po dosazení: $t = \frac{0{,}01.(2260 + 4{,}2..100) + 4{,}2.1.50}{4{,}2.(1+0{,}01)}$ °C = 55,8 °C

b) Nyní bude teplo odevzdávat voda o hmotnosti $\boldsymbol{m_3}$ a teplotě $t_v = 100$°C :

$Q_2 = c.m_3.(t_v - t)$

Voda v kalorimetru přijme teplo: $Q_1 = c.m_1.(t - t_1)$

Předpokládáme, že platí ZZE: $Q_2 = Q_1$

$$\Rightarrow \; c.m_3.(t_v - t) = c\,.m_1.(t - t_1) \Rightarrow \boldsymbol{m_3 = \frac{m_1.(t - t_1)}{t_v - t}}$$

Po dosazení: $m_3 = \frac{1.(55{,}8-50)}{100-55{,}8}\ kg = 0{,}131\ kg = 131\ g$

Pzn: V případě b) není vodě v kalorimetru předávané teplo uvolněné při kapalnění vodní páry. Je proto pochopitelné, že vody musí být více než páry.

11. Určete rosný bod, jestliže vzduch při teplotě 20 °C má relativní vlhkost 55 %.

Řešení:

$\boldsymbol{t = 20°,\ \varphi = 55\ \%}$

Absolutní vlhkost vzduchu udává hmotnost vodní páry obsažené v 1 m^3 vzduchu.

$$\Rightarrow \quad \Phi = \frac{m}{V}$$

Je-li vzduch vodní párou plně nasycen, to znamená, že vodní pára se stala sytou, hovoříme o **maximální vlhkosti vzduchu**, kterou definujeme vztahem: $\Phi_m = \frac{m_s}{V}$. Rosným bodem t_r nazýváme teplotu, při níž je vodní pára ve vzduchu sytá. Hustotu takové syté vodní páry najdeme v MFCHTabulkách. Tento údaj nám zároveň udává absolutní vlhkost vzduchu Φ_m!!!

Relativní vlhkost vzduchu je pak definována jako poměr absolutní a maximální vlhkosti vzduchu:

$$\Rightarrow \varphi = \frac{\Phi}{\Phi_m}\ .100\ \%$$

Z tabulek zjistíme, že hustota syté vodní páry při teplotě 20 °C je $17{,}3\ \text{g}.m^{-3} = 17{,}3\ .10^{-3}\text{kg}\,.m^{-3} \Rightarrow$

$$\Phi_m = 17{,}3\ .10^{-3}\text{kg}\,.m^{-3}$$

$$\varphi = \frac{\Phi}{\Phi_m}\ .100\ \% \Rightarrow \Phi = \frac{\varphi.\Phi_m}{100}$$

Po dosazení: $\Phi = \frac{55.17{,}3\ .10^{-3}}{100}\ \text{kg}\,.m^{-3} = 9{,}515.\ 10^{-3}\ \text{kg}\,.m^{-3} = 9{,}515\ \text{g}.m^{-3}$

Této hodnotě odpovídá v tabulkách teplota rosného bodu $t_r = 10$ °C

Pokud bychom výsledek chtěli upřesnit, musíme trošku počítat. V tabulkách jsou uvedeny jen hodnoty pro t = 10 °C je $\rho = 9{,}4\ \text{g}.m^{-3}$, pro $t = 15$ °C je $\rho = 12{,}8\ \text{g}.m^{-3}$. Z ostatních hodnot také vidíme, že se hustota s teplotou nemění lineárně, ale této nepřesnosti se snad můžeme dopustit. Lepší něco než nic! ☺ Naše hustota je nejblíže k hodnotě $\rho = 9{,}4\ \text{g}.m^{-3}$, ale je o $0{,}115\ \text{g}.m^{-3}$ vyšší

$$\Rightarrow \Delta t = 5\ °\text{C} \ \wedge\ \Delta\rho = 3{,}4\ \text{g}.m^{-3} \Rightarrow \text{pro } \Delta\rho = 1\ \text{g}.m^{-3} \text{ je } \Delta t = \frac{5}{3{,}4}\ °\text{C} = 1{,}47\ °\text{C}$$

$$\Rightarrow \text{pro } \Delta\rho = 0{,}115\ \text{g}.m^{-3} \text{ je } \Delta t = 0{,}115.1{,}47\ °C = 0{,}17\ °C$$

$$\Rightarrow \text{teplota rosného bodu : } \quad t_r = 10{,}17\ °\text{C}$$

12. Při teplotě 28 °C je nad povrchem řeky relativní vlhkost vzduchu 70 %. Při jakém poklesu teploty se objeví mlha?

Řešení:

$\boldsymbol{t = 28°, \varphi = 70\ \%}$

Stejným postupem jako v minulém příkladě z tabulek zjistíme, že syté vodní páry mají při teplotě 28 °C hustotu 26,84 g. $m^{-3} \Longrightarrow \Phi_m = 26{,}84 \,.\, 10^{-3}$ kg . m^{-3}

$$\varphi = \frac{\Phi}{\Phi_m} .100\ \% \Longrightarrow \mathbf{\Phi = \frac{\varphi.\Phi_m}{100}}$$

Po dosazení: $\Phi = \frac{70.26{,}84\,.10^{-3}}{100}$ kg . $m^{-3} = 18{,}788\,.10^{-3}$ kg . m^{-3} = 18,788 g . m^{-3}

Z tabulek odečteme, že hustota této syté páry je nejblíže k hustotě ρ = 17,3 g. m^{-3}s odpovídající teplotou 20 °C . Ale je o 1,488 g. m^{-3} vyšší než tabulková hodnota. Z tabulek opět odečteme:

pro t = 20 °C je ρ = 17,3 g. m^{-3}, pro t = 25 °C je ρ = 23 g. m^{-3}.

Naše hodnota 18,788 g . m^{-3}

$\Longrightarrow$ Δt = 5 °C ∧ Δρ = 5,7 g. $m^{-3} \Longrightarrow$ pro Δρ = 1 g. m^{-3} je Δt = $\frac{5}{5{,}7}$ °C = 0,877 °C

$\Longrightarrow$ pro Δρ = 1,488 g. m^{-3} je Δt = $0{,}877.1{,}488\ °C = 1{,}3\ °C$

$\Longrightarrow$ teplota rosného bodu nad řekou je 21,3 °C $\Longrightarrow$ teplota poklesla o 6,7 °C.

13. Jaká byla nejmenší relativní vlhkost vzduchu při teplotě 18 °C, jestliže při nočním poklesu teploty na -2 °C se na povrchu půdy vytvořila jinovatka?

Řešení:

t = 18 °C, $\boldsymbol{t_r = -2\ °C}$

Z tabulek zjistíme, jakou hustotu má sytá vodní pára při teplotě $\boldsymbol{t_r}$ **= -2 °C** :

t = 0 °C je ρ = 4,84 g. m^{-3}, pro t = −5°C je ρ = 3,24 g. m^{-3}.

Naše hodnota leží v tomto intervalu, blíže k hodnotě t = 0 °C je ρ = 4,84 g. m^{-3}; naše teplota je o 2°C nižší.

$\Longrightarrow$ Δt = 5 °C ∧ Δρ = 1,6 g. $m^{-3} \Longrightarrow$ pro Δt = 1 °C $\Longrightarrow$ je Δρ = $\frac{1{,}6}{5}$ g. m^{-3} = 0,32 g. m^{-3}

$\Longrightarrow$ **ρ = (4,84 – 2.0,32) g.** $\boldsymbol{m^{-3}}$ **= 4,2 g.** $\boldsymbol{m^{-3}}$

Relativní vlhkost vzduchu by byla nejmenší, pokud by i pára při teplotě 18 °C byla sytá.

Při teplotě **t = 18 °C** má sytá vodní pára hustotu:

pro t = 15 °C je ρ = 12,8 g. m^{-3}, *pro* t = 20 °C je ρ = 17,3 g. m^{-3} .

Naše hodnota je blíže k hodnotě t = 20 °C $\Longrightarrow$ ρ = 17,3 g. m^{-3}, je o 2 °C nižší.

$\Longrightarrow$ Δt = 5 °C ∧ Δρ = 4,5 g. $m^{-3} \Longrightarrow$

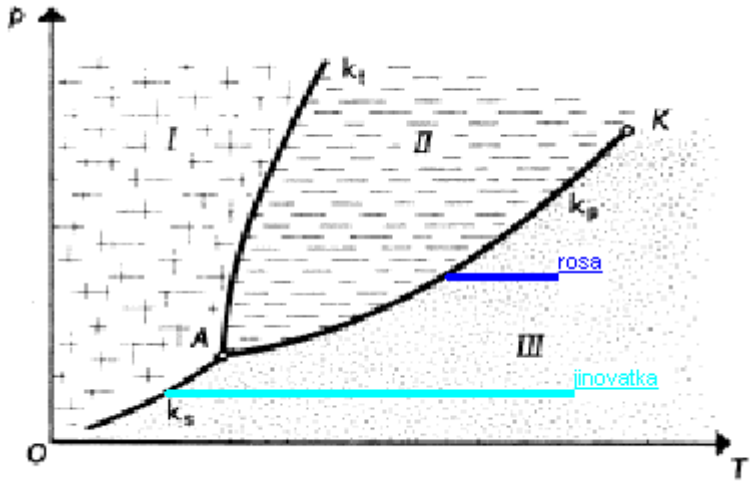
pro Δt = 1 °C $\Longrightarrow$ je Δρ = $\frac{4{,}5}{5}$ g. m^{-3} = 0,9 g. m^{-3}

$\Longrightarrow$ Při teplotě 18 °C má sytá vodní pára hustotu **ρ = (17,3 - 2.0,9) g.** $\boldsymbol{m^{-3}}$ **= 15,5 g.** $\boldsymbol{m^{-3}}$

$$\boldsymbol{\varphi = \frac{\Phi}{\Phi_m} .100\ \%}$$

Po dosazení: $\varphi \geq \frac{4{,}2}{15{,}5} .100\ \% \geq 27{,}1\ \%$

Pzn: Při řešení posledních tří příkladů jsme vycházeli ze znalosti fázového diagramu. Pokud klesne izobaricky teplota přehřáté páry, dostaneme se v případě vzniku rosy a mlhy na křivku syté páry a v případě vzniku jinovatky na křivku sublimace. V obou případech se přehřátá pára stává párou sytou.



Obsah:

1. Kinematika 1
2. Dynamika 8
3. Mechanická práce 17
4. Gravitační pole 24
5. Tuhé těleso 33
6. Pevné látky a kapaliny 41
7. Ideální plyn 49
8. Skupenské změny 58
9. Obsah 68
10. Zdroje 69

Autor: RNDr. Dana Kubešová , 2012

Zdroje obrázků:

Pro vyhledání obrázků byl použit portál **http://www.cmis.cz/dum/** se zatržením možností upravovat a použít pro komerční účely. Portál **http://www.cmis.cz/dum/ je** vyhledavač neziskové organizace Creative Commons, která na internetu vyhledává a označí ty obrázky, fotografie a další zdroje, u kterých dal autor souhlas s jejich bezplatným využitím nebo u kterých již platnost autorských práv vypršela. Iniciativa Creative Commons v globálním měřítku garantuje, že je dané dílo volně k dispozici:

Dostupný pod licencí Creative Commons:

Kinematika

Vaněk, Jiří. In: spz.logout.cz[online]. 30. 6. 2006 [cit. 2010-12-13]. Obrázek ve formátu jpg. Dostupné z: http://spz.logout.cz/foto2006/310-005-sz-jv.jpg
Dostupné z: http://spz.logout.cz/album/si/si_sz310.html
Werner, Miky. In: hybrid.cz [online]. 9. 5. 2009 [cit. 2011-1-12]. Obrázek ve formátu jpg. Dostupné z: http://www.hybrid.cz/files/images/peugeot-hymotion3-1.thumbnail.jpg
Dostupné z: http://www.hybrid.cz/tagy/trikolka?page=1
In: yacht-magazine.cz [online]. 9. 5. 2009 [cit. 2011-1-18]. Obrázek ve formátu jpg. Dostupné z: http://www.yacht-magazine.cz/images/hallbergrassy_01.jpg
Dostupné z: http://www.yacht-magazine.cz/cz/yacht/obsah-cisla-10-2006/482-neni-co-vytknout-hallberg-rassy-40/#!prettyPhoto
Petit, Charlie In: ksj.mit.edu [online]. [cit. 2011-1-24]. Obrázek ve formátu jpg. Dostupné z: http://ksj.mit.edu/sites/default/files/images/tracker/2008/lapcat-concept.jpg
Dostupné z: http://ksj.mit.edu/tracker/by-month/200802?page=5

Příklad 1)

Robert, Vincent In: vugtk.cz[online]. [cit. 2011-2-20]. Obrázek ve formátu gif. Dostupné z: http://www.vugtk.cz/nzk/c5-09/vincent_soubory/image003.gif
Vincent, Robert. Novinky zeměměřické knihovny č. 5/2009. *vugtk.cz.* [Online] 10. 4 2009. [Citace: 10. 2 2011.] http://www.vugtk.cz/nzk/c5-09/vincent.htm.

Příklad 13)

In: strelnice.name [online]. [cit. 2011-2-20]. Obrázek ve formátu jpg. Dostupné z: http://www.strelnice.name/images/tercpi25s.jpg
In: vtipy7.blog.cz [online]. [cit. 2011-2-20]. Obrázek ve formátu jpg. Dostupné z: http://vtipy7.blog.cz/1102/obrazky-zbrani

Dynamika

Ed Merritt In: wordpress.com [online]. [cit. 2011-4-20]. Obrázek ve formátu jpg. Dostupné z: http://kolotoc.files.wordpress.com/2009/01/kolotoc_retazovy.jpg?w=300&h=225
Dostupné z: http://kolotocems.wordpress.com/nase-atrakcie/
Sir Godfrey Kneller. In: wikipedia.org [online]. [cit. 2011-4-20]. Obrázek ve formátu jpg. Dostupné z: http://cs.wikipedia.org/wiki/Soubor:GodfreyKneller-IsaacNewton-1689.jpg
Knadr, Michal. In: vysocina-news.cz [online]. [cit. 2011-4-20]. Obrázek ve formátu jpg. Dostupné z: http://www.vysocina-news.cz/data/33716/preface/full.jpg
Dostupné z: http://www.vysocina-news.cz/clanek/prepadeni-parniho-vlakui/
In: astroblog.cosmobc.com [online]. [cit. 2011-4-20]. Obrázek ve formátu jpg. Dostupné z: http://astroblog.cosmobc.com/wp-content/uploads/2010/03/space_shuttle_launch.jpg
Dostupné z: http://astroblog.cosmobc.com/2010/03/27/did-you-know-the-space-shuttle-runs-on-only-one-megabyte-of-ram/

Příklad 5)

Novotná, Kateřina In: im.sport.cz [online]. [cit. 2011-4-20]. Obrázek ve formátu jpg. Dostupné z: http://im.sport.cz/016/100164-article-9y8kg.jpg

Příklad 6)

Zach, Ondřej. In: idnes.cz [online]. [cit. 2010-12-13]. Obrázek ve formátu jpg. Dostupné z: http://i.idnes.cz/08/062/sph/OZ23a767_IMGP0094.JPG
Dostupné z: http://bonusweb.idnes.cz/foto.aspx?r=bw-magazin&foto1=OZ23a767_IMGP0094.JPG

Mechanická práce a energie

In: bagry.cz [online]. [cit. 2011-06-18]. Obrázek ve formátu jpg. Dostupné z:

http://bagry.cz/var/ezwebin_site/storage/images/forum/zamestnani/buldozer_hledam_praci/re_buldozer_hledam_praci__4/450495-1-cze-CZ/re_buldozer_hledam_praci.jpgg

Babič, Miroslav. In: blog.sme.sk [online]. 8.10.2008 [cit. 2011-06-18]. Obrázek ve formátu jpg. Dostupné z: http://blog.sme.sk/blog/8457/167052/DSCF1891.jpg

Dostupné z: http://miroslavbabic.blog.sme.sk/c/167052/Oktoberfest-2008.html

In: tapety.apofis.cz [online]. [cit. 2011-06-18]. Obrázek ve formátu jpg. Dostupné z: http://tapety.apofis.cz/images/54dfc8ae454168ecea4a137f15358d05.jpeg

In: vlaksim.cz [online]. 20.07.2011 [cit. 2011-07-25]. Obrázek ve formátu jpg. Dostupné z: http://www.vlaksim.cz/images/fotogalerie/foto_5211.jpg

Dostupné z: http://www.vlaksim.cz/foto-dalsi-motoracek-v-oblouku-5211.html

Příklad 3)

In: asu.cas.cz [online]. 2010 [cit. 2011-06-18]. Obrázek ve formátu jpg. Dostupné z: http://www.asu.cas.cz/esa

In: asu.cas.cz [online]. 2010 [cit. 2011-06-18]. Obrázek ve formátu jpg. Dostupné z: http://www.asu.cas.cz/_data/integral_earthobs_1225478247.jpg

Příklad 5)

In: 123rf.com [online]. 8.10.2008 [cit. 2011-06-18].Obrázek ve formátu jpg. Dostupné z: http://www.123rf.com/photo_2448665_plane-taking-off-at-sunrise-and-seattle-skyline-illustration.html

http://us.123rf.com/400wm/400/400/fintastique/fintastique0801/fintastique080100401/2448665-plane-taking-off-at-sunrise-and-seattle-skyline-illustration.jpg

Příklad 6)

ČSA. In: novinky.cz [online]. [cit. 2011-06-18]. Obrázek ve formátu jpg. Dostupné z: http://tema.novinky.cz/csa. http://im.novinky.cz/667/206673-original1-s1428.jpg

Příklad 7)

In: dovolena-leclair.cz [online]. [cit. 2011-06-18]. Obrázek ve formátu jpg. Dostupné z: http://www.dovolena-leclair.cz/termin/722:europa-park-nejvyssi-horska-draha-v-evrope-nemecko.html

http://www.dovolena-leclair.cz/uploads/fs_images/cltrips/230/euro2_1656_l.jpeg

Příklad 8)

DayLife.com. In: tn.nova.cz [online]. 8.10.2008 [cit. 2011-06-18]. Obrázek ve formátu jpg. Dostupné z: http://tn.nova.cz/sport/zimnisporty/bank-pojedu-nadoraz-to-je-jiste.html

http://image.tn.nova.cz/media/images/440x248/Dec2010/702438.jpg?d41d

Příklad 11)

Šácha, Martin. In: svobodajiri.euweb.cz [online]. 8.10.2008 [cit. 2011-06-18]. Obrázek ve formátu jpg. Dostupné z: http://svobodajiri.euweb.cz/Orlik.htm. http://svobodajiri.euweb.cz/Vytah.jpg

Dostupné z: http://svobodajiri.euweb.cz/Orlik.htm

Příklad 12)

In: holidaycheck.de [online]. 7.3.2012 [cit. 2012-03-10]. Obrázek ve formátu jpg. Dostupné z: http://www.holidaycheck.de/reisetipp-Urlaubsbilder+Waterpark+Faliraki-ch_ub-zid_5464.html?action=detail&mediaId=1155725279

http://www.holidaycheck.de/data/urlaubsbilder/mittel/7/1155725279.jpg

Příklad 13)

In: ibackpackcanada.com [online]. [cit. 2011-07-12]. Obrázek ve formátu jpg. Dostupné z: http://ibackpackcanada.com/5-best-places-to-bungee-jump-in-canada/

http://ibackpackcanada.com/wp-content/uploads/2009/10/whistler_bungee_jump.jpg

Gravitační pole

In astronews.beepworld.de [online]. 8.10.2008 [cit. 2011-07-10]. Obrázek ve formátu gif. Dostupné z: http://astronews.beepworld.de/files/f.jpg

In: spb.russiaregionpress.ru [online]. [cit. 2011-07-10]. Obrázek ve formátu jpg. Dostupné z: http://spb.russiaregionpress.ru/files/2009/06/1046955786.jpeg

In: wikimedia.org [online]. [cit. 2011-07-10]. Obrázek ve formátu jpg. Dostupné z: http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/d/d4/Johannes_Kepler_1610.jpg/225px-Johannes_Kepler_1610.jpg

In: i.newskey.ru [online]. [cit. 2011-07-10]. Obrázek ve formátu jpg. Dostupné z: http://i.newskey.ru/shownews/picture/big/101377

Vernon, Cheril. In: gossipgirlreport.com [online]. 5.5.2009 [cit. 2011-07-10]. Obrázek ve formátu jpg. Dostupné z: http://www.gossipgirlreport.com/wp-content/uploads/2009/05/infphoto-966793edwestwickfixed-thumb.jpg

http://www.cliqz.com/entertainment/c/23716.html

Příklad 4)

In: cometzone.com [online]. [cit. 2011-08-18]. Obrázek ve formátu jpg. Dostupné z: http://www.cometzone.com/wp-content/uploads/2011/08/halleys-comet.jpg

Dostupné z: http://www.cometzone.com/comets/halleys-comet/

Příklad 6)

In: esa.int [online]. 9.10.2009 [cit. 2011-08-18]. Obrázek ve formátu jpg. Dostupné z: http://www.esa.int/images/smos_key-visual_FINAL_M.jpg

Dostupné z: http://www.esa.int/esaCP/

Příklad 7)

In: signaly.cz [online]. [cit. 2011-08-18]. Obrázek ve formátu jpg. Dostupné z: http://img.signaly.cz/upload/1/c/0d3ec790f64af96e1aa118e5a12874/zemekoule.jpg

Dostupné z: http://www.fotopedia.com/items/flickr-7375813928

Conrad, Charles. In: wikimedia.org [online]. 1969 [cit. 2011-08-18]. Obrázek ve formátu jpg. Dostupné z: http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/9/97/Apollo12Visor.jpg

Příklad 13)

In: superspy.cz [online]. [cit. 2011-08-18]. Obrázek ve formátu jpg. Dostupné z: http://www.superspy.cz/sites/default/files/clanky/clankove/8374/bari.jpg

Dostupné z: http://www.superspy.cz/sport/8374-zazrak-fotbaliste-v-litve-vyhrali-ceka-je-baraz

Tuhé těleso

In waltonsmodels.co.uk [online]. 5.10.2011 [cit. 2011-10-15]. Obrázek ve formátu jpg. Dostupné z: http://shop.waltonsmodels.co.uk/images/L131005.jpg

Dostupné z : http://shop.waltonsmodels.co.uk/index.php?manufacturers_id=29

Chung, Denis. In: motorcycle.com [online]. 19.12.2011 [cit. 2011-12-20]. Obrázek ve formátu jpg. Dostupné z: http://blog.motorcycle.com/wp-content/uploads/2011/12/121911-2012-ducati-1199-panigale-s.jpg

Dostupné z: http://blog.motorcycle.com/2011/12/19/manufacturers/ducati/2012-ducati-riding-experience-featuring-1199-panigale-s-and-troy-bayliss-academy/

In: osh.dol.govt.nz [online]. [cit. 2011-10-15]. Obrázek ve formátu jpg. Dostupné z: http://www.osh.dol.govt.nz/publications/booklets/crane-acop-2009/images/image2-mobile-crane.jpg

Dostupné z: http://www.osh.govt.nz/publications/booklets/crane-acop-2009/part10.shtml

In: dodaj.rs [online]. [cit. 2011-10-15]. Obrázek ve formátu jpg. Dostupné z: http://www.dodaj.rs/f/2T/Bc/1hrTCXKk/406c1.jpg

Dostupné z: https://vrelegume.rs/forum/viewtopic.php?f=38&t=12943&start=1665

Příklad 7)

In: rumpal.cz [online]. 2011 [cit. 2011-12-10]. Obrázek ve formátu jpg. Dostupné z: http://www.rumpal.cz/photos/gal9_obr1160182835_254_t.jpg

In: rumpal.cz [online]. 2011 [cit. 2011-12-10]. Obrázek ve formátu jpg. Dostupné z: http://www.rumpal.cz/photos/gal9_obr1160183466_65_t.jpg

Ideální plyn

In: chromservis.cz [online]. [cit. 2011-12-10]. Obrázek ve formátu jpg. Dostupné z: http://chromservis.cz/media/0/01_obrazky/Molekula_500.jpg

Dostupné z: http://chromservis.cz/item/chemicals?lang=CZ

In: zib.de [online]. [cit. 2011-12-10]. Obrázek ve formátu jpg. Dostupné z: http://www.zib.de/opt-long_projects/MIP/Matheon-B20/index.en.html

http://www.zib.de/opt-long_projects/MIP/Matheon-B20/pictures/b20_logo.jpg

In: wetecon.de [online]. [cit. 2011-12-10]. Obrázek ve formátu jpg. Dostupné z: http://wetecon.de/index_files/fotolia_4766336_l.jpg

Dostupné z: http://wetecon.de/

In: n24.de [online]. [cit. 2011-06-18]. Obrázek ve formátu jpg. Dostupné z: http://www.n24.de/media/_fotos/bildergalerien/002011/alternativeenergien/22209045.jpg

Dostupné z: http://www.n24.de/news/newsitem_8160398.html

In: ftr.ro [online]. [cit. 2011-12-10]. Obrázek ve formátu jpg. Dostupné z: http://ftr.ro/dbimg/stiri/47538/news.jpg

Příklad 3)

In: test-pneumatik.popgom.cz [online]. [cit. 2012-02-10]. Obrázek ve formátu jpg. Dostupné z: http://test-pneumatik.popgom.cz/vymena-pneumatik/udrzba-pneumatik

http://popgom.com/guide/wp-content/uploads/fr/pression.jpg

In: michelin.cz [online]. [cit. 2012-02-10]. Obrázek ve formátu jpg. Dostupné z: http://www.michelin.cz/auto-pneu/informace-doporuceni/pruvodce-udrzbou-pneumatik/tlak-husteni

http://www.michelin.cz/content/img/learnShareArticles/tyre_pressure2_small.jpg

Pevné látky a kapaliny

Medhi. In: flickr.com [online]. [cit. 2012-02-10]. Obrázek ve formátu jpg. Dostupné z: http://www.flickr.com/photos/medhius/2425529917.jpg

Dostupné z: http://www.flickr.com/photos/medhius/2425529917/

In: allforchildren.ru [online]. 2006-2012 [cit. 2012-02-10]. Obrázek ve formátu jpg. Dostupné z: http://allforchildren.ru/why/whatis68.php

In: mobilmusic.ru [online]. 2000-2012 [cit. 2012-02-10]. Obrázek ve formátu jpg. Dostupné z: http://www.mobilmusic.ru/wallpaper.php?id=557593

Dostupné z: http://www.mobilmusic.ru/wallpaper.php?id=557593

In: meltice.com.ua [online]. [cit. 2012-02-10]. Obrázek ve formátu jpg. Dostupné z: http://meltice.com.ua/articles/wasser/wp-content/uploads/roska.jpg

http://meltice.com.ua/articles/wasser/2009/10/07/chto-takoe-rosa-kak-obrazuetsya-rosa/

Příklad 1)

In: img.fotoalba.centrum.cz [online]. [cit. 2012-02-10]. Obrázek ve formátu jpg. Dostupné z: http://img.fotoalba.centrum.cz/img5/9642/24369642_4_daldfjdqn8.jpg

Dostupné z: http://fotoalba.centrum.cz/photo.php?pid=24369642

Příklad 3)

Jurvetson, Steve. In: wikimedia.org [online]. 16.4.2005 [cit. 2012-02-10]. Obrázek ve formátu jpg.

Dostupné z: http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/5/52/Soap_bubbles-jurvetson.jpg

Dostupné z: http://en.wikipedia.org/wiki/File:Soap_bubbles-jurvetson.jpg

Uhlířová, Eva. In: focenivbrne.cz [online]. [cit. 2012-02-10]. Obrázek ve formátu jpg. Dostupné z: http://www.focenivbrne.cz/fotografie/detske-fotografie/nahled/16.jpg

Dostupné z: http://www.focenivbrne.cz/fotogalerie/fotka-detske-fotografie/16-deti-aranzovana-fotografie-brno-foceni-cernobila.html

Příklad 6)

In: sbazar.cz [online]. [cit. 2012-02-10]. Obrázek ve formátu jpg. Dostupné z: http://www.sbazar.cz/img/big/61/6232061_1.jpg

In: meteostanice.cz [online]. [cit. 2012-02-10]. Obrázek ve formátu jpg. Dostupné z: http://www.meteostanice.cz/Fotografie/Zbozi/Original/t342.jpg

Dostupné z: http://www.meteostanice.cz/zbozi/3797/Bazenovy-teplomer-lihovy.htm

Příklad 7)

Radim, Richard. In: zachranny-kruh.cz [online]. 10.8.2008 [cit. 2012-02-10]. Obrázek ve formátu jpg. Dostupné z: http://www.zachranny-kruh.cz/image.php?idx=137163&mw=205

Dostupné z: http://www.zachranny-kruh.cz/aktuality/na_karlovarsku_se_srazila_cisterna_s_benzinem.html

Příklad 12)

In: szdc.cz [online]. [cit. 2012-02-10]. Obrázek ve formátu jpg. Dostupné z: http://www.szdc.cz/modernizace-drahy/prehled-staveb/op-doprava/brno-hb/fotogalerie/realizace/obraz004.jpg

Skupenské změny

In: flickr.com [online]. [cit. 2012-02-10]. Obrázek ve formátu jpg. Dostupné z: http://www.flickr.com/photos/artbystevejohnson/4622243738/in/photostream/

http://opencage.info/pics/files/800_10778.jpg

In: crh.noaa.gov [online]. [cit. 2012-02-10]. Obrázek ve formátu jpg. Dostupné z: http://www.crh.noaa.gov/Image/jkl/advectionfog.jpg

In: files.tarot-gina.webnode.cz [online]. 2011 [cit. 2012-02-10]. Obrázek ve formátu jpg. Dostupné z: http://files.tarot-gina.webnode.cz/200000514-b7d12b849d/les%20s%20jinovatkou.jpeg

Příklad 2)

In: www.gastroplus.cz [online]. [cit. 2012-02-10]. Obrázek ve formátu jpg. Dostupné z: http://www.gastroplus.cz/wp-content/uploads/2011/09/snapshot-2011-09-07-07-23-49-273x300.jpg

http://www.gastroplus.cz/category/recepty/napoje/

příklad 4)

In: i.lidovky.cz [online]. 17.07.2009 [cit. 2012-02-10]. Obrázek ve formátu jpg. Dostupné z: http://i.lidovky.cz/09/072/lngal/PKS2c7c04_Kroupy_ilustracni_foto.jpg

http://www.lidovky.cz/v-rakousku-padaly-kroupy-na-silnice-musely-snezne-pluhy-pkt-/ln_zahranici.asp?c=A090717_125321_ln_zahranici_pks

Pavlíček, Luboš In: novinky.cz [online]. 13.06.2010 [cit. 2012-02-18]. Obrázek ve formátu jpg. Dostupné z: http://media.novinky.cz/931/219315-top_foto1-dkrl0.jpg

http://www.novinky.cz/domaci/203114-vcerejsi-kroupy-na-vysocine-jeste-neroztaly-mely-az-tri-centimetry.html

Příklad 5)

In: svet-bydleni.cz [online]. 15.2.2010 [cit. 2012-02-18]. Obrázek ve formátu jpg. Dostupné z: http://www.svet-bydleni.cz/zahrada-a-kvetiny/rostliny/unor-v-zahrade.aspx

http://www.svet-bydleni.cz/Files/ResizedImages/FckGallery/1248986_crocus_-1x250.jpg

Příklad 7)

Elektrolux. In chadt.cz [online]. [cit. 2012-02-18]. Obrázek ve formátu jpg. Dostupné z: http://www.chadt.cz/abc/foto/suelec04.jpg

http://www.chadt.cz/abc/Jak-pouzivat-susicku.html?zam=3&str=1&dal=160&start=

Příklad 8)

Borovička, Jiří. In: astro.cz [online]. 30.03.2009 [cit. 2012-02-18]. Obrázek ve formátu jpg. Dostupné z: http://www.astro.cz/clanek/3688. **http://www.astro.cz/_data/images/news/2009/03/26/sudan3.jpg**

Dostupné z: http://www.astro.cz/clanek/3688

In: cdn.thedesignwork.com [online]. 15.02.2012 [cit. 2012-02-18]. Obrázek ve formátu jpg. Dostupné z: http://cdn.thedesignwork.com/wp-content/uploads/2011/02/leonid-meteor-shower.jpg
http://www.thedesignwork.com/29-memorable-meteor-shower-photos/

Příklad 10)

In: wikimedia.org [online]. 1920 [cit. 2012-02-18]. Obrázek ve formátu jpg. Dostupné z: Hugo Junkers http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/2/23/Bundesarchiv_Bild_146-2005-0007,_Hugo_Junkers.jpg/220px-Bundesarchiv_Bild_146-2005-0007,_Hugo_Junkers.jpg

Příklad 12)

Babuvera. In: foto.dama.cz [online]. [cit. 2012-02-18]. Obrázek ve formátu jpg. Dostupné z: http://foto.dama.cz/img/830/830764.jpg
Dostupné z: http://foto.dama.cz/galerie.php?u=124146

Příklad 13)

In: files.tarot-gina.webnode.cz [online]. [cit. 2012-02-18]. Obrázek ve formátu jpg. Dostupné z: http://files.tarot-gina.webnode.cz/200000514-b7d12b849d/les%20s%20jinovatkou.jpeg
http://tarot-gina.webnode.cz/fotogalerie/

Úvodní list:

Nettelbladt, Mårten. In: grasshopper3d.com [online]. 5.8.2011 [cit. 2012-02-18]. Obrázek ve formátu jpg. Dostupné z: http://www.grasshopper3d.com/group/kangaroo/forum/topics/soap-bubbles-explode-or-collapse?commentId=2985220%3AComment%3A356196&groupId=2985220%3AGroup%3A120977
In: images.coolspotters.com [online]. [cit. 2012-02-18]. Obrázek ve formátu jpg. Dostupné z: http://www4.images.coolspotters.com/photos/123165/blue-streak-roller-coaster-profile.jpg
Dostupné z: http://coolspotters.com/vehicles/blue-streak-roller-coaster
Cohen, Monika. In: hearos.com [online]. 12.8.2010 [cit. 2012-02-18]. Obrázek ve formátu jpg. Dostupné z: http://www.hearos.com/images/nascar-race.jpg
Dostupné z: http://www.hearos.com/earplugblog/nascar-ear-plugs-car-racing/

Použité zdroje pro zadání příkladů:

BARTOŠOVÁ, E. *Jevy v povrchové vrstvě kapaliny - knihovnička fyzikální olympiády č. 26.* Hradec Králové: MAFY, 1996.

ŠEDIVÝ, P. *Teplotní závislosti fyzikálních veličin - knihovnička fyzikální olympiády č. 51.* Hradec Králové: MAFY, 2002. ISBN - 80-86148-53-X.

ŽÁK, V. *Fyzikální úlohy pro střední školy.* 1. vyd. Havlíčkův Brod: Prometheus, 2011. ISBN – 978-80-7196-411-7.

BARTUŠKA, K. *Sbírka řešených úloh z fyziky pro střední školy I.* 1. vyd. Praha: Prometheus, 1997. ISBN - 80-7196-033-0.

BARTUŠKA, K. *Sbírka řešených úloh z fyziky pro střední školy II.* 1. vyd. Praha: Prometheus, 1997. ISBN - 80-7196-034-9.

KRUŽÍK, M. *Sbírka úloh z fyziky pro žáky středních škol.* 4. vyd. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1979. ISBN -14-190-79.

UNGERMANN, Z. *Škola mladých fyziků, Mechanika v úlohách II*. 1. vyd. . Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1971. ISBN -14-251-71.

VOLF, I.; JAREŠOVÁ, M. *Fyzika je kolem nás - knihovnička fyzikální olympiády č. 79.* Hradec Králové: MAFY, 2007. ISBN -80-86148-89-0.

MIKULČÁK, J.; KLIMEŠ, B.; ŠIROKÝ, J.; ŠŮLA, V.; ZEMÁNEK, F. *Matematické, fyzikální a chemické tabulky pro SŠ.* 3. vyd. Praha: Prometheus, 2004. ISBN -80-85849-84-4.

TESAŘ, J.; KUBÍČEK, Z.; ČECHOVÁ, M. *4. ročník fyzikální olympiády*. 1. vyd. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1964. ISBN -14-910-64.

TESAŘ, J.; UNGERMANN, Z.; ŘÍMAN, E. *5. ročník fyzikální olympiády*. 1. vyd. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1965. ISBN -14-955-65.

TESAŘ, J.; UNGERMANN, Z.; ŘÍMAN, E. 6. *ročník fyzikální olympiády*. 1. vyd. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1966. ISBN -15-125-66.
KONRÁD, J.; KOŠŤÁL, R., NÁTER, I. *X. ročník fyzikální olympiády*. 1. vyd. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1970. ISBN -14-371-70.
JANKŮ, V.; KOŠŤÁL, R.; NÁTER, I. *XII. ročník fyzikální olympiády*. 1. vyd. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1972. ISBN -14-529-72.
ŽAMPA, M.; SIMERSKÝ, M.; KLUVANEC, D. XX. *ročník fyzikální olympiády*. 1. vyd. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1981. ISBN -14-572-81.
ŽAMPA, M.; SIMERSKÝ, M.; KLUVANEC, D. XXI. *ročník fyzikální olympiády*. 1. vyd. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1982. ISBN -14-571-82.
UNGERMANN, Z.; SIMERSKÝ, M.; KLUVANEC, D. 28. *ročník fyzikální olympiády*. 1. vyd. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1992. ISBN -80-04-25284-2.
UNGERMANN, Z.; KLUVANEC, D.; VOLF, I. 29. *ročník fyzikální olympiády*. 1. vyd. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1993. ISBN -80-04-26405-0.

Použité Internetové stránky:

Hesteric, Roman. www.priklady.eu. [Online] ©2008-2012. [Citace: 10. 2 2012.] http://www.priklady.eu/cs/Index.alej
Bajnar, Jan. **www.sbirkaprikladu.cz** [Online] 30.9.2011 [Citace: 10. 2 2012.] http://www.gym-karvina.cz/sbirka_prikladu.html
In: **www.gymvod.cz** [Online] 2012. [Citace: 10. 2 2012.] http://www.gymvod.cz/aktualni-informace/
In: **www.forum.matweb.cz** [Online] 2005. [Citace: 10. 2 2012.] http://www.forum.matweb.cz/viewforum.php?id=2